درس ۸: مسئله جریان در شبکه با کمترین هزینه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

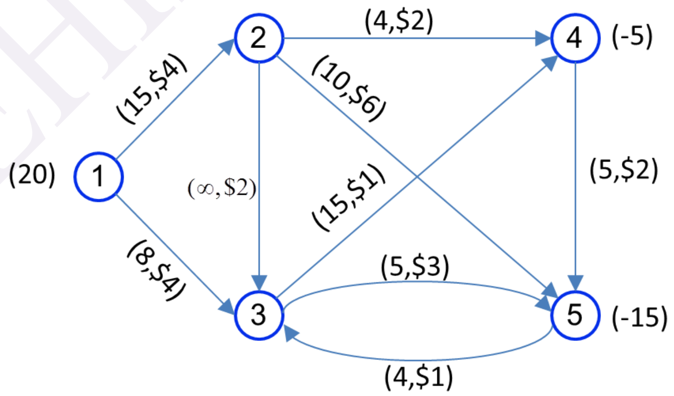
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی‌جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل‌های خاص جریان در شبکه مانند مسئله حمل‌ونقل، مسئله کوتاهترین مسیر و مسئله درخت پوشش کمینه خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی‌جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیما به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلا مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره *i* به گره *j* را به صورت *i-j* نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۴-۲)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور

هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در ان برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت $-$ نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان i-j است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Min & 4x_{12}+4x_{13}+2x_{23}+2x_{24}+6x_{25}+x_{34}+3x_{35}+2x_{45}+x_{53} \\
s.t. \\
(1) & x_{12} \; +x_{13} & & & & & & & & & =20 \\
(2) & -x_{12} & +x_{23} & +x_{24}+x_{25} & & & & & & & =0 \\
(3) & & -x_{13}-x_{23} & & +x_{34} & +x_{35} & & -x_{53} & & & =0 \\
(4) & & & -x_{24} & -x_{34} & & +x_{45} & & & & =-5 \\
(5) & & & -x_{25} & & -x_{35} & -x_{45} & +x_{53} & & & =-15
\end{array}
$$

$$x_{12}\le 15; x_{13}\le 8; x_{23}\le \infty; x_{24}\le 4; x_{25}\le 10; x_{34}\le 15; x_{35}\le 5; x_{45}\le \infty; x_{53}\le 4.$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12}+x_{13}=20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره۱($x_{12}+x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23}+x_{24}+x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱+ و ۱- اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقا در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و ۱- مربطه به گره ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به n گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

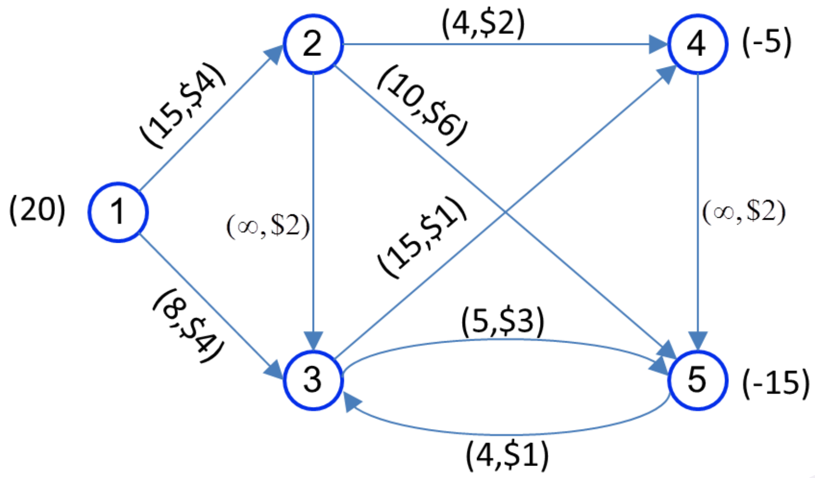
$$s.t.$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1,\dots,n$$

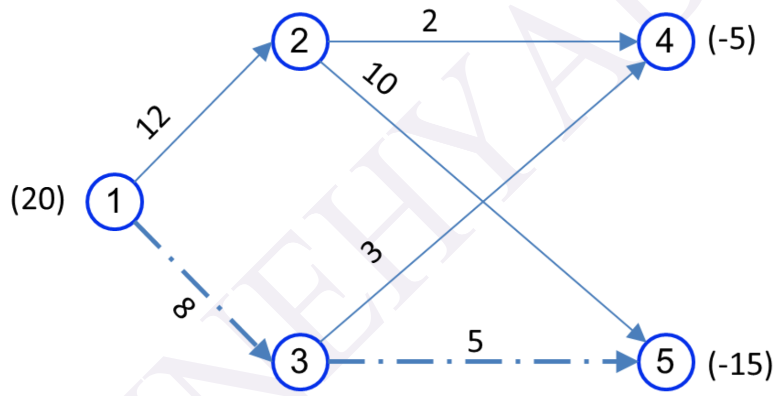
$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$$

مسئله جریان در شبکه با کمترین هزینه

در این بخش با استفاده از مفاهیم شبکه که تا کنون بیان شده است، روش سیمپلکس شبکه ارایه می‌شود. مسئله جریان در شبکه پیچیده تر از مسئله حمل‌ونقل است زیرا گره‌های واسط دارد و همچنین هر کمان ظرفیت دارد. برای حل این مسئله با استفاده از روش سیمپلکس باید یک جواب امکان پذیر داشت. تعیین جواب اولیه در مسئله شبکه کمی‌با مسئله حمل‌ونقل متفاوت است و بدست آوردن یک جواب اولیه می تواند نیاز به محاسبات زیادی داشته باشد. مثلا فرض کنید که جواب اولیه در دسترس است. بیان الگوریتم جریان در شبکه را در قالب یک مثال تشریح می‌کنیم.



در شکل روی هر کمان (A,B) قرار دارد که A نشان دهنده ظرفیت کمان و B نشان دهنده هزینه عبور یک واحد از کمان است. جواب اولیه زیر را در نظر بگیرید.



در شکل فوق، کمان ـــ . ـــ . ـــ نشان دهنده متغیرهای غیراساسی هستند که در حد بالای خود قرار دارند و کمان‌های‌ های توپر، متغیرهای پایه هستند. کمان‌های توپر درخت گسترش را برای شبکه تشکیل می‌دهد و جواب اساسی را برای مسئله می‌سازد. برای این که تعیین شود جواب فعلی یک جواب اساسی بهینه است، باید هزینه $\overline{c_{ij}}$ همه کمان‌های غیرپایه را محاسبه کرد. برای این منظور، ابتدا مضرب‌های y_i ($i=1,\dots,n$) را محاسبه می‌کنیم. اگر این مضرب‌ها در روابط زیر صدق کنند:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j \ge 0; x_{ij} = l_{ij}$$
$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j = 0; l_{ij} < x_{ij} < l_{ij}$$
$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j \le 0; x_{ij} = u_{ij}$$

آنگاه جواب اساسی فعلی، بهینه است. برای محاسبه مضرب‌ها (y_iها)، می‌توان یک مضرب را به طور دلخواه برابر صفر در نظر گرفت و مابقی مضرب‌ها را با استفاده از رابطه $c_{ij} - y_i + y_j = 0$ محاسبه کرد. مضرب‌های (y_i) به صورت زیر می‌شود.

$$y_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} (2,4) \rightarrow 0 = 2 - y_2 + y_4 \rightarrow y_4 = -2 \\ (1,2) \rightarrow 0 = 4 - y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = +4 \\ (3,4) \rightarrow 0 = 1 - y_3 + y_4 \rightarrow y_3 = -1 \\ (2,5) \rightarrow 0 = 6 - y_2 + y_5 \rightarrow y_5 = -6 \end{cases}$$

هزینه $\overline{c_{ij}}$ برای متغیرهای غیراساسی به صورت زیر می‌شود:

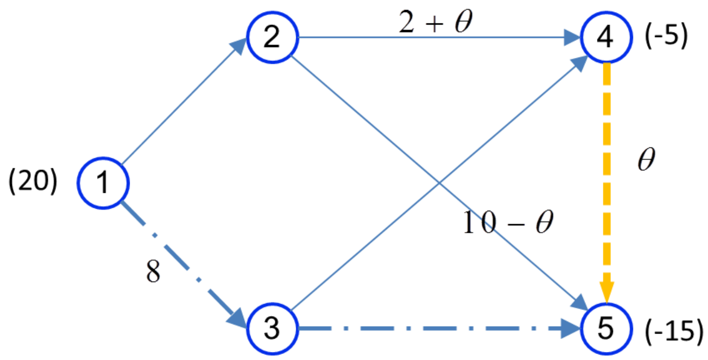
$$\begin{aligned} \overline{c_{13}} &= 4 - 4 + (-1) = -1 \\ \overline{c_{23}} &= 2 - 0 + (-1) = +1 \\ \overline{c_{35}} &= 3 - (-1) + (-6) = -2 \\ \overline{c_{45}} &= 2 - (-2) + (-6) = -2 \\ \overline{c_{53}} &= 1 - (-6) + (-1) = +6 \end{aligned}$$

برای بهبود جواب فعلی براساس $\overline{c_{ij}}$های بالا دو راه حل پیش روی ماست:

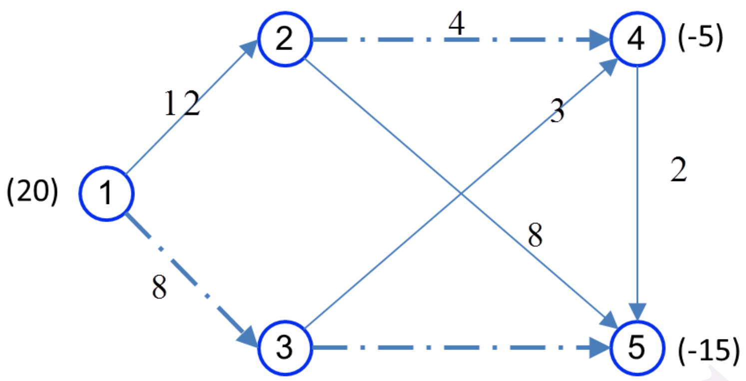
۱- افزایش جریان کمانی که هزینه $\overline{c_{ij}}$ منفی دارد و اکنون در کران پایین خود است.

۲- کاهش متغیری که هزینه $\overline{c_{ij}}$ مثبت دارد و اکنون در کران بالای خود قرار دارد.

باتوجه به این دو حالت، تنها کاندید، کمان (۴,۵) است. در شکل زیر، کمان (۴,۵) به شکل اضافه شد تا مشخص شود کدام کمان باید از جواب اساسی خارج شود.



مقدار θ تا ۲ می‌تواند افزایش یابد که در این صورت کمان (۲,۴) به حد بالای خود می‌رسد و از جواب اساسی خارج می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود:



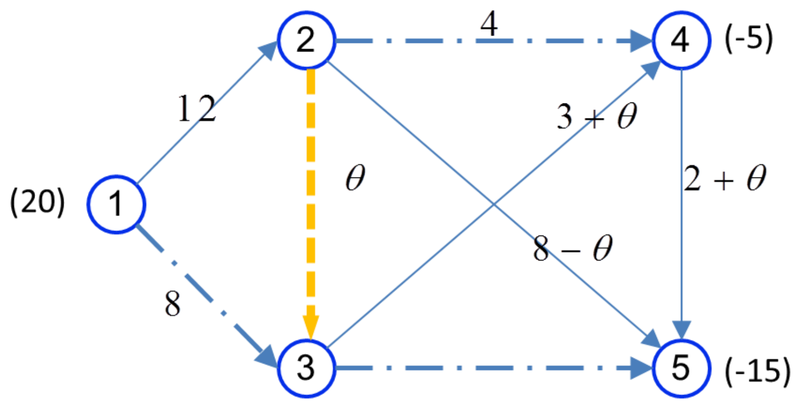
مقدار مضرب‌های y_i با توجه به فرض $y_2 = 0$ می‌توانند از معادلات $c_{ij} - y_i + y_j = 0$ برای متغیرهای اساسی به صورت زیر می‌شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -3; y_4 = -4; y_5 = -6$$

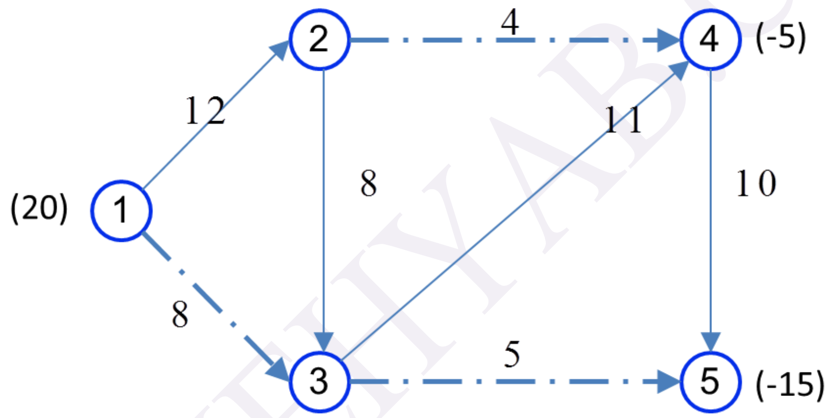
هزینه‌های $\overline{c_{ij}}$ برای تعیین کمان ورودی به جواب اساسی و کمان خروجی از جواب اساسی به صورت زیر است.

$$\overline{c_{13}} = 4 - 4 + (-3) = -3$$
$$\overline{c_{23}} = 2 - 0 + (-3) = -1$$
$$\overline{c_{35}} = 3 - (-3) + (-6) = 0$$
$$\overline{c_{24}} = 2 - (0) + (-4) = -2$$
$$\overline{c_{53}} = 1 - (-6) + (-3) = +4$$

در این مرحله کمان (۲,۳) وارد جواب اساسی می‌شود. برای خروج کمان خروجی به صورت زیر عمل می‌شود.



مقدار θ تا ۸ می‌تواند افزایش یابد که در این صورت کمان (۲،۵) از جواب اساسی خارج می‌شود و لذا جواب اساسی به صورت زیر می‌شود.



براساس جواب اساسی فوق، مضرب‌ها محاسبه می شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -2; y_4 = -3; y_5 = -5$$

با توجه به مضرب‌های فوق، مقدار هزینه $\overline{c_{ij}}$ به صورت زیر می‌شود:

$$\overline{c_{13}} = 4 - 4 + (-2) = -2$$
$$\overline{c_{25}} = 6 - 0 + (-5) = +1$$
$$\overline{c_{35}} = 3 - (-2) + (-5) = 0$$
$$\overline{c_{24}} = 2 - (0) + (-3) = -1$$
$$\overline{c_{53}} = 1 - (-5) + (-2) = +4$$

چون همه هزینه‌های $\overline{c_{ij}}$ منفی برای متغیرهای غیرپایه در کران بالا و همه هزینه‌های $\overline{c_{ij}}$ مثبت بـرای متغیرهای غیرپایه در کران پایین خود هستند، لذا جواب فوق، جواب بهینه است.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**