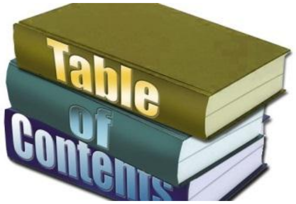
به نام خدا

درس ۳۵: پیاده سازی الگوریتم تولید ستون برای حل مسائل بزرگ برنامه ریزی خطی

فهرست مطالب



معرفی روش تولید ستون

مقدمه

روش تولید ستون یا *column generation* یکی از روش های موثر در حل مسائل برنامه ریزی خطی با ابعاد بزرگ به خصوص در مواردی است که تعداد متغیرها بسیار بیشتر از تعداد محدودیت ها است و به عبارتی ماتریس ضرایب مسئله دارای ستون های زیادی است. این روش را در دهه شصت میلادی گیلمور و گموری طراحی کردند.

در چنین مسائلی در حالت ازادسازی خطی تعدد متغیرهای غیر پایه که صفر هستند، بسیار زیاد است در حالی که فقط تعداد محدودی از متغیرها در پایه قراردارند و دارای مقادیر غیر صفر می باشند.

معرفی روش تولید ستون

شرح الگوریتم تولید ستون برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی

یک مسئله برنامه ریزی خطی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$LP:\begin{cases} Max\ \ Z=cx \\ s.t. \\ Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$$

اگر ماتریس A در این مدل که یک ماتریس $m*n$ (m سطر و n ستون) فرض می شود بسیار بزرگ باشد، به معنی آن است که دارای تعداد قبل توجهی ستون است که در هر پاسخ پایه مسئله فقط از m ستون آن برای تشکیل وارون ماتریس پایه و پاسخ های پایه استفاده شده و سایر ستون ها آن یعنی $n-m$ ستون وابسته به متغیرهای غیرپایه ای صفر است که در تکرار فعلی استفاده نمی شود.

معرفی روش تولید ستون

در روش تولید ستون می خواهیم بدون این که نیاز به شناسایی تمام ستون های ماتریس A باشد، ابتدا با حداقل تعداد مورد نیاز یعنی m ستون از ماتریس A شروع کنیم و زیر مسئله برنامه ریزی خطی آن را موسوم به زیر مسئله اصلی حل کنیم و سپس با وجود این که تمام ستون های ماتریس A را نمی دانیم، با تشکیل زیر مسئله فرعی و حل آن یکی از ستون های آن را به عنوان ستون متغیر ورودی به پایه تولید کرده و سپس آن را وارد زیر مسئله اصلی کنیم. حل جزییات زیرمسائل اصلی و فرعی را شرح می دهیم:

معرفی روش تولید ستون

زیر مسئله اصلی محدود شده RMP

این زیر مسئله در ابتدا فقط شامل بخش کوچکی از مسئله اولیه، یعنی یک زیرماتریس $m*m$ از ماتریس A است. تولید این ستون ها با توجه به مسئله اولیه انجام می شود. سپس در هر تکرار قرار است یک ستون جدید که از حل زیر مسئله فرعی به دست می اید، به آن اضافه شود. زیر مسئله اصلی RMP یک زیر مسئله از نوع LP است و می توان پاسخ را از روش سیمپلکس به دست اورد. البته با حل این مسئله، پاسخ متغیرهای دوگان آن نظیر u به دست خواهند امد که برای این روش مهم است زیرا این متغیرهای همزاد در زیر مسئله فرعی استفاده می شوند.

معرفی روش تولید ستون

زیرمسئله فرعی قیمت گذاری

در این زیر مسئله قرار است بدون این که تمام بردارهای ستونی مربوط به ماتریس A را بدانیم، بردار ستونی مربوط به متغیر ورودی به پایه را برای زیر مسئله محدود شده RMP به دست آوریم. می دانیم که در یک مسئله برنامه ریزی خطی با تابع هدف Max متغیر ورودی به پایه متغیری است که دارای شرط بهینگی به صورت زیر باشد:

$$Min\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$$

معرفی روش تولید ستون

از طرف دیگر داریم:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = u a_j - c_j$$

که در آن *u* متغیرهای دوگان حاصل از پاسخ زیر مسئله اصلی *RMP* است. از نظریه برنامه ریزی خطی می دانیم (z_j-c_j) را هزینه کاهش یافته یا *Reduced cost* می نامند زیرا تفاوت z_j یعنی قیمت تمام شده برای تولید یک واحد محصول *j* و c_j سود حاصل از هر واحد محصول *j* است.

معرفی روش تولید ستون

در یک مسئله حداکثر سازی، متغیر ورودی متغیری است که در آن تفاوت سود تولید هر واحد آن نسبت به قیمت تمام شده هر واحد آن بیشتر باشد، به عبارتی c_j-z_j بزرگتری داشته باشد. برای این که این مقدار بزرگتر باشد چون معمولا امکان افزایش سود وجود ندارد، باید هزینه های تولید محصول و یا به عبارتی همان قیمت تمام شده آن کاست و زیر مسئله فرعی را که براساس تولید می شود، زیر مسئله قیمت گذاری یا *pricing subproblem* می نامند.

معرفی روش تولید ستون

از نظریه دوگانگی در برنامه ریزی خطی می دانیم که مقدار متغیر دوگان وابسته به محدودیت i ام مسئله اولیه برابراست با:

$$u_i = \left(c_B B^{-1}\right)$$

پس زمانی که می خواهیم بردار a_j را از بین بردارهای ستون ماتریس A بدست آوریم، به نحوی که مربوط به متغیر ورودی به پایه مسئله اصلی باشد، کافی است داشته باشیم.

$$Min\left\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\right\} = Min\left\{c_B B^{-1} a_j - c_j \mid c_B B^{-1} a_j - c_j < 0\right\}$$
$$= Min\left\{u a_j - c_j \mid u a_j - c_j < 0\right\}$$

معرفی روش تولید ستون

چون بردار سطری مقادیر متغیرهای همزاد یعنی $u=(u_1,u_2,...,u_i,...,u_m)$ را می دانـیم،

پس می توان تعیین بردار a_j را با حل مسئله زیر تعیین کرد.

$$Min\, w = (u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_m)\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j$$

در مسئله بالا عناصر بردار a_j باید در بین خودشان شرایط موجود در مسئله اولیـه را

رعایت کنند که محدودیت های آن معمولا به صورت خطی است که فضـای موجـه آن را

S در نظر می گیریم.

معرفی روش تولید ستون

همان طور که مشخص است، تابع هدف زیر مسئله بالا یا همان z_j-c_j مربوط به هر متغیر در جدول سیمپلکس است که در آن مقادیر متغیرهای همزاد از حل زیر مسئله اصلی محدود شده *RMP* تولید می شود. با حل زیر مسئله فرعی بردار a_j به دست می‌اید.

اگر پاسخ تابع هدف زیر مسئله فرعی در یک مسئله با تابع هدف حداکثر سازی مقدار مثبتی شد بدین معنی است که شرط بهینگی برآورد شده است و به نقطه پایانی و پاسخ بهینه رسیده ایم. ولی در صورتی که مقدار تابع هدف منفی شد، بردار ستون a_j باید به زیر مسئله اصلی محدود شده *RMP* اضافه شود و الگوریتم در تکرار بعدی ادامه می یابد.

حل یک مثال

مسئله کاهش ضایعات برش یا cutting stock problem

در یک کارخانه کاغذ سازی رول های کاغذ به عرض ۱۷ فوت و طول L تولید می شوند. تقاضای دریافتی برای کارخانه براساس عرض کاغذ مورد درخواست تهیه می شود. در حال حاضر کارخانه تقاضای زیر را دریافت کرده است:

عرض مورد تقاضا (فوت)	۳	۵	۹
تعداد رول مورد نیاز	۲۵	۲۰	۱۵

می خواهیم ببینیم چگونه رول های کاغذ را ببریم تا ضمن تامین سفارش های مورد نظر، ضایعات ناشی از الگوهای برش حداقل شوند؟

حل یک مثال

حل: این مسئله در ادبیات کلاسیک برنامه ریزی خطی یکی از مسائل مهم است و می دانیم که برای مدل سازی آن باید هم الگوهای برش و هم ترکیبات ناشی از آن ها را شناسایی کنیم. یافتن الگوهای برش در مسئله داده شده به دلیل کوچکی آسان اما یافتن ترکیب های آن ها بسیار زیاد است و به همین دلیل از مدل سازی برنامه ریزی خطی برای این منظور استفاده می کنیم.

حل یک مثال

در مدل سازی کلاسیک مسئله فرض می کنیم ابتدا باید الگوهـای بـرش را تعیـین و سپس با کمک مدل برنامه ریزی ریاضی آن را حل کنیم. برای مثال می تـوان ۶ الگـوی زیر را در این مثال به دست آورد:

		الگوهای برش						
		1	2	3	4	5	6	7
عرض برش	3	5	4	2	2	1	0	0
	5	0	1	2	0	1	3	0
	9	0	0	0	1	1	0	1
عرض ضایعات		2	0	1	2	0	2	8

حل یک مثال

متغیر تصمیم گیری مسئله به صورت زیر تعریف می شود:

x_j = تعداد رولی که براساس الگوی برش j بریده می شود.

چون قرار است کل ضایعات حداقل شود و طول هر رول L است، پس مساحت کل ضایعات برابراست با:

کل مساحت موردنیاز–کل مساحت رول های استفاده شده=کل مساحت ضایعات

$$=17\times L\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\right)-L\times\left(25\times 3+20\times 5+9\times 15\right)$$
$$=\boxed{17L}\sum x_j\boxed{-310L}$$

حل یک مثال

مقادیری که در کادر نوشته شده است، مقادیر ثابت توده و قابل حذف از تابع هـدف است بنابراین مدل کلاسیک این مسئله به صورت یک مدل برنامـه ریـزی عـدد صـحیح زیر در می آید:

$$\begin{cases} Min\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ s.t. \\ \qquad 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \\ \qquad x_4 + x_5 + x_7 \geq 15 \\ x_j \geq 0, \text{int}, j = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

حل یک مثال

مشکل اساسی این نوع مدل سازی برای مسائل واقعی آن است که تعداد الگوهای برش در چنین مسائل عملی بسیار زیاد خواهد بود.

حل یک مثال

برای غلبه برای این مشکل می خواهیم بدون شناسایی تمام الگوهای اولیه، مسئله را از روش تولید ستونی حل کنیم. البته چون x_j باید عدد صحیح باشد و غالبا چنین مسائلی در ابعاد بسیار بزرگ اتفاق می افتد، می توان پاسخ بهینه عدد صحیح را برابر با پاسخ حاصل از گرد کردن پاسخ ازادسازی برنامه ریزی خطی فرض کرد. چنین کاری در ادبیات این مسئله مرسوم است. اکنون ازادسازی مسئله برنامه ریزی خطی مسئله بالا را در نظر می گیریم و آن را با روش تولید ستونی حل می کنیم.

حل یک مثال

تکرار شروع در زیر مسئله اصلی RMP

ابتدا به سه ستون برای تولید پایه اولیه نیاز داریم به نحوی که این سه ستون یک ماتریس اولیه $3*3$ برای B^{-1} با ستون های مستقل از هم را تشکیل دهند، یعنی الگوهای اولیه هر یک به تنهایی فقط از عرض های ۳،۵ و ۹ استفاده کنند. اگر متغیرهای وابسته به آن ها را برای هماهنگی با مدل اولیه که ساختیم، به ترتیب x_1 و x_6 و x_7 بنامیم و مجموعه متغیرهای پایه را با BV_0 نشان دهیم، در این صورت داریم:

حل یک مثال

$$BV_0=\begin{bmatrix}x_1\\x_6\\x_7\end{bmatrix},B_0=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow B_0^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

چون ضریب هر متغیر در تابع هدف این مسئله یک است، پس:

$$(u_1,u_2,u_3)=c_B B_0^{-1}=(1,1,1)\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3},1\right)$$

حل یک مثال

زیر مسئله فرعی قیمت گذاری

می خواهیم متغیر ورودی به پایه را در زیر مسئله اصلی تعیین کنیم. چون تابع هدف مسئله حداقل سازی است، باید با توجه به مثبت ترین z_j-c_j در بین متغیرهای غیرپایه مثبت، متغیر واردشونده به پایه تعیین شود و چون مسئله با ابعاد بسیار بزرگ است و تمام ستون ها متغیرها را در ماتریس A نداریم، روش تولید ستونی استفاده می شود و ستون مربوط به متغیر ورودی را به صورت زیر

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

حل یک مثال

در نظر می گیریم که هر عنصر آن بیانگر آن است که در الگوی انتخابی قرار است

چه مقدار از عرض های مورد نظر بریده شوند:

$$z_j - c_j = c_B B_0^{-1} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = (u_1, u_2, u_3) \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1 \right) \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1$$

$$= \frac{1}{5} a_3 + \frac{1}{3} a_5 + a_9 - 1$$

از طرف دیگر a_3، a_5، و a_9 باید به گونه ای انتخاب شوند که مجموع عرض مصرفی

بیش از ۱۷ فوت نشود، یعنی:

$$\begin{cases} 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17 \\ a_3, a_5, a_9 \ge 0, \text{int} \end{cases}$$

حل یک مثال

پس به طور خلاصه به دنبال یافتن ترکیبی هستیم که

$$Max\ \ Z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$$

$$s.t.$$

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17$$

$$a_3, a_5, a_9 \ge 0, \text{int}$$

مسئله بالا یک مسئله کوله پشتی است

$$Z_{IP}^* = \frac{8}{15}, a_9^* = a_3^* = a_5^* = 1$$

حل یک مثال

یعنی اولا چون مقدار تابع هدف مثبت است، پس شرط توقف صادق نیست و ثانیا الگوی فوق برای ورود به پایه انتخاب می شود که فرض کنید وابسته به متغیر مثلا x_5 باشد. در این صورت دوباره به زیر مسئله اصلی بر می گردیم. در این مثال مشخص است که متغیر ورودی مربوط به متغیر x_5 است. در مواردی که مشخص نیست نام دلخواه برای آن در نظر گرفته می شود(مثلا s_1).

حل یک مثال

زیر مسئله اصلی RMP

ابتدا با توجه به ستون ورودی باید ستون زیر را محاسبه کرد.

$$\bar{a}_j = B_0^{-1} a_j = B_0^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون می توان آزمایش نسبت روش سیمپلکس برای تعیین متغیر خروجی از پایه را در مورد آن اجرا کرد. مقدار سمت راست با توجه به پایه این مرحله به صورت زیر بدست می آید.

حل یک مثال

$$\bar{b} = B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$Min\left\{ \overset{x_1}{\frac{5}{\frac{1}{5}}}, \overset{x_6}{\frac{\frac{20}{3}}{\frac{1}{3}}}, \overset{x_7}{\frac{15}{1}} \right\} = 15$$

پس، متغیر x_7 از پایه خارج می شود. محاسبه مقادیر متغیرهـای پایـه جدیـد و وارون ماتریس پایه جدید که از طریق حاصل ضرب ماتریس مقدماتی بـه دسـت مـی آیـد، بـه صورت زیر است:

حل یک مثال

$$BV_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = c_B B^{-1} = (1,1,1)\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{7}{15}\right)$$

حل یک مثال

زیر مسئله فرعی قیمت گذاری

$$z_j - c_j = c_B B_0^{-1}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = (u_1, u_2, u_3)\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{7}{5}\right)\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{7}{15}a_9 - 1$$

$$\begin{cases} Max Z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{7}{15}a_9 - 1 \\ s.t. \\ 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17 \\ a_3, a_5, a_9 \ge 0, \text{int} \end{cases} \Rightarrow a_3^* = 4, a_5^* = 1, a_9^* = 0, Z_{IP}^* = \frac{2}{15} > 0$$

یعنی اولا چون مقدار تابع هدف مثبت است، پس شرط توقف صادق نیست و ثانیا الگوی فوق که وابسته به متغیر x_2 است، برای ورود به پایه انتخاب می شود و دوباره روش از زیر مسئله اصلی محدود شده ادامه می یابد.

حل یک مثال

تکرار ۲:

زیر مسئله اصلی RMP

ابتدا با توجه به ستون ورودی باید ستون زیر را محاسبه کرد.

$$\bar{a}_j = B_0^{-1} a_j = B_0^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل یک مثال

اکنون می توان آزمایش نسبت روش سیمپلکس برای تعیین متغیر خروجـی از پایـه را در مورد آن اجرا کرد. مقدار سمت راست با توجه به پایه این مرحله بـه صـورت زیـر بدست می آید.

$$\bar{b} = B_0^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$Min \left\{ \overset{x_1}{\frac{2}{\frac{4}{5}}}, \overset{x_6}{\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}} \right\} = 2.5$$

حل یک مثال

پس، متغیر x_1 از پایه خارج می شود. محاسبه مقادیر متغیرهای پایه جدید و وارون ماتریس پایه جدید که از طریق حاصل ضرب ماتریس مقدماتی به دست می آید، به صورت زیر است:

$$BV_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_6\\x_5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\x_6\\x_5\end{bmatrix}\rightarrow B=\begin{bmatrix}4&0&1\\1&3&1\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{12}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$u=c_BB^{-1}=(1,1,1)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{12}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}\\0&0&1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

حل یک مثال

زیر مسئله فرعی قیمت گذاری

$$z_j - c_j = c_B B_0^{-1}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = (u_1, u_2, u_3)\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_9 - 1$$

$$\begin{cases} MaxZ = \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_9 - 1 \\ s.t. \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a_3^* = 1, a_5^* = 1, a_9^* = 1, Z_{IP}^* = 0 \not> 0 \\ 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17 \\ a_3, a_5, a_9 \ge 0, \text{int} \end{cases}$$

چون مقدار تابع هدف صفر است، پس شرط توقف صادق است و به جواب بهینه می رسیم.

حل یک مثال

پاسخ نهایی مسئله با این روش به صورت زیر است:

$$Z_{LP}^* = 18\frac{1}{3}, x_2^* = 2.5, x_5^* = 15, x_6^* = \frac{5}{6}$$

مراجعه به برنامه ویژال استدیو

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com