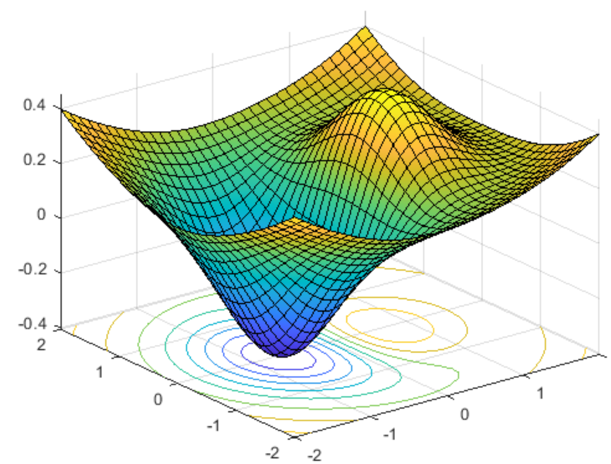
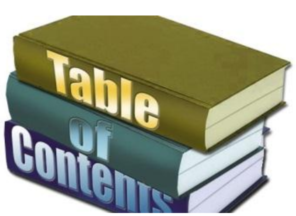
به نام خدا

روش حل
Outer Approximation



فهرست مطالب



مقدمه

روش *Outer Approximation*، یک روش رایج بـرای مسـائل برنامـه ریـزی عـدد صـحیح مختلط غیر خطـی یـا *Mixed Integer Nonlinear Programming* اسـت. در مقابـل ایـن روش، روش تجزیه بندرز *Benders Decomposition* وجود دارد. ایده ایـن دو روش یکسـان اسـت و حل مسئله نیازمند حل یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی به عنوان زیر مسئله و حل یک مسئله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط به عنوان مسئله اصلی است. ولی تفاوت ان ها در نحوه نوشتن مسئله اصلی است.

مقدمه

فرم کلی مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی با عنـوان *MINLP1* را بـه صـورت زیر در نظر بگیرید.

$$
(MINLP_1) \qquad \begin{aligned} &\min\ f(x,y) \\ &\text{s.t.}\ \ g(x,y) \le 0, \\ &\qquad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,\ y \in Y \subset \mathbb{Z}^m. \end{aligned}
$$

MINLP = Mixed Integer Non-Linear Programming

مقدمه

که در مدل فوق، تعاریف ذیل را داریم.

$$f : X \times Y \to \mathbb{R},$$

$$g_i : X \times Y \to \mathbb{R} \ (i = 1, \ldots, q)$$

$$g = (g_1, \ldots, g_q)^T$$

مقدمه

و $\mathbb{Z}^m$ مجموعه m بعدی از اعداد صحیح و $\mathbb{R}^n$ مجموعه n بعـدی از اعـداد پیوسـته اسـت.

فرض می شود که توابع f و g_i محدب و مشتق پذیر هستند. مجموع هـای S و V بـه صـورت زیر تعریف می شوند.

$$S = \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x, y) \leq 0\}$$

$$V = \{y \in Y \mid \text{ there exists } x \in X \text{ such that } g(x, y) \leq 0\}.$$

معرفی روش Outer Approximation

برای مقدار $y^i \in V$ ، x^i را جواب بهینه مسئله $NLP(y^i)$ (که در ادامه آمـده اسـت) در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
(NLP(y)) \qquad\qquad & \min \; f(x,y) \\
& \text{s.t.} \; g(x,y) \le 0, \\
& \qquad x \in X.
\end{aligned}
$$

معرفی روش Outer Approximation

مدل *MINLP1* را به صورت زیر می توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,y)\in S} f(x,y) &= \min_{y^i\in V}\min_{x\in X}\{f(x,y^i) \mid g(x,y^i)\le 0\} \\
&= \min_{y^i\in V}\min \; f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{s.t.} \;\; g(x^i,y^i) + \nabla g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \le 0 \\
&\qquad\qquad x \in X \\
&= \min_{y^i\in V}\min \; \alpha \qquad\qquad (13.4. \\
&\qquad \text{s.t.} \;\; \alpha \ge f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad 0 \ge g(x^i,y^i) + \nabla g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad x \in X, \alpha \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned}
$$

*

معرفی روش Outer Approximation

تعریف کنید،

$$T = \{i \mid y^i \in V \text{ and } x^i \text{ solves } (NLP(y^i))\}.$$

مدل اصلی که با *MOAV* معرفی می شود براساس مجموعه *T* بـه صـورت زیـر تعریـف مـی شود.

$$
\begin{aligned}
(MOAV) \qquad & \min\ \alpha \\
& \text{s.t. } \alpha \geq f(x^i, y^i) + \nabla^T f(x^i, y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& \qquad 0 \geq g(x^i, y^i) + \nabla^T g(x^i, y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& \qquad x \in X, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}^1.
\end{aligned}
$$

معرفی روش Outer Approximation

اگر (x^*, y^*) جواب بهینه مدل MINLP1 در نظر گرفته شود، (α^*, x^*, y^*) مدل * خواهد بود. می توان نشان داد که حل مسئله MOAV معادل حل مسئله MINMP1 است. در موارد اشاره شده، فرض شده است که $y^i \in Y$ منجر به یک جواب امکان پذیر برای $NLP(y^i)$ می شود. ولی اگر این فرض برقرار نباشد، باید بتوان به نحوی جواب y^i را از فضای امکان پذیر مسئله MOAV حذف کرد. برای این که نشان دهیم که y^i منجر به یک جواب امکان ناپذیر برای $NLP(y^i)$ می شود، می توان مدل $NLPF(y)$ را حل کرد.

معرفی روش Outer Approximation

$$
\begin{aligned}
(NLPF(y)) \qquad & \min\ \beta \\
& \text{s.t.}\ \ \beta \geq g_i(x,y), \quad i=1,\ldots,q, \\
& \qquad x \in X.
\end{aligned}
$$

y^i منجر به امکان ناپذیری مدل $NLP(y^i)$ می شود اگر $NLPF(y^i)$ یک جواب امکان

پذیر $\beta^* > 0$ داشته باشد. در این صورت محدودیت زیر را بـرای حـذف y^i از فضـای امکـان

پذیر *MOAV* اضافه می کنیم.

$$
0 \geq g_j(x^i,y^i) + \nabla^T g_j(x^i,y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix}, \ j=1,\ldots,q,
$$

معرفی روش Outer Approximation

F را مجموعه اندیس هایی تعریف کنید که $y^i \in Y$ باعث امکان ناپذیری $NLP(y^i)$ مـی شود. در مسئله $MOVA$، رابطه $y \in V$ باعث می شود که مقادیر امکان پـذیر بـرای y انتخـاب شود. با در نظر گرفتن محدودیت بالا، جواب های امکان ناپذیر از کلیه مقادیر y در Y حـذف می شود. لذا می توان با جایگزین کردن $y \in V$ با $y \in Y$ و محدویت بالا، مدل $MOAV$ را حل کرد که از این پس این مدل را MOA می نامیم که به صورت زیر بیان می شود.

Outer Approximation معرفی روش

$$
\begin{aligned}
(MOA)\qquad & \min\ \alpha \\
\text{s.t.}\ \ & \alpha \geq f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in F, \\
& x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}^1.
\end{aligned}
$$

معرفی روش Outer Approximation

با توجه به این که محدودیت های مدل فوق به صورت مرحله به مرحله به مدل MOA اضافه می شود، لذا مدل به صورت زیر نوشته می شود.

$$
\begin{aligned}
(MOA_k) \qquad & \min\ \alpha \\
\text{s.t.}\ & \alpha \geq f(x^i, y^i) + \nabla^T f(x^i, y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T^k, \\
& 0 \geq g(x^i, y^i) + \nabla^T g(x^i, y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T^k, \\
& 0 \geq g(x^i, y^i) + \nabla^T g(x^i, y^i) \begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in F^k, \\
& x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned}
$$

$$T^k = \{i \mid y^i \in V \text{ and } x^i \text{ solves } NLP(y^i),\ i = 1, \ldots, k\},$$
$$F^k = \{i \mid NLP(y^i) \text{ is infeasible and } x^i \text{ solves } NLPF(y^i),\ i = 1, \ldots, k\}.$$

الگوریتم Outer Approximation

گام ۱: $y^1 \in Y$ را در نظر بگیرید. $LB=-\infty; UB=+\infty; T^0=F^0=\varnothing; k=1$

گام ۲: مسئله $NLP(y^k)$ را حل کنید.

الف) اگر $NLP(y^k)$ امکان پذیر بود، جواب بهینه مدل را در x^k قرار دهید.

$f(x^k,y^k)=UB^k$ و $T^k=T^{k-1}\cup\{k\}$ و $\min\{UB,UB^k\}=UB$. اگر $UB=UB^k$ باشد

$(x^k,y^k)\rightarrow(x^*,y^*)$.

الگوریتم Outer Approximation

ب) اگر $NLP(y^k)$ امکان ناپذیر بود، مسئله $NLPF(y^k)$ را حل کنید. و جواب بهینه x^k را در نظر بگیرید و $F^k = F^{k-1} \cup \{k\}$.

گام ۳: مسئله MOA_k را حل کنید و جواب $(\alpha^k, x^{k+1}, y^{k+1})$ را بدست آورید و $\alpha^k = LB^k$. اگر $LB^k \geq UB$ بود متوقف شوید و (x^*, y^*) را جواب بهینه مسئله MINLP1 معرفی کنید. در غیر این صورت $k := k+1$ و بروید گام ۲.

مثال

مثـال: مـدل برنامـه ریـزی غیرخطـی عـدد صـحیح مخـتلط زیـر را بـه روش *Outer Approximation* حل کنید.

$$\begin{aligned}
\min\ & f(x,y) = 5y - 2\ln(x+1) \\
\text{s.t.}\ & g_1(x,y) = e^{x/2} - (1/2)\sqrt{y} - 1 \le 0, \\
& g_2(x,y) = -2\ln(x+1) - y + 2.5 \le 0, \\
& g_3(x,y) = x + y - 4 \le 0, \\
& x \in [0,2],\ y \in [1,3] \text{ integer}.
\end{aligned}$$

مثال

حل:

گام ۱: $y^1=1; LB=-\infty; UB=+\infty; T^0=\varnothing; F^0=\varnothing$

گام ۲: مسئله $NLP(y^k)$ را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 5y^k-2\ln(x+1)\\
&s.t.\\
&e^{x/2}-\frac{1}{2}\sqrt{y^k}-1\le 0\\
&-2\ln(x+1)-y^k+2.5\le 0\\
&x+y^k-4\le 0\\
&x\in[0,2].
\end{aligned}
$$

مثال

سوال این است که آیا این مسئله امکان پـذیر اسـت یـا خیـر؟ بـرای ایـن منظـور، مسـئله $NLPF(y^k)$ را حل می کنیم.

$$\begin{aligned}
&\min \quad \beta \\
&s.t. \\
&\beta \geq e^{x/2} - 1.5 \\
&\beta \geq -2\ln(x+1) - 1.5 \\
&\beta \geq x - 3 \\
&x \in [0, 2]
\end{aligned}$$

مثال

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$\beta^* = 0.133; x^1 = 0.98$$

لذا مسئله $NLP(y^k)$ امکان ناپذیر است. به عبارت دقیق تر، $NLP(y^k)$ برای $y^k = 1$ امکان ناپذیر است. لذا $F^1 = \{1\}$.

مثال

گام ۳: محدودیت هایی که جواب گام ۲ را از فضای امکان پذیر حذف کند به صورت زیر

به مدل *MOA* اضافه می شود.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&0 \ge e^{0.98/2} - 0.5\sqrt{1} - 1 + \left(0.5e^{0.98/2}, -0.5\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&0 \ge -2\ln(1.98) - 1 + 2.5 + \left(\frac{-2}{0.98+1}, -1\right)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&0 \ge 0.98 + 1 - 4 + (1,1)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}
$$

مثال

ساده شده مدل فوق به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&0 \geq -0.417 + 0.816x - 0.25y \\
&0 \geq 2.1236 - 1.01x - y \\
&0 \geq -4 + x + y \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$x^2 = 0.1224; y^2 = 2; \alpha^1 = -\infty; LB = -\infty$$

مثال

گام ۲: برای $y^2 = 2$ مدل $NLP(y^2)$ دارای جواب امکان پذیر است؟

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 10 - 2\ln(x+1) \\
&s.t. \\
&e^{x/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 \le 0 \\
&-2\ln(x+1) - 2 + 2.5 \le 0 \\
&x + 2 - 4 \le 0 \\
&x \in [0,2]
\end{aligned}
$$

مثال

برای بررسی امکان پذیری مدل فوق می بایستی مدل زیر را حل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \beta \\
&s.t. \\
&\beta \geq e^{x/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 \\
&\beta \geq -2\ln(x+1) + 0.5 \\
&\beta \geq x - 2 \\
&x \in [0, 2]
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابراست با:

$$\beta^* = -0.3855; x = 0.557$$

مثال

با توجه به این کـه β^* منفـی اسـت لـذا مـدل $NLP(y^2)$ امکـان پـذیر اسـت. حـالا مـدل $NLP(y^2)$ را حل می کنیم.

$$\begin{aligned}
&\min \quad 10-2\ln(x+1) \\
&s.t. \\
&e^{x/2}-0.5\sqrt{2}-1\le 0 \\
&-2\ln(x+1)-2+2.5\le 0 \\
&x+2-4\le 0 \\
&x\in[0,2]
\end{aligned}$$

مثال

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$x^{2}=1.069; f\left(x^{2}, y^{2}\right)=8.545=UB^{2}$$

$$UB=\min\{+\infty, 8.545\}=8.545 \rightarrow \left(x^{*}, y^{*}\right)=(1.069, 2); T^{2}=\varnothing \cup \{2\}$$

مثال

گام ۳: مدل *MOA* را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&T^2 = \begin{cases}
\alpha \geq 5\times 2 - 2\ln(1+1.069) + \left(-\dfrac{2}{1.069+1}, 5\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \geq e^{1.069/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 + \left(0.5e^{1.069/2}, -0.5\dfrac{1}{2\sqrt{1}}\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \geq -2\ln(1+1.069) - 2 + 2.5 + \left(\dfrac{-2}{1.069+1}, -1\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \geq 3.069 - 4 + (1,1)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix}
\end{cases} \\
&F^1 = \begin{cases}
0 \geq -0.417 + 0.816x - 0.25y \\
0 \geq 2.1236 - 1.01x - y \\
0 \geq -4 + x + y
\end{cases} \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}
$$

مثال

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر می شود.

$$x^3 = 1.0692; y^3 = 2; \alpha^2 = 8.545 = LB^2 = UB = 8.545$$

لذا به جواب بهینه رسیدیم که به صورت $\left(x^*, y^*\right) = (1.069, 2)$ و پایان.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com