

# درس ۸: مسئله جریان در شبکه

## با کمترین هزینه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



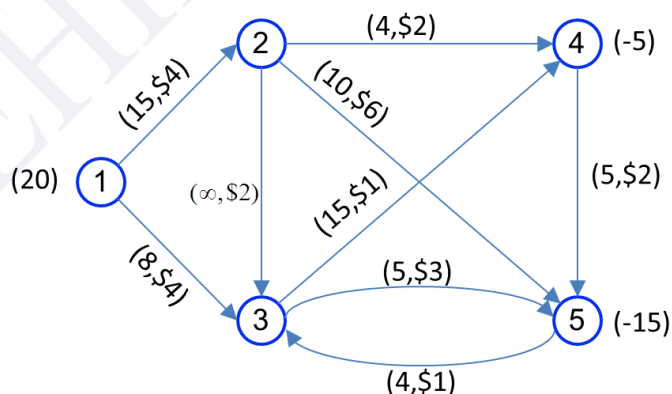
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل‌های خاص جریان در شبکه مانند مسئله حمل‌ونقل، مسئله کوتاهترین مسیر و مسئله درخت پوشش کمینه خواهیم پرداخت.

### مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره  $i$  به گره  $j$  را به صورت  $i-j$  نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۲-۴)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور

هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت  $\infty$  به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در آن برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت - نشان داده می‌شوند. در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

$x_{ij}$ : تعداد واحدهای حمل شده از گره  $i$  به گره  $j$  با استفاده از کمان  $i-j$  است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53} \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & x_{12} + x_{13} = 20 \\ (2) \quad & -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0 \\ (3) \quad & -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0 \\ (4) \quad & -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5 \\ (5) \quad & -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15 \\ & x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4. \end{aligned}$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره ۱ ( $x_{12} + x_{13}$ )، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ ( $x_{12}$ ) برابر جریان خروجی از گره ۲ ( $x_{23} + x_{24} + x_{25}$ ) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان  $x_{ij}$  در معادلات توازن فقط ضریب ۰، +۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقاً در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب +۱ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و -۱ مربوطه به گره ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به  $n$  گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

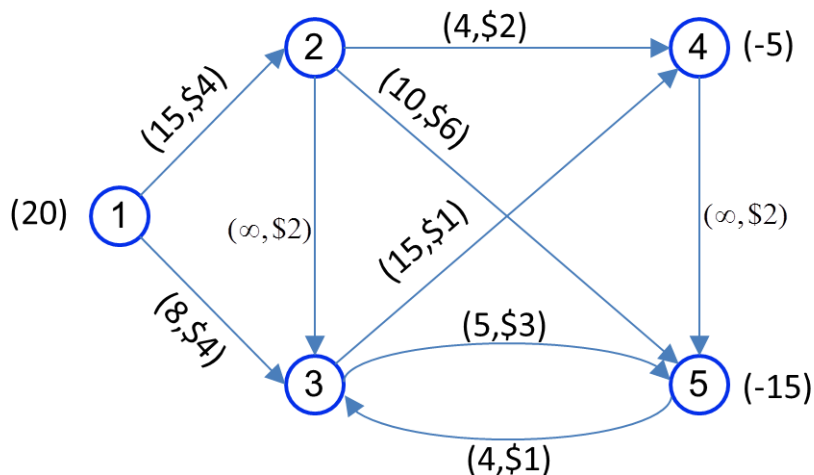
s.t.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

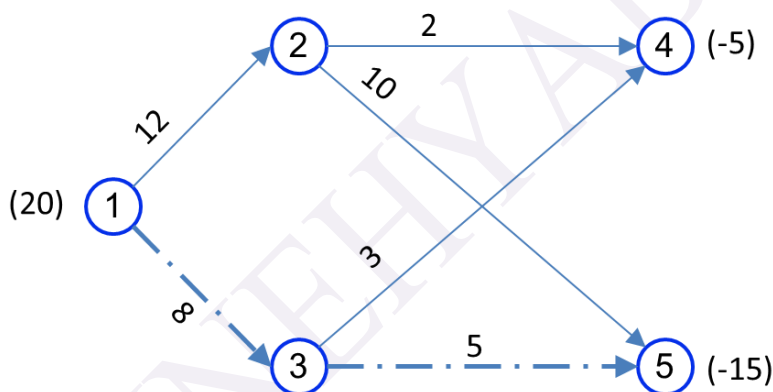
$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

### مسئله جریان در شبکه با کمترین هزینه

در این بخش با استفاده از مفاهیم شبکه که تا کنون بیان شده است، روش سیمپلکس شبکه ارایه می‌شود. مسئله جریان در شبکه پیچیده تر از مسئله حمل و نقل است زیرا گره‌های واسط دارد و همچنین هر کمان ظرفیت دارد. برای حل این مسئله با استفاده از روش سیمپلکس باید یک جواب امکان پذیر داشت. تعیین جواب اولیه در مسئله شبکه کمی با مسئله حمل و نقل متفاوت است و بدست آوردن یک جواب اولیه می‌تواند نیاز به محاسبات زیادی داشته باشد. مثلاً فرض کنید که جواب اولیه در دسترس است. بیان الگوریتم جریان در شبکه را در قالب یک مثال تشریح می‌کنیم.



در شکل روی هر کمان  $(A, B)$  قرار دارد که  $A$  نشان دهنده ظرفیت کمان و  $B$  نشان دهنده هزینه عبور یک واحد از کمان است. جواب اولیه زیر را در نظر بگیرید.



در شکل فوق، کمان  $---$  نشان دهنده متغیرهای غیراساسی هستند که در حد بالای خود قرار دارند و کمان‌های توپر، متغیرهای پایه هستند. کمان‌های توپر درخت گسترش را برای شبکه تشکیل می‌دهد و جواب اساسی را برای مسئله می‌سازد. برای این که تعیین شود جواب فعلی یک جواب اساسی بهینه است، باید هزینه  $\bar{c}_{ij}$  همه کمان‌های غیرپایه را محاسبه کرد. برای این منظور، ابتدا مضرب‌های  $y_i$  (  $i = 1, \dots, n$  ) را محاسبه می‌کنیم. اگر این مضرب‌ها در روابط زیر صدق کنند:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \geq 0; x_{ij} = l_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j = 0; l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \leq 0; x_{ij} = u_{ij}$$

آنگاه جواب اساسی فعلی، بهینه است. برای محاسبه مضربها  $(y_i)$ ، می توان یک مضرب را به طور دلخواه برابر صفر در نظر گرفت و مابقی مضربها را با استفاده از رابطه  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  محاسبه کرد. مضربهای  $(y_i)$  به صورت زیر می شود.

$$y_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} (2,4) \rightarrow 0 = 2 - y_2 + y_4 \rightarrow y_4 = -2 \\ (1,2) \rightarrow 0 = 4 - y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = +4 \\ (3,4) \rightarrow 0 = 1 - y_3 + y_4 \rightarrow y_3 = -1 \\ (2,5) \rightarrow 0 = 6 - y_2 + y_5 \rightarrow y_5 = -6 \end{cases}$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای متغیرهای غیراساسی به صورت زیر می شود:

$$\bar{c}_{13} = 4 - 4 + (-1) = -1$$

$$\bar{c}_{23} = 2 - 0 + (-1) = +1$$

$$\bar{c}_{35} = 3 - (-1) + (-6) = -2$$

$$\bar{c}_{45} = 2 - (-2) + (-6) = -2$$

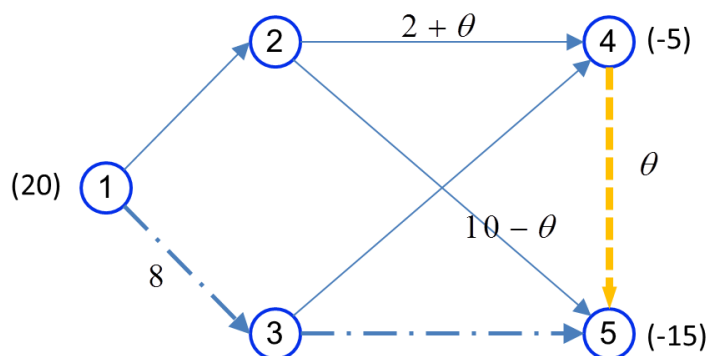
$$\bar{c}_{53} = 1 - (-6) + (-1) = +6$$

برای بهبود جواب فعلی براساس  $\bar{c}_{ij}$  های بالا دو راه حل پیش روی ماست:

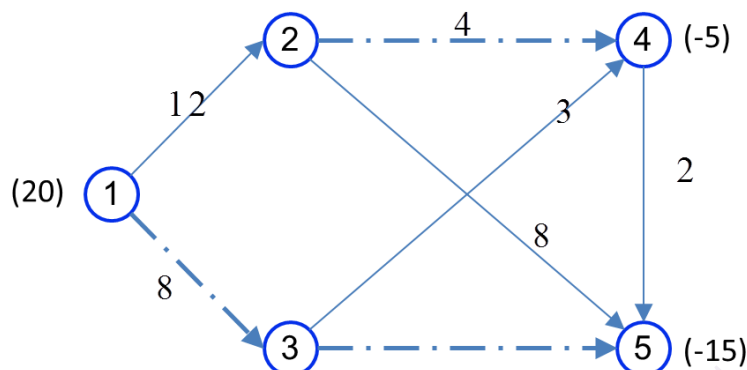
۱- افزایش جریان کمانی که هزینه  $\bar{c}_{ij}$  منفی دارد و اکنون در کران پایین خود است.

۲- کاهش متغیری که هزینه  $\bar{c}_{ij}$  مثبت دارد و اکنون در کران بالای خود قرار دارد.

باتوجه به این دو حالت، تنها کاندید، کمان  $(4,5)$  است. در شکل زیر، کمان  $(4,5)$  به شکل اضافه شد تا مشخص شود کدام کمان باید از جواب اساسی خارج شود.



مقدار  $\theta$  تا ۲ می تواند افزایش یابد که در این صورت کمان (2,4) به حد بالای خود می رسد و از جواب اساسی خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود:



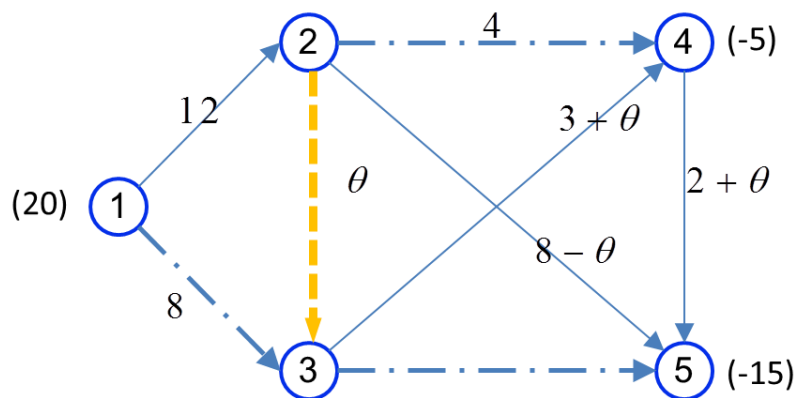
مقدار مضربهای  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  می تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر می شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -3; y_4 = -4; y_5 = -6$$

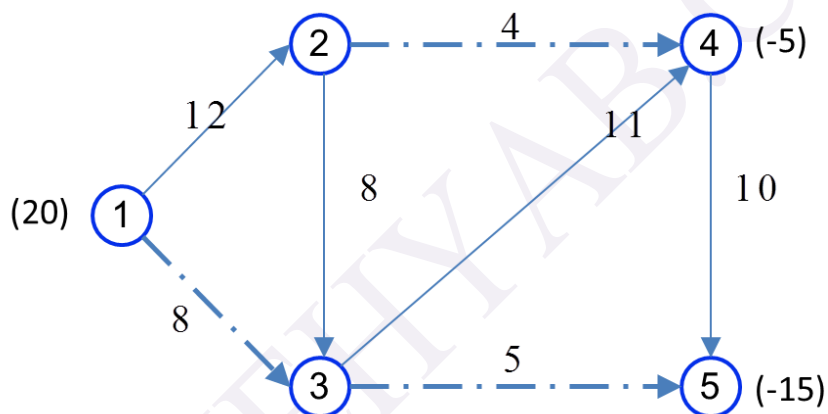
هزینه های  $\overline{c_{ij}}$  برای تعیین کمان ورودی به جواب اساسی و کمان خروجی از جواب اساسی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\overline{c_{13}} &= 4 - 4 + (-3) = -3 \\ \overline{c_{23}} &= 2 - 0 + (-3) = -1 \\ \overline{c_{35}} &= 3 - (-3) + (-6) = 0 \\ \overline{c_{24}} &= 2 - (0) + (-4) = -2 \\ \overline{c_{53}} &= 1 - (-6) + (-3) = +4\end{aligned}$$

در این مرحله کمان (2,3) وارد جواب اساسی می شود. برای خروج کمان خروجی به صورت زیر عمل می شود.



مقدار  $\theta$  تا ۸ می تواند افزایش یابد که در این صورت کمان (2,5) از جواب اساسی خارج می شود و لذا جواب اساسی به صورت زیر می شود.



براساس جواب اساسی فوق، ضربها محاسبه می شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -2; y_4 = -3; y_5 = -5$$

با توجه به ضربهای فوق، مقدار هزینه  $\bar{c}_{ij}$  به صورت زیر می شود:

$$\bar{c}_{13} = 4 - 4 + (-2) = -2$$

$$\bar{c}_{25} = 6 - 0 + (-5) = +1$$

$$\bar{c}_{35} = 3 - (-2) + (-5) = 0$$

$$\bar{c}_{24} = 2 - (0) + (-3) = -1$$

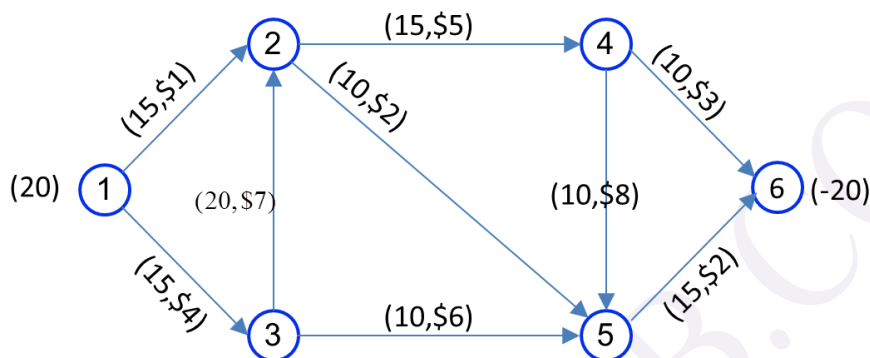
$$\bar{c}_{53} = 1 - (-5) + (-2) = +4$$



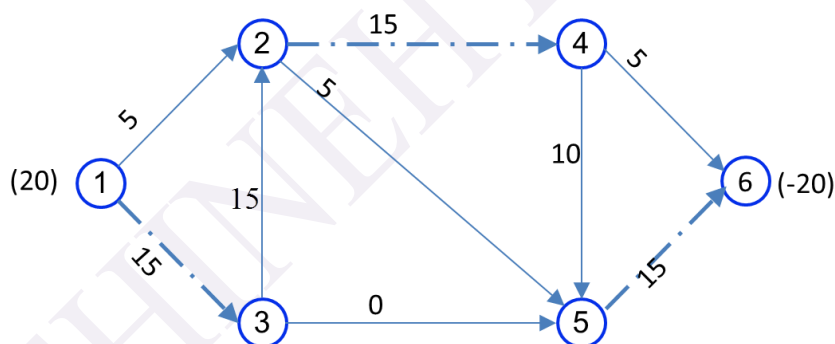
چون همه هزینه‌های  $\overline{c_{ij}}$  منفی برای متغیرهای غیرپایه در کران بالا و همه هزینه‌های  $\overline{c_{ij}}$  مثبت برای متغیرهای غیرپایه در کران پایین خود هستند، لذا جواب فوق، جواب بهینه است.

**تمرین:** مسئله جریان کمینه در شبکه زیر را با استفاده از روش سیمپلکس در شبکه حل نمایید. برای

جواب اولیه از درخت داده شده استفاده کنید.



جواب اولیه:



**حل:** مقدار تابع هدف برای جواب اولیه فوق برابر با ۳۸۰ است. با فرض  $y_2 = 0$ ، می‌توان ضرایب  $y_i$

ها را براساس  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  محاسبه می‌کنیم.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -2$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 0 \rightarrow y_4 = 6$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = 3$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

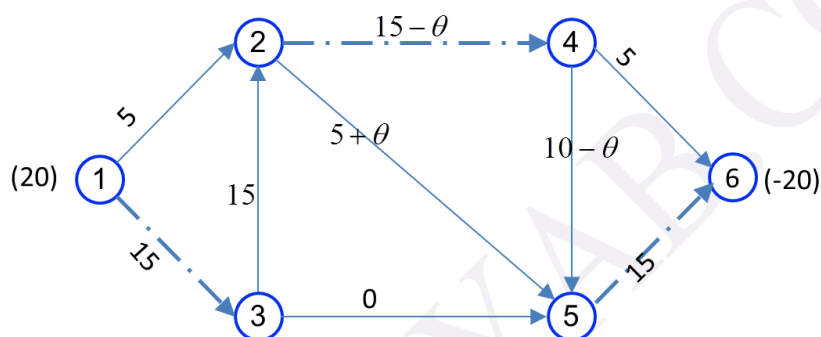
$$\bar{c}_{13} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

$$\bar{c}_{35} = 6 - y_3 + y_5 = 6 - 7 + (-2) = -3$$

$$\bar{c}_{24} = 5 - y_2 + y_4 = 5 - 0 + 6 = 11$$

$$\bar{c}_{56} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 2 + 3 = 7$$

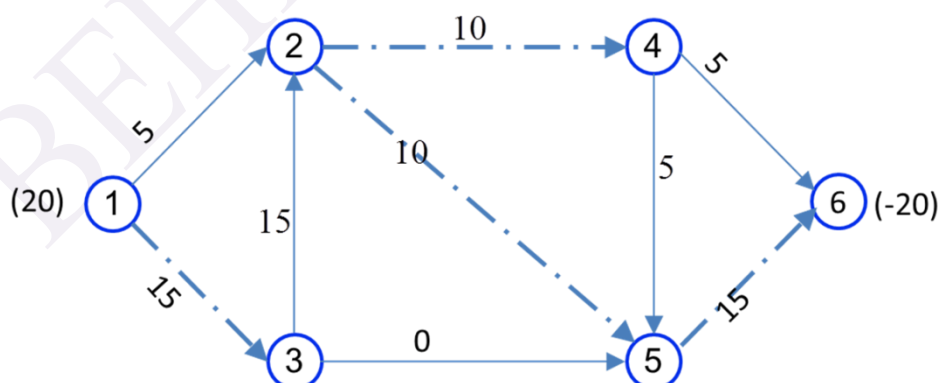
هر چهار کمان امکان ورود به جواب اساسی را دارد. متغیر  $(2,4)$  انتخاب می‌شود. نحوه یافتن متغیر خروجی به صورت زیر انجام می‌شود.



$$5 + \theta \leq 10; 10 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta_{\max} = 5$$

لذا کمان  $(2,5)$  با رسیدن به حد بالا، از کمان‌های اساسی خارج می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به

صورت زیر می‌شود.



در این جواب، مقدار تابع هدف برابر با ۲۹۵ است.

مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  می‌تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای

متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -13$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

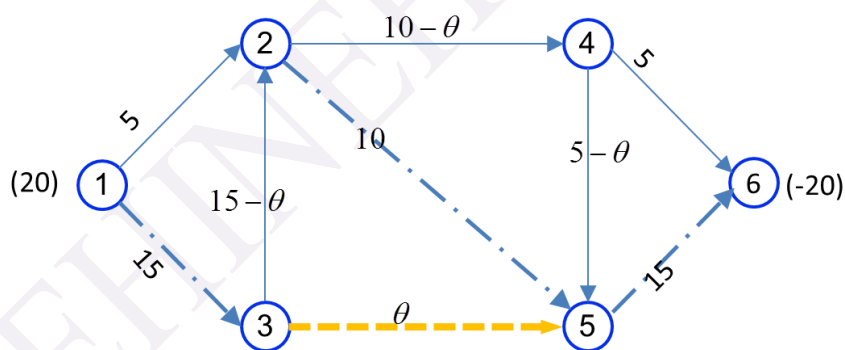
$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 6 - 7 + (-13) = -14$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 - 13 = -11$$

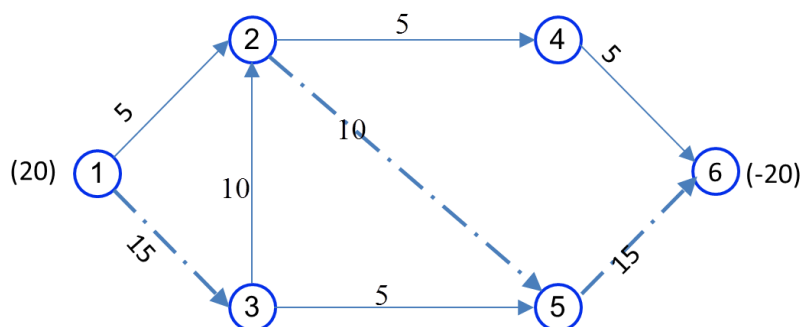
$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 13 - 8 = 7$$

کمان (3,5) می‌تواند وارد جواب‌های اساسی می‌شود.



با  $\theta = 5$ ، کمان (4,5) از پایه خارج می‌شود و کمان (3,5) وارد جواب پایه می‌شود. با این تغییر جواب

فعلی به صورت زیر می‌شود.



برای جواب اساسی فوق، مقدار تابع هدف برابر با ۲۵۵ است. مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض

$y_2 = 0$  می‌تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 1$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

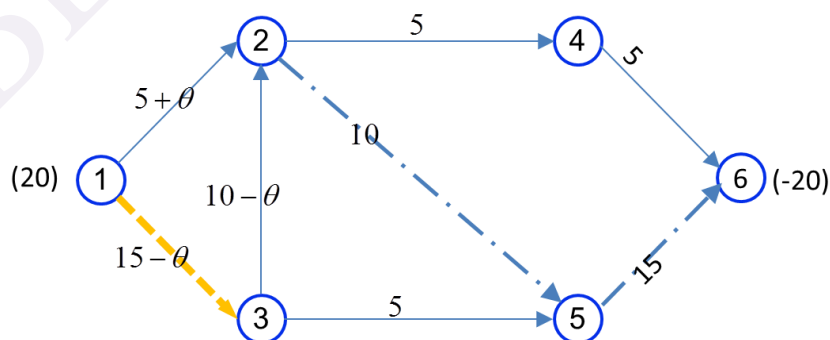
$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 + 1 = 3$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 + 1 = 14$$

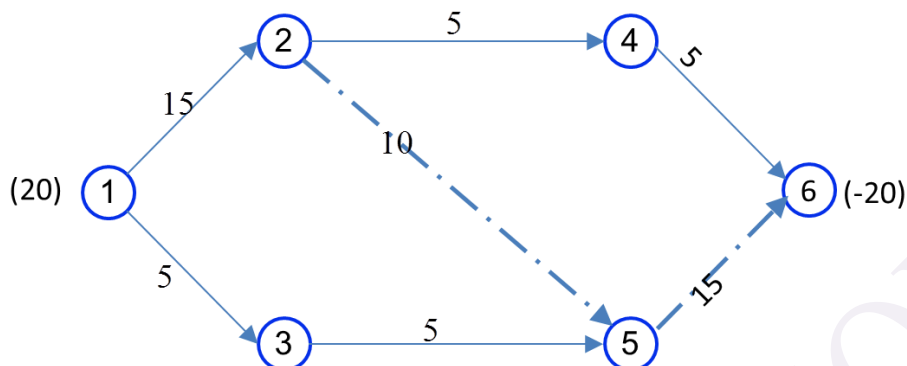
$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 2 - 1 - 8 = -7$$

کمان (1,3) وارد پایه می‌شود. برای یافتن کمان خروجی به صورت زیر عمل می‌کنیم.



با  $\theta = 10$ ، کمان (3,2) از جواب‌های اساسی خارج می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر

می‌شود.



مقدار تابع هدف جواب اساسی فوق برابر با ۱۵۵ است. برای کنترل بهینگی، مقدار مضرب‌های  $y_i$  با

توجه به فرض  $y_2 = 0$  از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -3$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -5$$

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

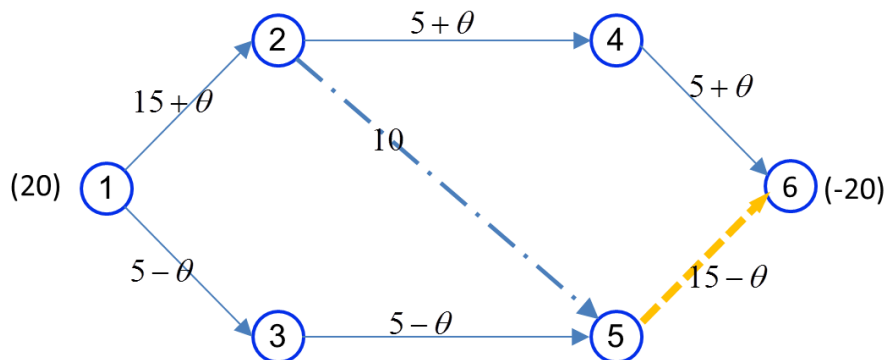
$$\overline{c_{32}} = 7 - y_1 + y_3 = 7 + 3 + 0 = 10$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 - 9 = -7$$

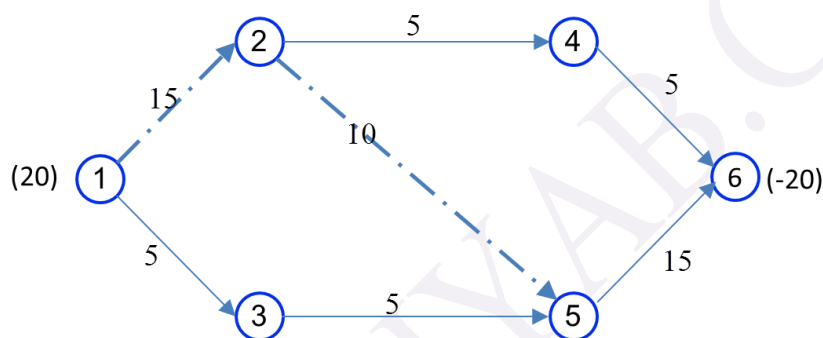
$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 - 9 = 4$$

$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 9 - 8 = 3$$

کمان (5,6) وارد پایه می‌شود. کمان خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود.



با  $\theta = 0$ ، کمان  $(1,2)$  از جواب‌های اساسی خارج می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود.



مقدار تابع هدف جواب اساسی فوق برابر با ۱۵۵ است. برای کنترل بهینگی، مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 0 \rightarrow y_5 = -6$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_3 = 0$$

$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_1 = 4$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = -3$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 7$$

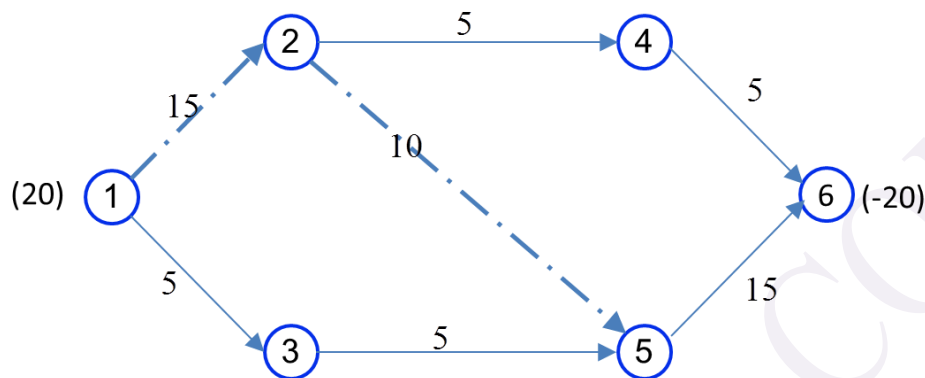
$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = -4$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 - 6 = 7$$

شرط بهینگی برقرار است لذا به جواب بهینه رسیدیم.

**توجه:** به دلیل این که در گام فعلی  $\theta = 0$  شد، به این معنا است که جواب تباهیده داریم و در گام

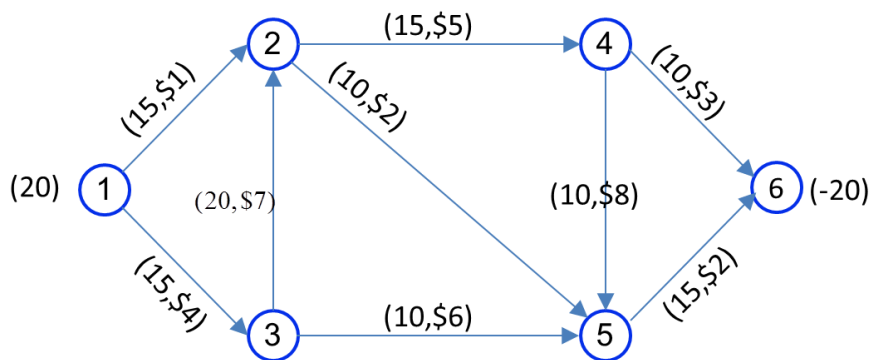
آخر بهبودی در مقدار تابع هدف اتفاق نیافتاده است. جواب بهینه به صورت زیر است.



### ایجاد یک جواب اساسی موجه اولیه

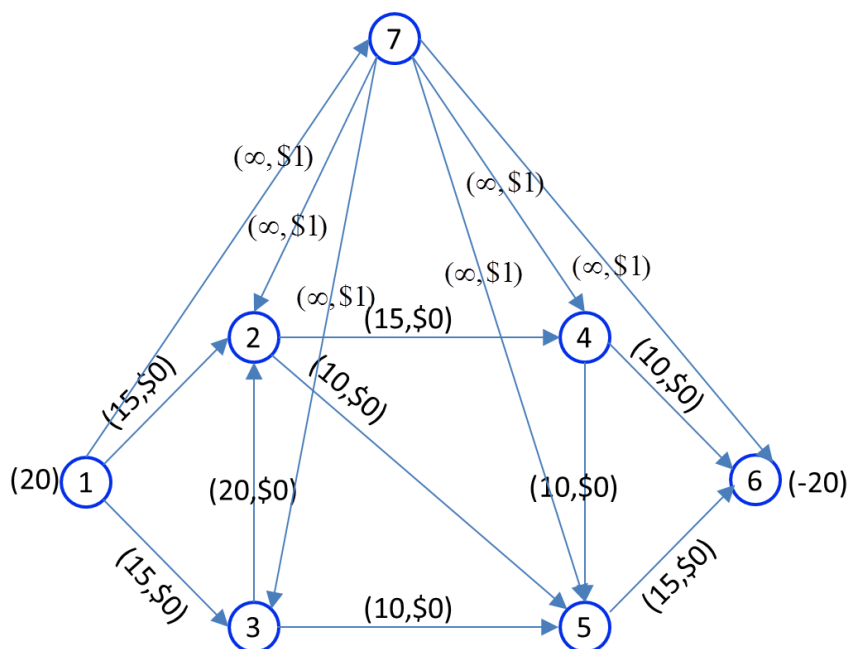
در مثال قبلی، جواب اساسی موجه اولیه به صورت پیش فرض داده شده بود. اما همیشه به این صورت نخواهد بود بدست آوردن چنین جوابی به خصوص برای شبکه های بزرگ به راحتی نخواهد بود. در این بخش به ارایه یک روش برای بدست آوردن یک جواب اولیه موجه اساسی خواهیم پرداخت. برای این منظور یک گره مصنوعی یا *Artificial Node* ایجاد می شود و آن را  $V_{n+1}$  می نامیم. اگر یک گره مانده  $i$  دارای عرضه باشد، از  $i$  به  $V_{n+1}$  یک کمان با هزینه یک در نظر می گیریم. اگر یک گره مانند  $i$  دارای تقاضا یا بدون عرضه یا تقاضا (به عبارت گره میانی) باشد، از گره  $V_{n+1}$  به  $i$  یک کمان با هزینه 1 (یک) ایجاد می کنیم. در انتها هزینه کمان های اولیه شبکه را برابر صفر لحاظ می کنیم. برای این شبکه، الگوریتم سیمپلکس را اجرا کرده تا مقدار تابع هدف بهینه برابر صفر شود که در این صورت به یک جواب اساسی موجه ابتدایی رسیده ایم و می توان با این جواب الگوریتم سیمپلکس را برای شبکه اولیه آغاز کرد.

مثال: برای شبکه زیر، یک جواب اساسی موجه اولیه بدست آورید.



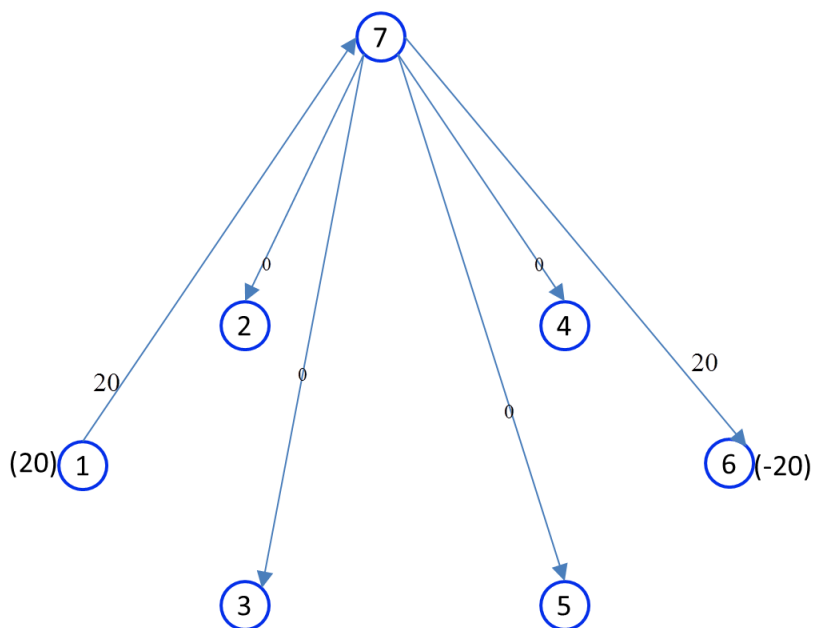
گره مصنوعی ۷ را ایجاد کرده و از گره ۱ به ۷ و از ۷ به سایر گره های یک کمان با هزینه ۱ در نظر می

گیریم.



جواب اساسی ابتدایی به صورت شکل زیر است:





با فرض  $y_7=0$  می توان ضرایب  $y_i$  را براساس  $c_{ij}-y_i+y_j=0$  بدست آورد.

$$\overline{c_{17}} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{72}} = 1 - y_7 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = -1$$

$$\overline{c_{73}} = 1 - y_7 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -1$$

$$\overline{c_{74}} = 1 - y_7 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -1$$

$$\overline{c_{75}} = 1 - y_7 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\overline{c_{76}} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{12}} = 0 - y_1 + y_2 = -2 \Leftarrow$$

$$\overline{c_{13}} = 0 - y_1 + y_3 = -2$$

$$\overline{c_{32}} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\overline{c_{24}} = 0 - y_2 + y_4 = 0$$

$$\overline{c_{25}} = 0 - y_2 + y_5 = 0$$

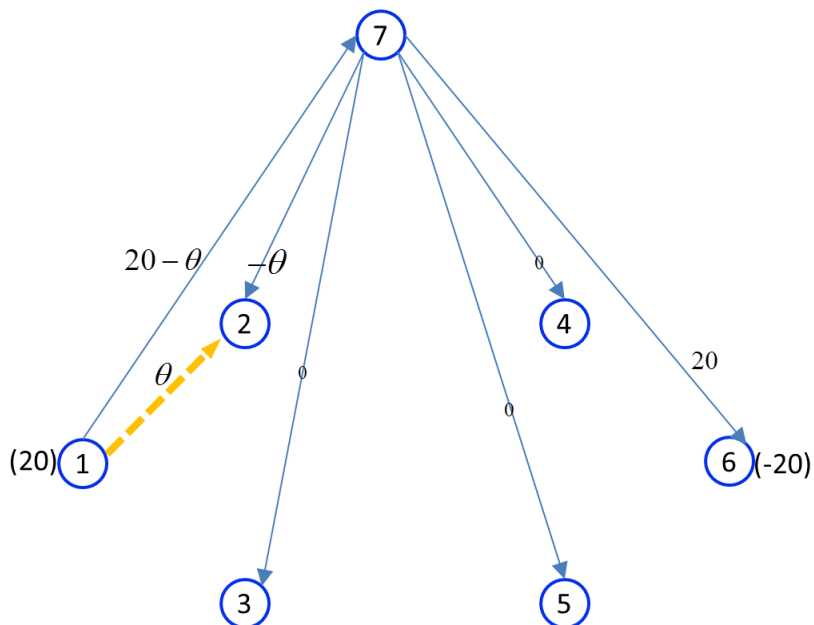
$$\overline{c_{35}} = 0 - y_3 + y_5 = 0$$

$$\overline{c_{45}} = 0 - y_4 + y_5 = 0$$

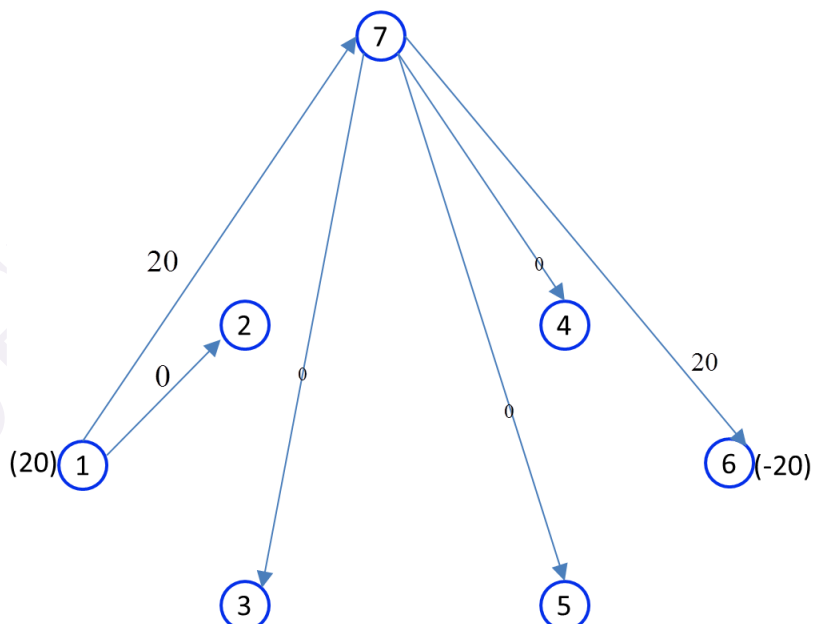
$$\overline{c_{46}} = 0 - y_4 + y_6 = 0$$

$$\overline{c_{56}} = 0 - y_5 + y_6 = 0$$

چون کمان (1,2) در حد پایین و  $\bar{c}_{ij} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان خروجی از پایه به صورت زیر انجام می شود.



کمان (7,2) از پایه خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود.



در این تکرار مقدار تابع هدف برابر ۴۰ است.

با فرض  $y_7=0$  می توان ضرایب  $y_i$  را براساس  $c_{ij}-y_i+y_j=0$  بدست آورد.

$$\bar{c}_{17} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\bar{c}_{12} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{c}_{73} = 1 - y_7 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -1$$

$$\bar{c}_{74} = 1 - y_7 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -1$$

$$\bar{c}_{75} = 1 - y_7 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\bar{c}_{76} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\bar{c}_{72} = 1 - y_7 + y_2 = 2$$

$$\bar{c}_{13} = 1 - y_1 + y_3 = -2 \Leftarrow$$

$$\bar{c}_{32} = 0 - y_3 + y_2 = 2$$

$$\bar{c}_{24} = 0 - y_2 + y_4 = -2$$

$$\bar{c}_{25} = 0 - y_2 + y_5 = -2$$

$$\bar{c}_{35} = 0 - y_3 + y_5 = 0$$

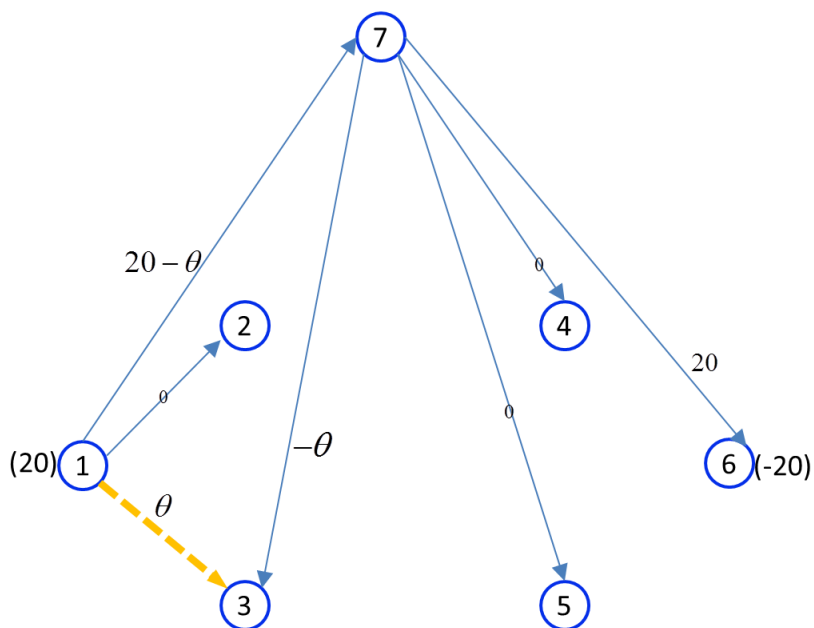
$$\bar{c}_{45} = 0 - y_4 + y_5 = 0$$

$$\bar{c}_{46} = 0 - y_4 + y_6 = 0$$

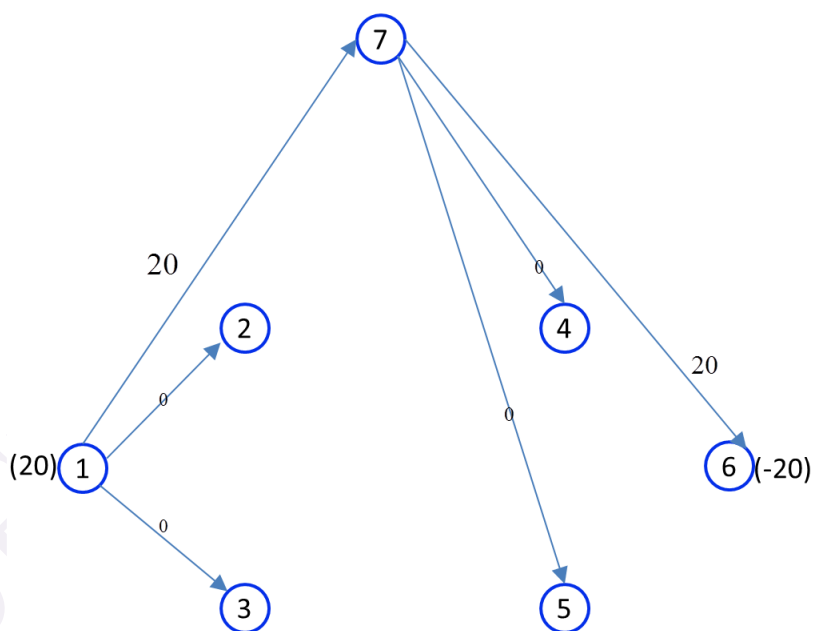
$$\bar{c}_{56} = 0 - y_5 + y_6 = 0$$

چون کمان (1,3) در حد پایین و  $\bar{c}_{ij} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان خروجی از پایه

به صورت زیر انجام می شود.



کمان (7,3) از پایه خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود.



مقدار تابع هدف در این تکرار برابر ۴۰ است.

با فرض  $v_7=0$  می توان ضرایب  $v_i$  را براساس  $c_{ij}-v_i+v_j=0$  بدست آورد.

$$\bar{c}_{17} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\bar{c}_{12} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{c}_{13} = 0 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 1$$

$$\bar{c}_{74} = 1 - y_7 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -1$$

$$\bar{c}_{75} = 1 - y_7 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\bar{c}_{76} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\bar{c}_{72} = 1 - y_7 + y_2 = 2$$

$$\bar{c}_{73} = 1 - y_7 + y_3 = 2$$

$$\bar{c}_{32} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\bar{c}_{24} = 0 - y_2 + y_4 = -2 \Leftarrow$$

$$\bar{c}_{25} = 0 - y_2 + y_5 = -2$$

$$\bar{c}_{35} = 0 - y_3 + y_5 = -2$$

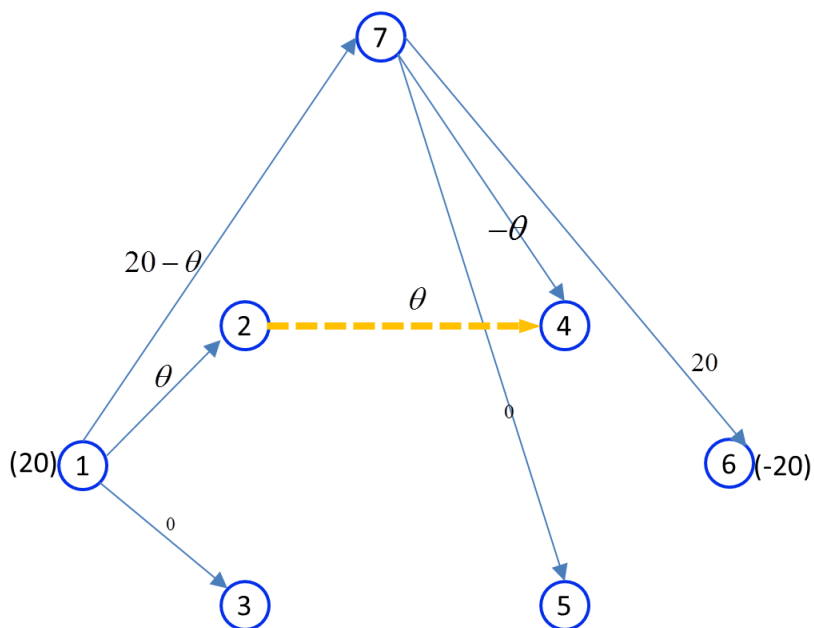
$$\bar{c}_{45} = 0 - y_4 + y_5 = 0$$

$$\bar{c}_{46} = 0 - y_4 + y_6 = 0$$

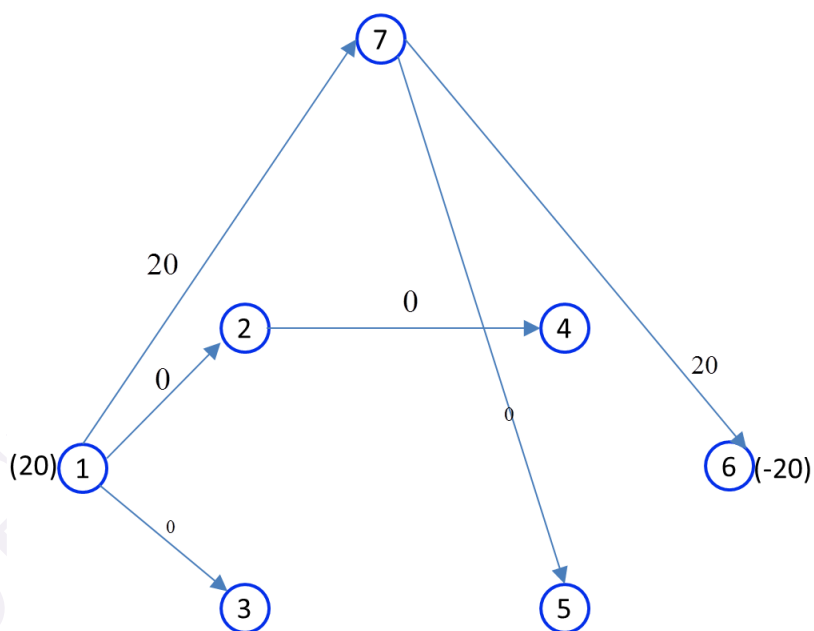
$$\bar{c}_{56} = 0 - y_5 + y_6 = 0$$

چون کمان (2,4) در حد پایین و  $\bar{c}_{ij} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان خروجی از پایه

به صورت زیر انجام می شود.



کمان (7,4) از پایه خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود.



با فرض  $\gamma_7=0$  می توان ضرایب  $\gamma_i$  را براساس  $c_{ij}-\gamma_i+\gamma_j=0$  بدست آورد.

$$\bar{c}_{12} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{c}_{13} = 0 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 1$$

$$\bar{c}_{24} = 0 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = 1$$

$$\bar{c}_{17} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\bar{c}_{75} = 1 - y_7 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\bar{c}_{76} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\bar{c}_{74} = 1 - y_7 + y_4 = 2$$

$$\bar{c}_{75} = 1 - y_7 + y_5 = 0$$

$$\bar{c}_{76} = 1 - y_7 + y_6 = 0$$

$$\bar{c}_{32} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\bar{c}_{25} = 0 - y_2 + y_5 = -2$$

$$\bar{c}_{35} = 0 - y_3 + y_5 = -2$$

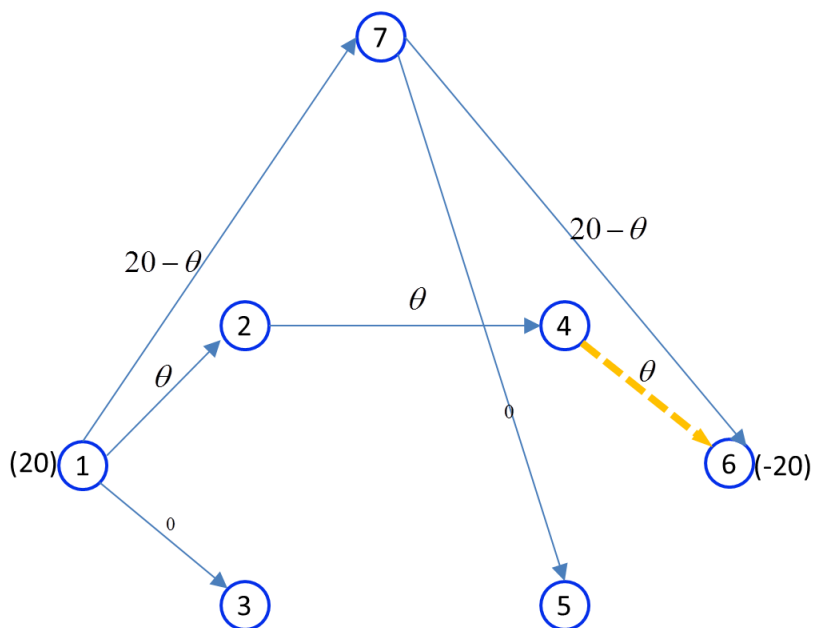
$$\bar{c}_{43} = 0 - y_4 + y_3 = 0$$

$$\bar{c}_{46} = 0 - y_4 + y_6 = -2 \Leftarrow$$

$$\bar{c}_{56} = 0 - y_5 + y_6 = 0$$

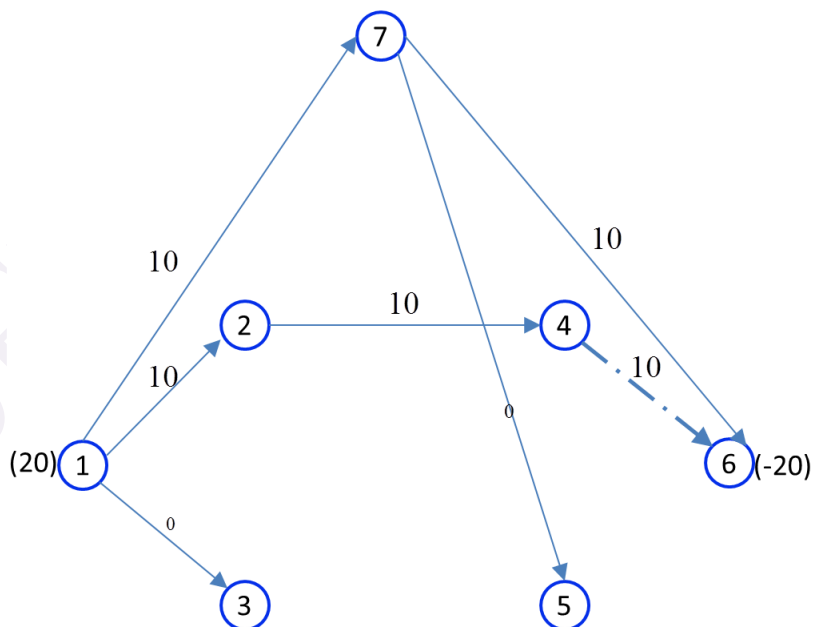
چون کمان (4,6) در حد پایین و  $\bar{c}_{ij} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان خروجی از پایه

به صورت زیر انجام می شود.



$$\text{Max } \theta = \text{Min} \{15, 15, 10, 20\} = 10$$

با  $\theta = 10$  ، کمان  $(4,6)$  وارد پایه می شود و بلافاصله به حد بالای خود می رسد و از پایه خارج می شود. با این تغییر جواب فعلی به صورت زیر می شود. مقدار تابع هدف در این تکرار برابر ۲۰ است.



با فرض  $v_7 = 0$  می توان ضرایب  $v_i$  را براساس  $c_{ij} - v_i + v_j = 0$  بدست آورد.



$$\overline{c_{12}} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\overline{c_{13}} = 0 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 1$$

$$\overline{c_{24}} = 0 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = 1$$

$$\overline{c_{17}} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{75}} = 1 - y_7 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\overline{c_{76}} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{74}} = 1 - y_7 + y_4 = 2$$

$$\overline{c_{75}} = 1 - y_7 + y_5 = 0$$

$$\overline{c_{76}} = 1 - y_7 + y_6 = 0$$

$$\overline{c_{32}} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\overline{c_{25}} = 0 - y_2 + y_5 = -2$$

$$\overline{c_{35}} = 0 - y_3 + y_5 = -2 \leftarrow$$

$$\overline{c_{43}} = 0 - y_4 + y_3 = 0$$

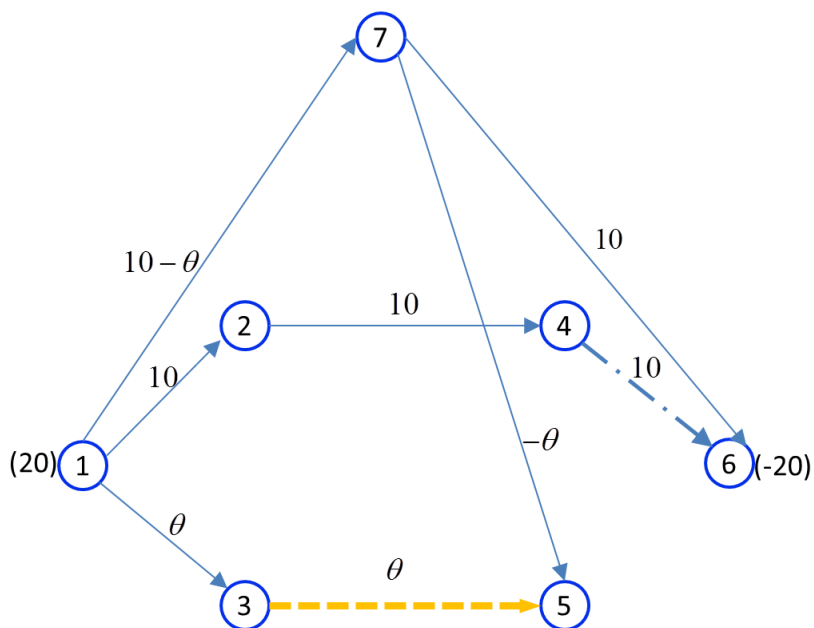
$$\overline{c_{46}} = 0 - y_4 + y_6 = -2$$

$$\overline{c_{56}} = 0 - y_5 + y_6 = 0$$

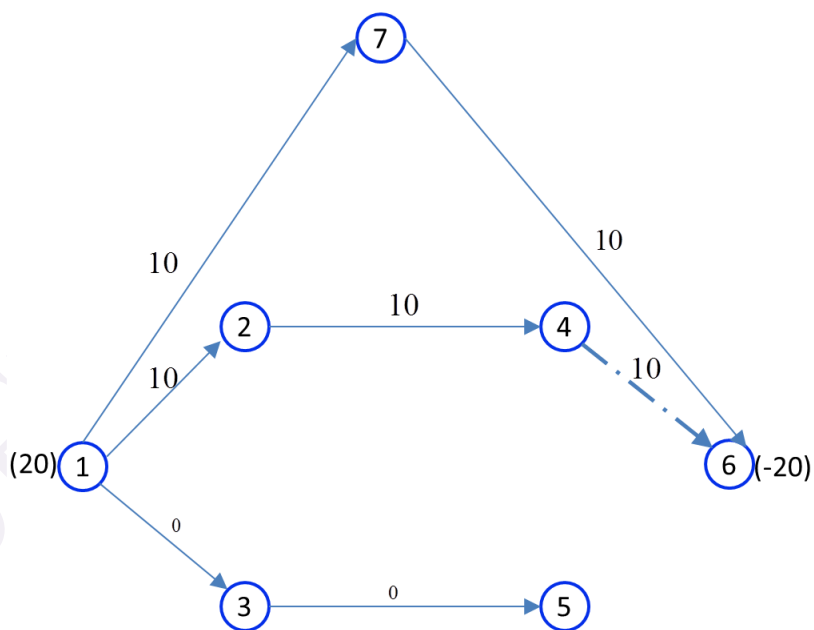
چون کمان (4,6) در حد بالای خود است و  $\overline{c_{ij}} < 0$  لذا شرایط بهینگی را دارد. چون کمان (3,5) در

حد پایین خود قرار دارد و  $\overline{c_{ij}} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان خروجی از پایه به صورت

زیر انجام می شود.



کمان (7,5) از پایه خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود. مقدار تابع هدف در این تکرار برابر ۲۰ است.



با فرض  $v_7=0$  می توان ضرایب  $v_i$  را براساس  $c_{ij}-v_i+v_j=0$  بدست آورد.

$$\bar{c}_{17} = 1 - y_1 + y_7 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\bar{c}_{12} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{c}_{13} = 0 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 1$$

$$\bar{c}_{35} = 0 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 1$$

$$\bar{c}_{24} = 0 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = 1$$

$$\bar{c}_{76} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\bar{c}_{72} = 1 - y_7 + y_2 = 2$$

$$\bar{c}_{73} = 1 - y_7 + y_3 = 2$$

$$\bar{c}_{74} = 1 - y_7 + y_4 = 2$$

$$\bar{c}_{75} = 1 - y_7 + y_5 = 2$$

$$\bar{c}_{32} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\bar{c}_{25} = 0 - y_2 + y_5 = 0$$

$$\bar{c}_{35} = 0 - y_3 + y_5 = 0$$

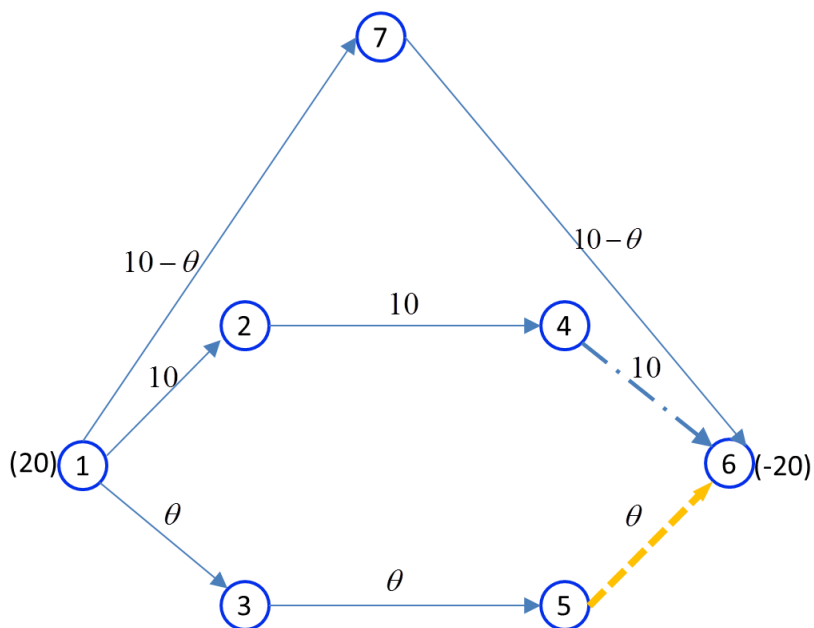
$$\bar{c}_{45} = 0 - y_4 + y_5 = 0$$

$$\bar{c}_{46} = 0 - y_4 + y_6 = -2$$

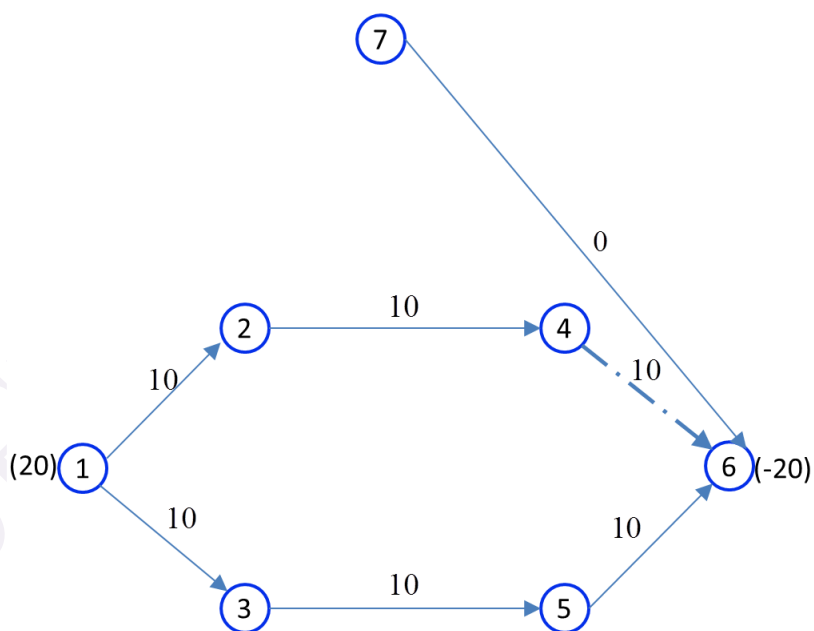
$$\bar{c}_{56} = 0 - y_5 + y_6 = -2 \leftarrow$$

چون کمان (5,6) در حد پایین خود قرار دارد و  $\bar{c}_{ij} < 0$  است، لذا وارد پایه می شود. نحوه یافتن کمان

خروجی از پایه به صورت زیر انجام می شود.



کمان  $(1,7)$  از پایه خارج می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود. مقدار تابع هدف در این تکرار برابر صفر است.



با فرض  $\gamma_7=0$  می توان ضرایب  $\gamma_i$  را براساس  $c_{ij}-\gamma_i+\gamma_j=0$  بدست آورد.

$$\overline{c_{12}} = 0 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = -1$$

$$\overline{c_{13}} = 0 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -1$$

$$\overline{c_{35}} = 0 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -1$$

$$\overline{c_{24}} = 0 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -1$$

$$\overline{c_{56}} = 0 - y_5 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

$$\overline{c_{76}} = 1 - y_7 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -1$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیر پایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{17}} = 1 - y_1 + y_7 = 2$$

$$\overline{c_{72}} = 1 - y_7 + y_2 = 2$$

$$\overline{c_{73}} = 1 - y_7 + y_3 = 2$$

$$\overline{c_{74}} = 1 - y_7 + y_4 = 2$$

$$\overline{c_{75}} = 1 - y_7 + y_5 = 2$$

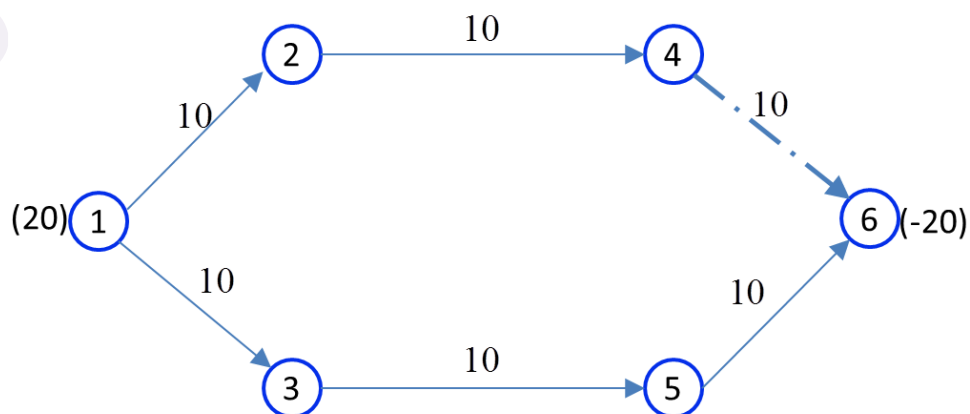
$$\overline{c_{32}} = 0 - y_3 + y_2 = 0$$

$$\overline{c_{25}} = 0 - y_2 + y_5 = 0$$

$$\overline{c_{45}} = 0 - y_4 + y_5 = 0$$

$$\overline{c_{46}} = 0 - y_4 + y_6 = -2$$

شرایط بهینگی برقرار است. لذا جواب اساسی موجه اولیه به صورت زیر خواهد بود. توجه شود با توجه به این که مقدار تابع هدف بهینه برابر صفر است، دیگر نیازی به کمان‌های مصنوعی نیست و می‌توان گره ۷ را حذف و لذا یک کمان از تعداد کمان‌های پایه حذف می‌شود و لذا کمان (7,6) از جواب پایه حذف می‌شود.



برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com) مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی [behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com) و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**