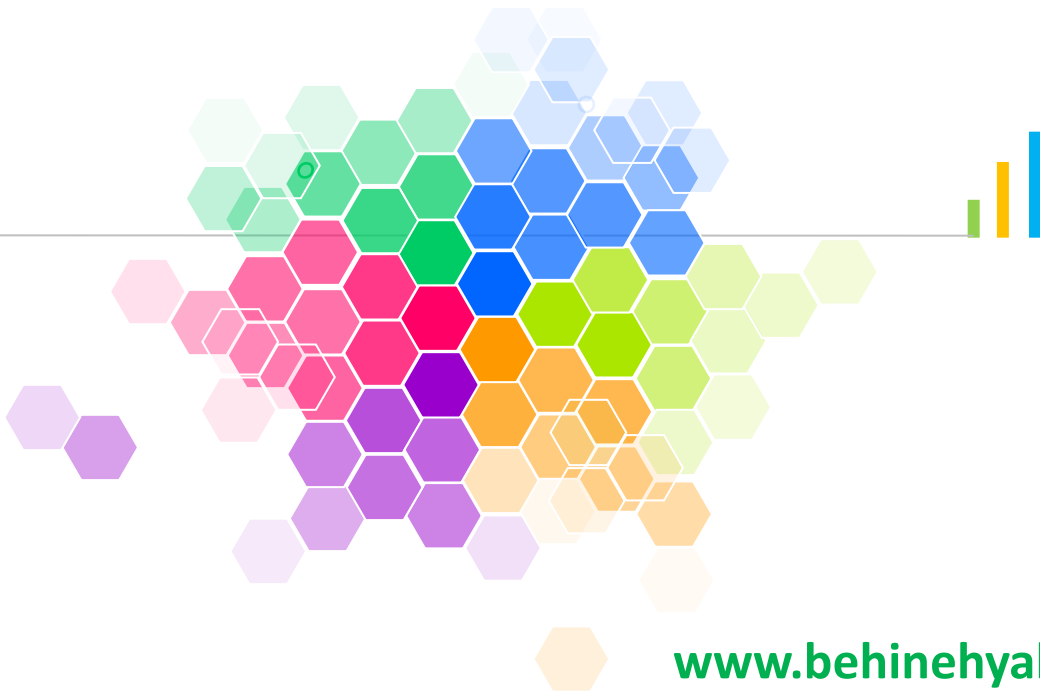


به نام خدا



# درس ۸: مسئله جریان با هزینه کمینه در شبکه



# فهرست مطالب



مسئله عمومی جریان در شبکه

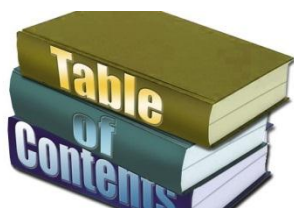
۱

الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

۲

تمرین

۳



## مسئله عمومی جریان در شبکه

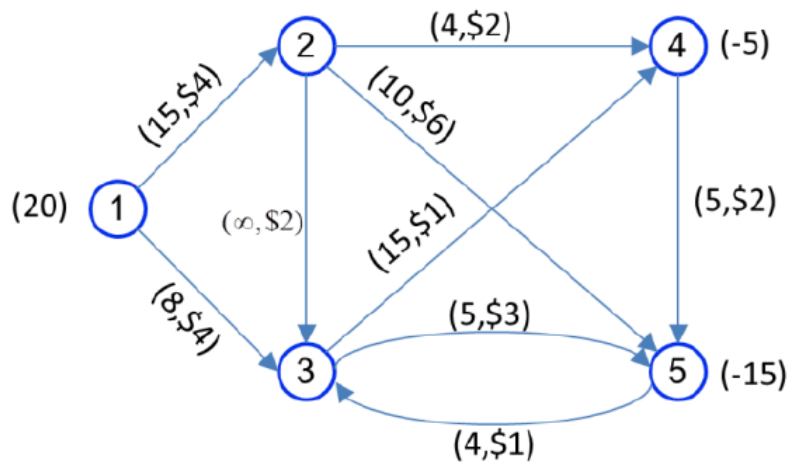
تا کنون به بررسی مسئله برنامه ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله حمل و نقل که حالت خاصی از مسئله جریان در شبکه است، خواهیم پرداخت.

### مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل و نقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

# مسئله عمومی جریان در شبکه

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد.



در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه ریزی خطی، فرض کنید:

$x_{ij}$  : تعداد واحدهای حمل شده از گره  $i$  به گره  $j$  با استفاده از کمان  $i-j$  است.

# مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل برنامه ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می شود.

$$\text{Min} \quad 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53}$$

*s.t.*

$$(1) \quad x_{12} + x_{13} = 20$$

$$(2) \quad -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0$$

$$(3) \quad -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0$$

$$(4) \quad -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5$$

$$(5) \quad -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15$$

$$x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4.$$

## مسئله عمومی جریان در شبکه

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می کند که جریان خروجی از گره ۱ ( $x_{12} + x_{13}$ )، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می کند که جریان ورودی به گره ۲ ( $x_{12}$ ) برابر جریان خروجی از گره ۲ ( $x_{23} + x_{24} + x_{25}$ ) است.

## مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان  $x_{ij}$  در معادلات توازن فقط ضریب ۰، +۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقاً در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب +۱ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و -۱ مربوط به گره ای که به آن وارد می‌شوند.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

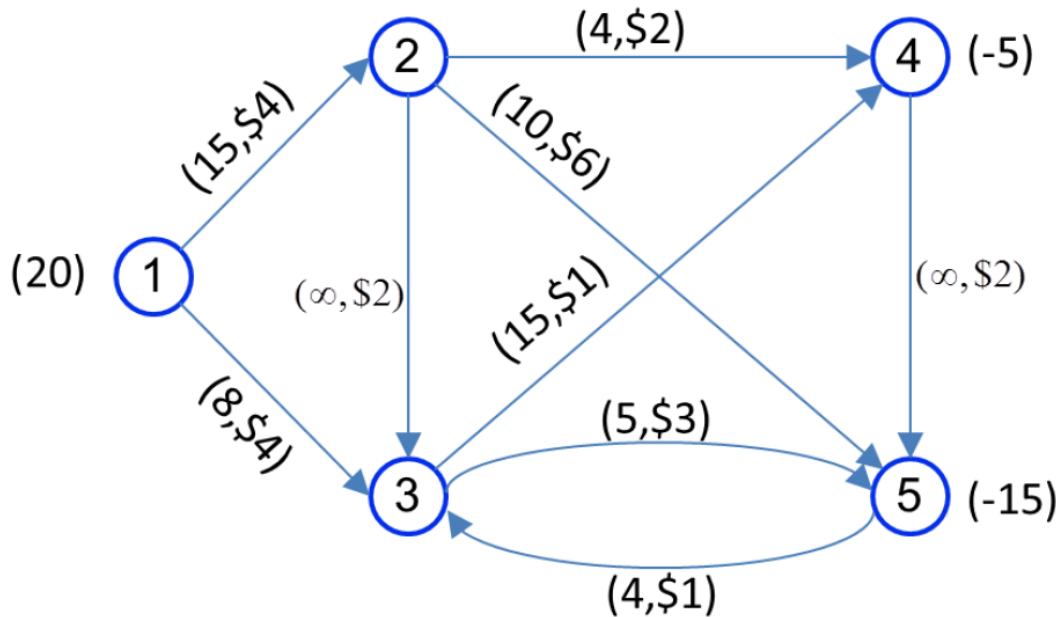
*s.t.*

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

مسئله جریان در شبکه پیچیده تر از مسئله حمل و نقل است زیرا گره‌های واسط دارد و همچنین هر کمان ظرفیت دارد. برای حل این مسئله با استفاده از روش **سیمپلکس** باید یک **جواب امکان پذیر** داشت. فرض کنید که جواب اولیه در دسترس است. بیان الگوریتم جریان در شبکه را در قالب یک مثال تشریح می‌کنیم.

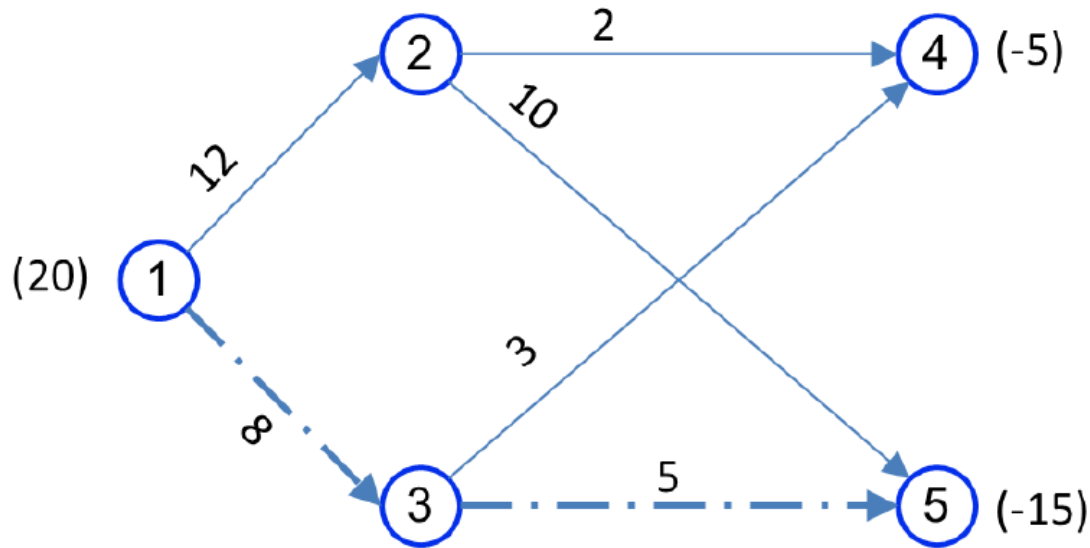


در شکل فوق، روی هر کمان  $(A,B)$  قرار دارد که  $A$  نشان دهنده **ظرفیت کمان** و  $B$  نشان دهنده **هزینه عبور** یک واحد از کمان است.



# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

جواب اولیه زیر را در نظر بگیرید.



در شکل فوق، کمان  $---$  نشان دهنده متغیرهای غیر اساسی هستند که در حد بالای خود قرار دارند و کمان‌های توپر، متغیرهای اساسی هستند. کمان‌های توپر درخت گسترش را برای شبکه تشکیل می‌دهد و جواب اساسی را برای مسئله می‌سازد.

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

برای کنترل این که جواب فعلی یک جواب اساسی بهینه است، باید هزینه  $\overline{c_{ij}}$  همه کمان‌های غیرپایه را محاسبه کرد.

اگر روابط زیر صدق کنند:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j \geq 0; x_{ij} = l_{ij}$$

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j = 0; l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$$

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j \leq 0; x_{ij} = u_{ij}$$

آنگاه جواب اساسی فعلی، **بهینه** است.

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

برای محاسبه مضرب‌ها  $(y_i)$ ، می‌توان یک مضرب را به طور دلخواه برابر **صفر** در نظر گرفت و مابقی مضرب‌ها را با استفاده از رابطه  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  محاسبه کرد.

$$y_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} (2,4) \rightarrow 0 = 2 - y_2 + y_4 \rightarrow y_4 = -2 \\ (1,2) \rightarrow 0 = 4 - y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = +4 \\ (3,4) \rightarrow 0 = 1 - y_3 + y_4 \rightarrow y_3 = -1 \\ (2,5) \rightarrow 0 = 6 - y_2 + y_5 \rightarrow y_5 = -6 \end{cases}$$

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

هزینه  $\bar{c}_{ij}$  برای متغیرهای غیراساسی به صورت زیر می‌شود:

$$\bar{c}_{13} = 4 - 4 + (-1) = -1$$

$$\bar{c}_{23} = 2 - 0 + (-1) = +1$$

$$\bar{c}_{35} = 3 - (-1) + (-6) = -2$$

$$\bar{c}_{45} = 2 - (-2) + (-6) = -2$$

$$\bar{c}_{53} = 1 - (-6) + (-1) = +6$$

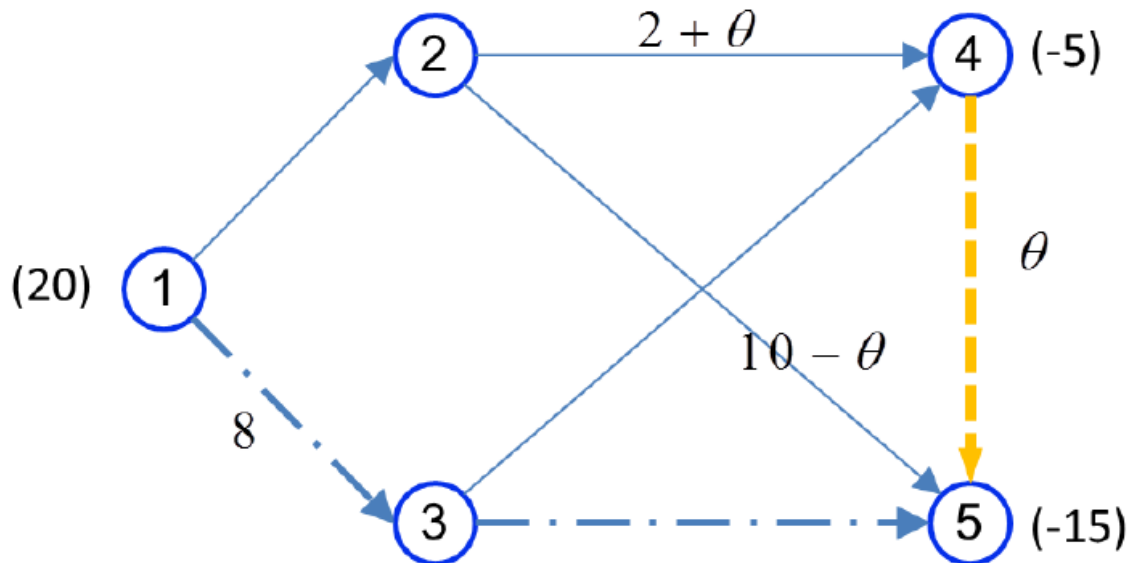
برای بهبود جواب فعلی براساس  $\bar{c}_{ij}$  های بالا **دو راه حل** پیش روی ماست:

۱- **افزایش** جریان کمانی که هزینه  $\bar{c}_{ij}$  منفی دارد و اکنون در **کران پایین** خود است.

۲- **کاهش** متغیری که هزینه  $\bar{c}_{ij}$  مثبت دارد و اکنون در **کران بالای** خود قرار دارد.

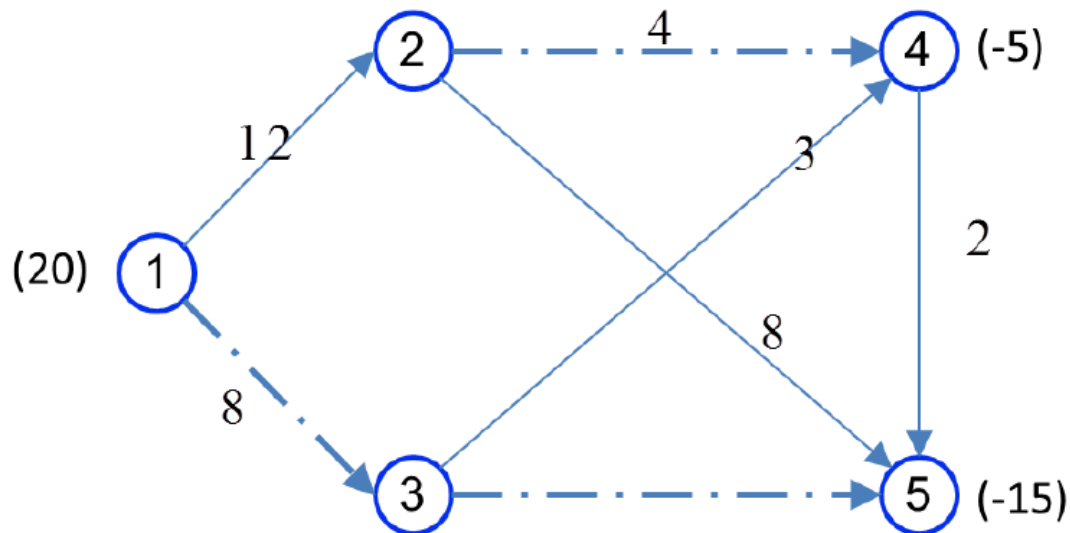
# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

باتوجه به این دو حالت، تنها کاندید، کمان  $(۴,۵)$  است. در شکل زیر، کمان  $(۴,۵)$  به شکل اضافه شد تا مشخص شود کدام کمان باید از جواب اساسی **خارج** شود.



مقدار  $\theta$  تا ۲ می‌تواند افزایش یابد که در این صورت کمان  $(۲,۴)$  به حد بالای خود می‌رسد و از جواب اساسی خارج می‌شود.

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه



مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  می‌تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر می‌شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -3; y_4 = -4; y_5 = -6$$

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه



هزینه‌های  $\bar{c}_{ij}$  برای تعیین کمان ورودی به جواب اساسی و کمان خروجی از جواب اساسی به صورت زیر است.

$$\bar{c}_{13} = 4 - 4 + (-3) = -3$$

$$\bar{c}_{23} = 2 - 0 + (-3) = -1$$

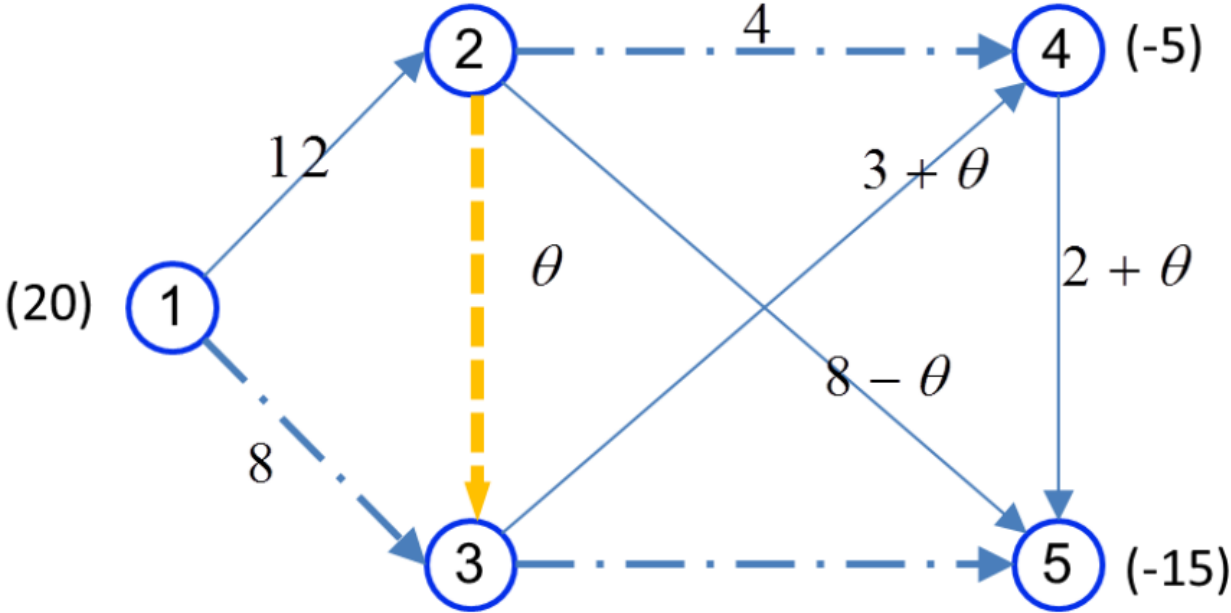
$$\bar{c}_{35} = 3 - (-3) + (-6) = 0$$

$$\bar{c}_{24} = 2 - (0) + (-4) = -2$$

$$\bar{c}_{53} = 1 - (-6) + (-3) = +4$$

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

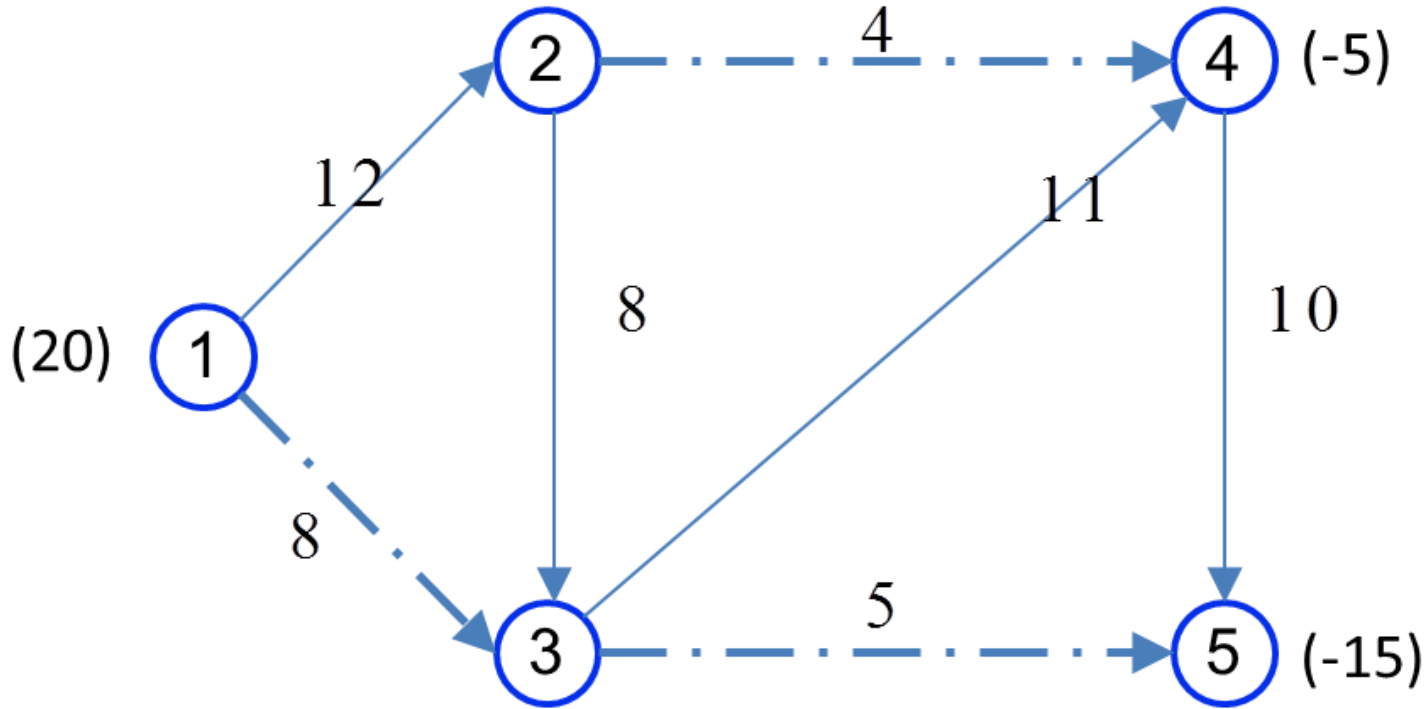
در این مرحله کمان (۲,۳) وارد جواب اساسی می‌شود. برای خروج کمان خروجی به صورت زیر عمل می‌شود.



مقدار  $\theta$  تا ۸ می‌تواند افزایش یابد که در این صورت کمان (۲,۵) از جواب اساسی خارج می‌شود.



# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه



براساس جواب اساسی جدید، مضرب‌های به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$y_1 = 4; y_2 = 0; y_3 = -2; y_4 = -3; y_5 = -5$$

# الگوریتم جریان با هزینه کمینه در شبکه

با توجه به مضرب‌های فوق، مقدار هزینه  $\overline{c_{ij}}$  به صورت زیر می‌شود.

$$\overline{c_{13}} = 4 - 4 + (-2) = -2$$

$$\overline{c_{25}} = 6 - 0 + (-5) = +1$$

$$\overline{c_{35}} = 3 - (-2) + (-5) = 0$$

$$\overline{c_{24}} = 2 - (0) + (-3) = -1$$

$$\overline{c_{53}} = 1 - (-5) + (-2) = +4$$

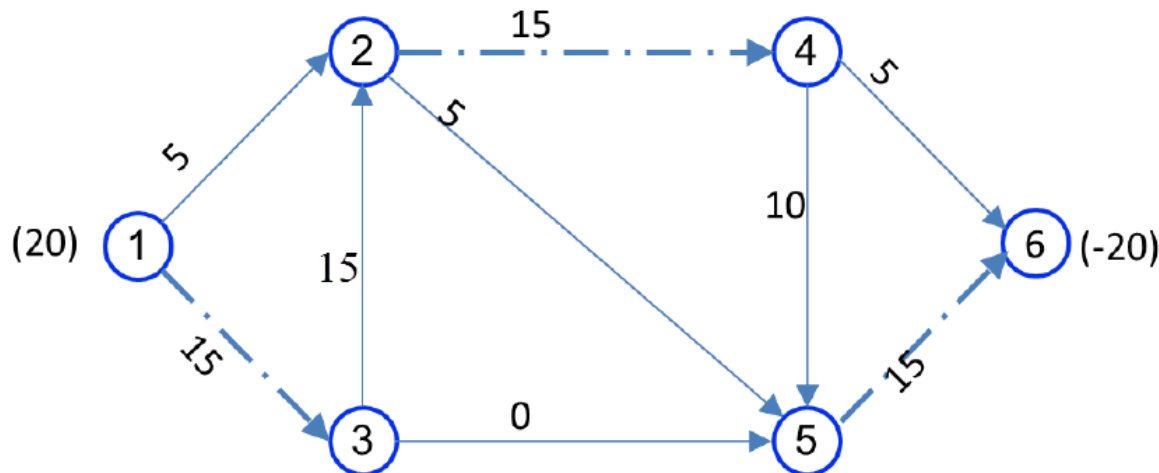
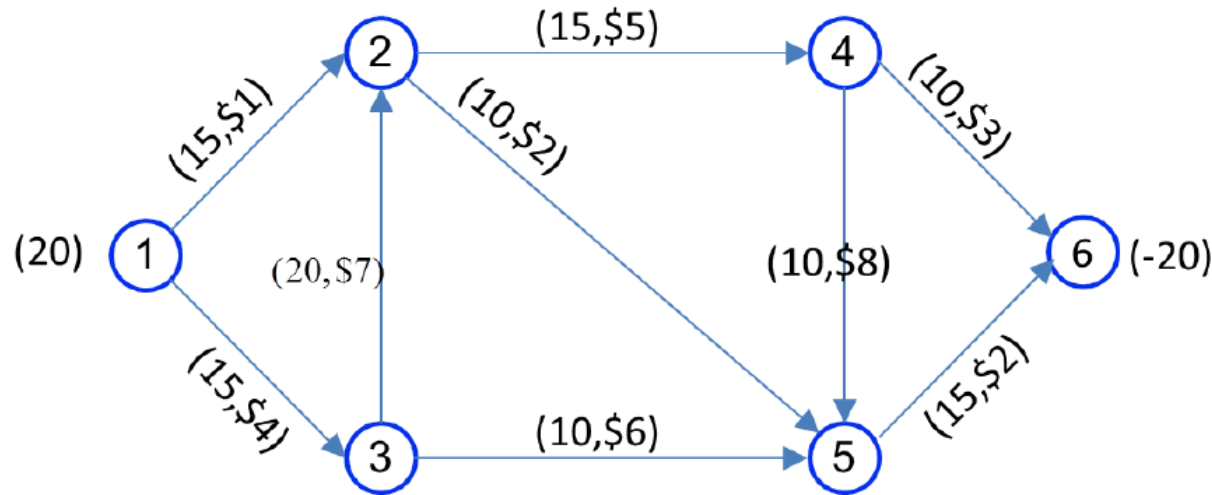
چون همه هزینه‌های  $\overline{c_{ij}}$  منفی برای متغیرهای غیرپایه در کران بالا و همه هزینه‌های

$\overline{c_{ij}}$  مثبت برای متغیرهای غیرپایه در کران پایین خود هستند، لذا جواب فوق، جواب بهینه

است.

# تمرین

**تمرین:** مسئله جریان کمینه در شبکه زیر را با استفاده از روش سیمپلکس در شبکه حل نمایید. برای جواب اولیه از درخت داده شده استفاده کنید.



جواب اولیه:

## تمرین



**حل:** مقدار تابع هدف برای جواب اولیه فوق برابر با ۳۸۰ است. با فرض  $y_2 = 0$ ، می‌توان ضرایب  $y_i$  ها را براساس  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  محاسبه می‌کنیم.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -2$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 0 \rightarrow y_4 = 6$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = 3$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های **غیر پایه** به صورت زیر است.

$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 6 - 7 + (-2) = -3$$

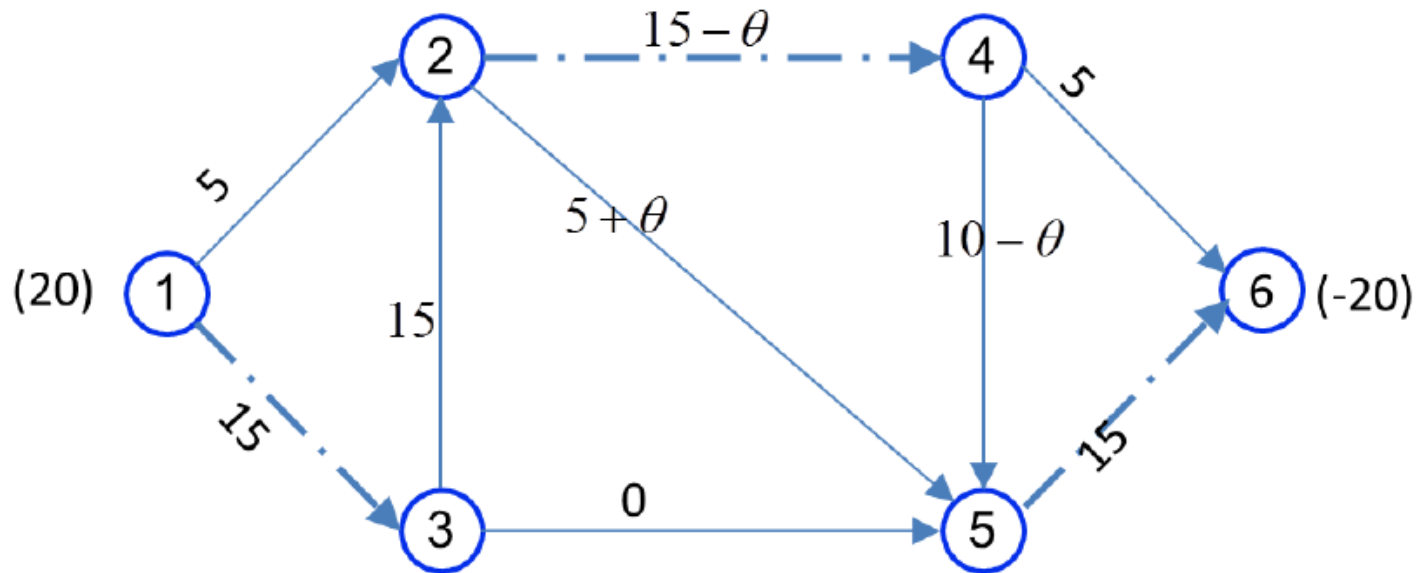
$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 5 - 0 + 6 = 11$$

$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 2 + 3 = 7$$

هر چهار کمان امکان ورود به **جواب اساسی** را دارد. متغیر (۲,۴) انتخاب می‌شود.

# تمرین

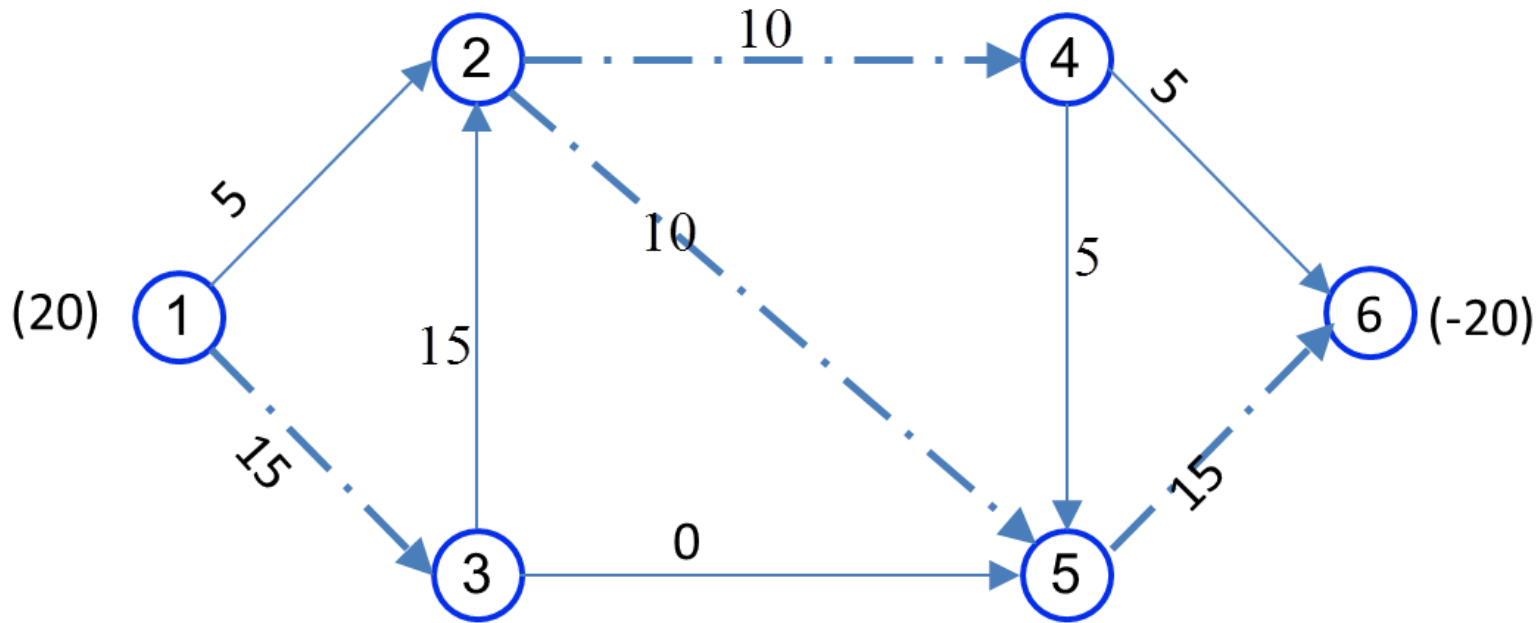
نحوه یافتن متغیر خروجی به صورت زیر انجام می‌شود.



$$5 + \theta \leq 10; 10 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta_{\max} = 5$$

# تمرین

لذا کمان  $(۲,۵)$  با رسیدن به حد بالا، از **کمان‌های اساسی** خارج می‌شود. لذا **جواب اساسی** فعلی به صورت زیر می‌شود.



در این جواب، مقدار تابع هدف برابر با ۲۹۵ است.

مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  می‌تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -13$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$



هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

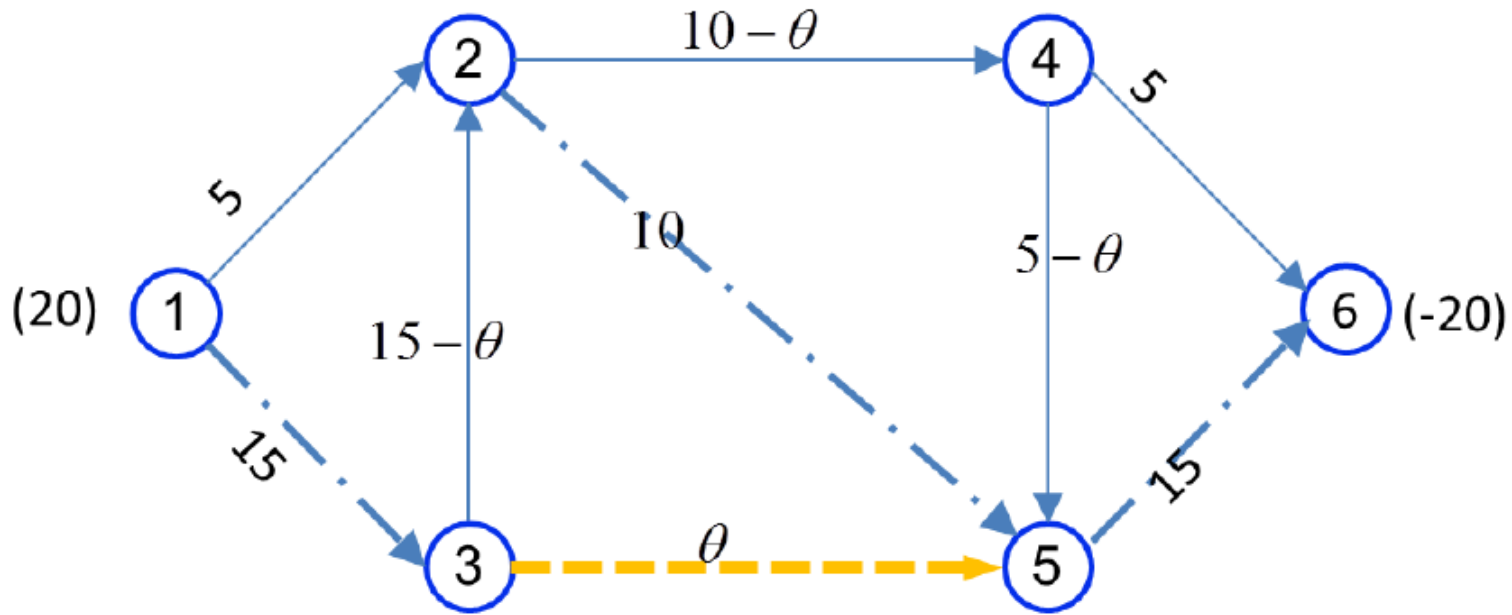
$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 6 - 7 + (-13) = -14$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 - 13 = -11$$

$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 13 - 8 = 7$$

# تمرین

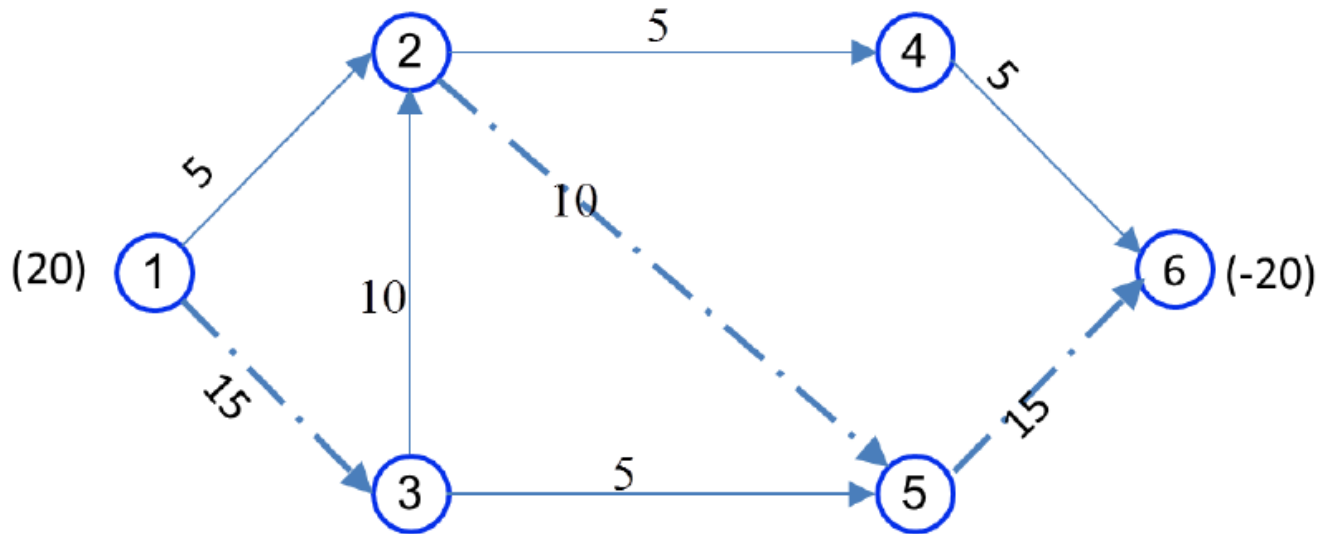
کمان (۳,۵) می‌تواند **وارد** جواب‌های اساسی می‌شود.



با  $\theta = 5$  ، کمان (۴,۵) از پایه **خارج** می‌شود و کمان (۳,۵) **وارد** جواب پایه می‌شود.

## تمرین

جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود.



برای جواب اساسی فوق، مقدار تابع هدف برابر با ۲۵۵ است. مقدار مضرب‌های  $y_i$  با

توجه به فرض  $y_2 = 0$  می‌تواند از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به

صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c}_{12} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c}_{32} = 7 - y_3 + y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 7$$

$$\overline{c}_{24} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c}_{46} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

$$\overline{c}_{35} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = 1$$

هزینه  $\overline{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c}_{13} = 4 - y_1 + y_3 = 4 - 1 + 7 = 10$$

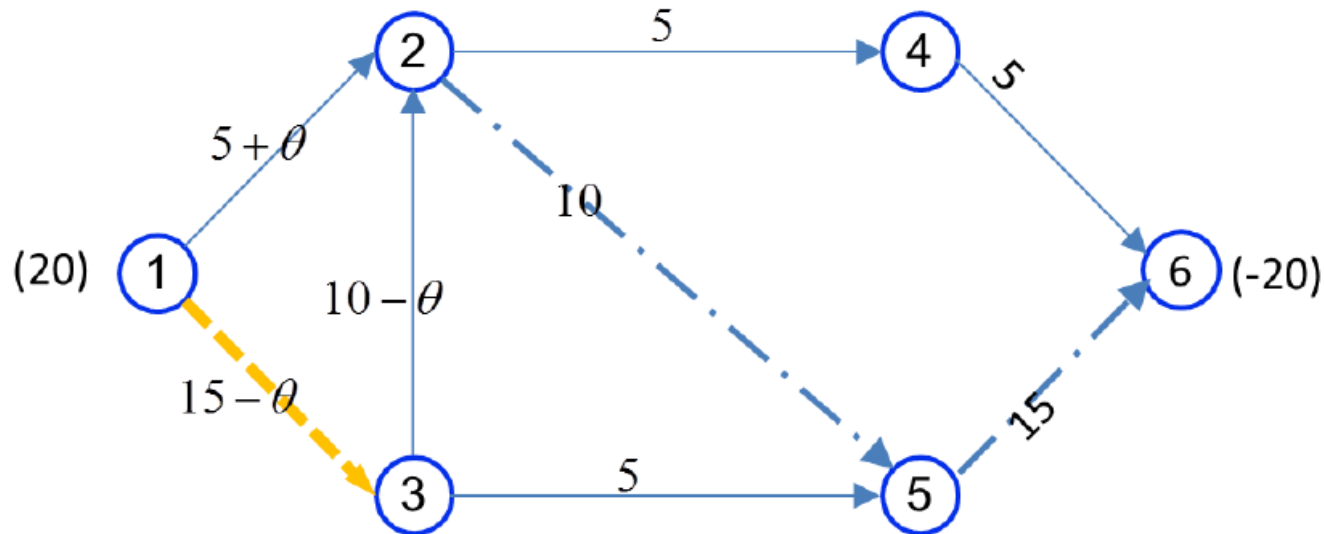
$$\overline{c}_{25} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 + 1 = 3$$

$$\overline{c}_{45} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 + 1 = 14$$

$$\overline{c}_{56} = 2 - y_5 + y_6 = 2 - 1 - 8 = -7$$

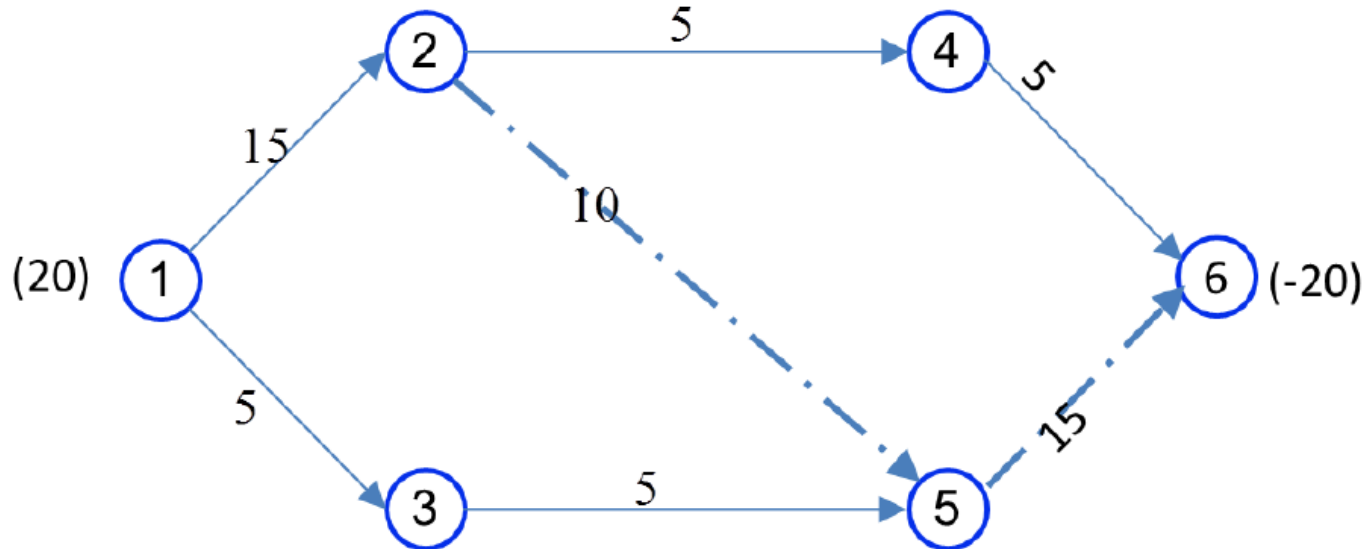
# تمرین

کمان (۱,۳) وارد پایه می‌شود. برای یافتن کمان خروجی به صورت زیر عمل می‌کنیم.



## تمرین

با  $\theta = 10$ ، کمان  $(3, 2)$  از جواب های اساسی **خارج** می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود.



مقدار تابع هدف جواب اساسی فوق برابر با **۱۵۵** است. برای کنترل بهینگی، مقدار مضرب های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

## تمرین



$$\overline{c}_{12} = 1 - y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\overline{c}_{13} = 4 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -3$$

$$\overline{c}_{35} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_5 = -5$$

$$\overline{c}_{24} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c}_{46} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

هزینه  $\overline{c}_{ij}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c}_{32} = 7 - y_1 + y_3 = 7 + 3 + 0 = 10$$

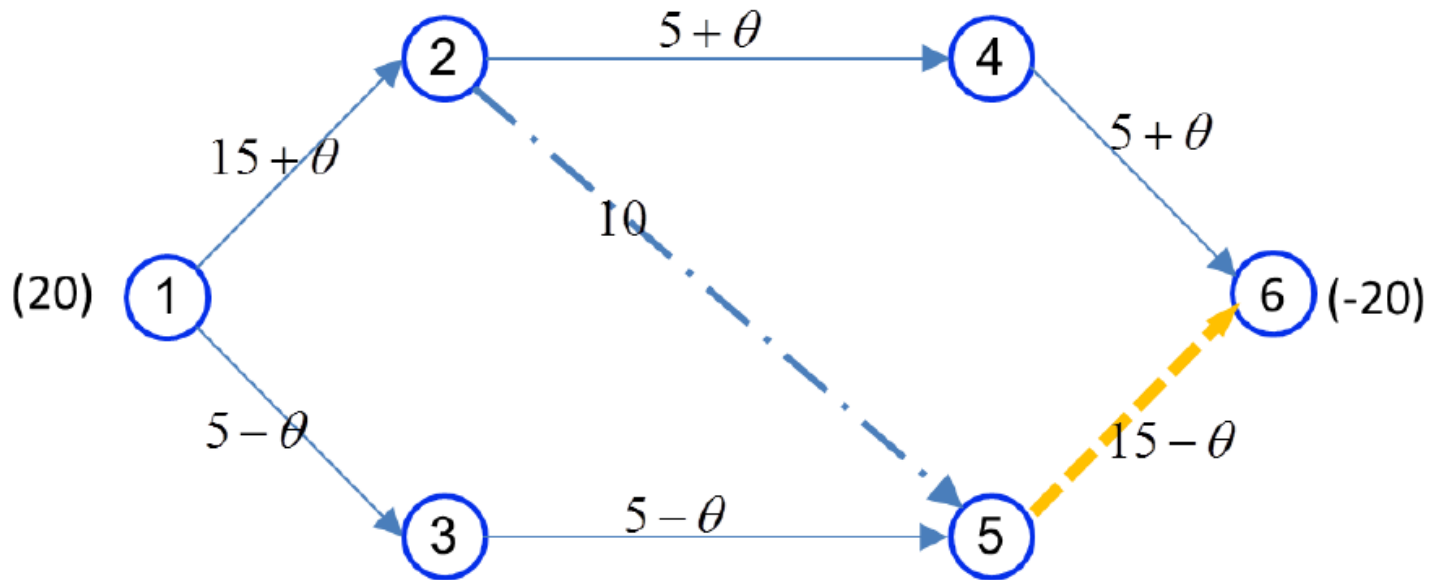
$$\overline{c}_{25} = 2 - y_2 + y_5 = 2 - 0 - 9 = -7$$

$$\overline{c}_{45} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 - 9 = 4$$

$$\overline{c}_{56} = 2 - y_5 + y_6 = 2 + 9 - 8 = 3$$

## تمرین

کمان (۵,۶) وارد پایه می‌شود. کمان خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

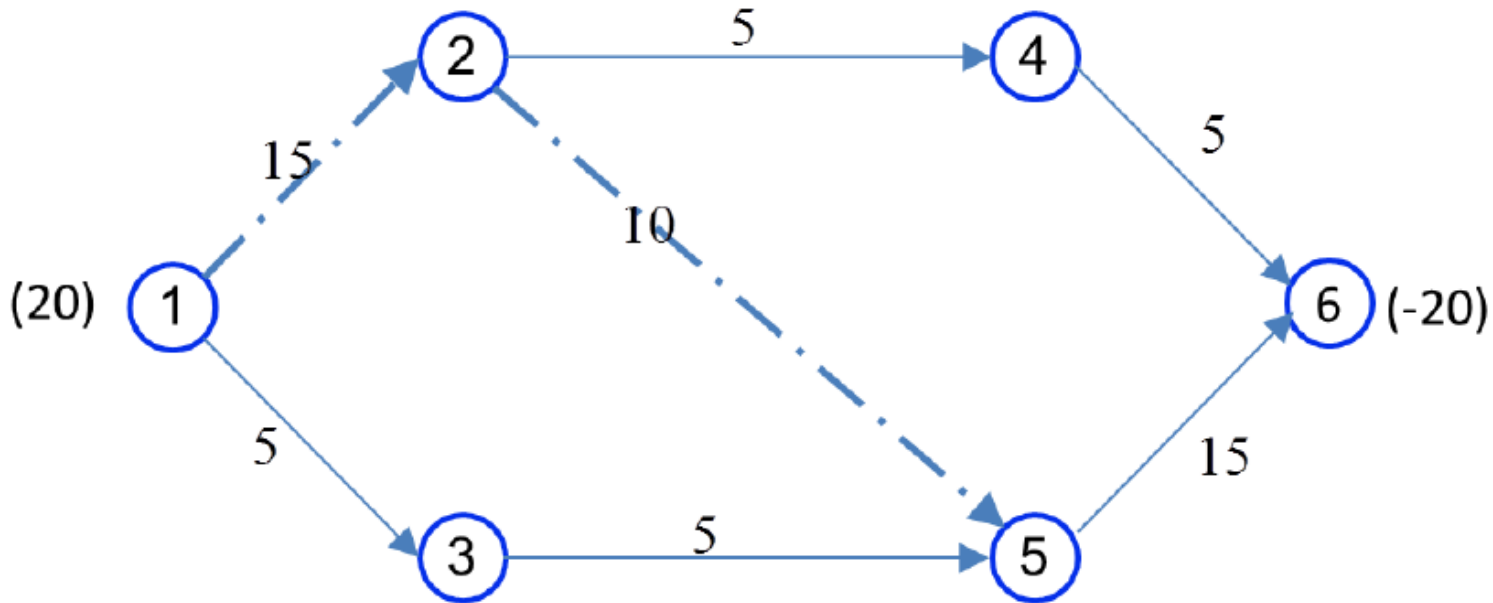


با  $\theta = 0$ ، کمان (۱,۲) از جواب‌های اساسی خارج می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به

صورت زیر می‌شود.



# تمرین



مقدار تابع هدف اساسی فوق برابر با ۱۵۵ است.

برای کنترل بهینگی، مقدار مضرب‌های  $y_i$  با توجه به فرض  $y_2 = 0$  از معادلات  $c_{ij} - y_i + y_j = 0$  برای متغیرهای اساسی به صورت زیر محاسبه شود.

$$\overline{c_{24}} = 5 - y_2 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -5$$

$$\overline{c_{46}} = 3 - y_4 + y_6 = 0 \rightarrow y_6 = -8$$

$$\overline{c_{56}} = 2 - y_5 + y_6 = 0 \rightarrow y_5 = -6$$

$$\overline{c_{35}} = 6 - y_3 + y_5 = 0 \rightarrow y_3 = 0$$

$$\overline{c_{13}} = 4 - y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_1 = 4$$

هزینه  $\overline{c_{ij}}$  برای کمان‌های غیرپایه به صورت زیر است.

$$\overline{c_{12}} = 1 - y_1 + y_2 = -3$$

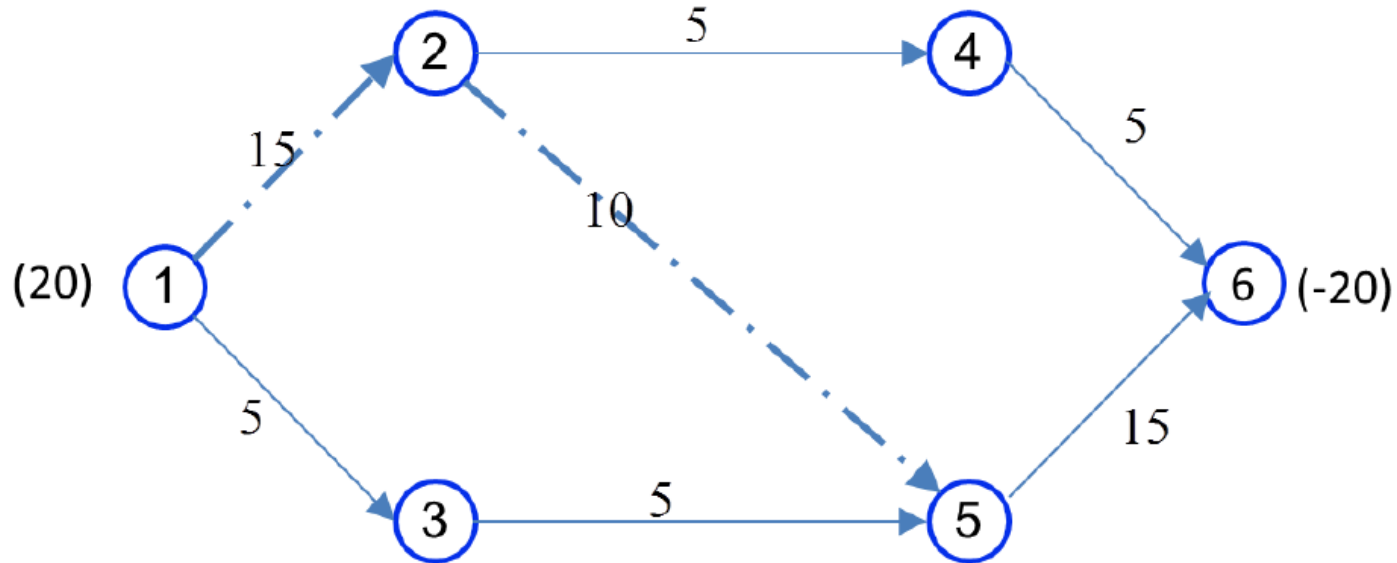
$$\overline{c_{32}} = 7 - y_3 + y_2 = 7$$

$$\overline{c_{25}} = 2 - y_2 + y_5 = -4$$

$$\overline{c_{45}} = 8 - y_4 + y_5 = 8 + 5 - 6 = 7$$

شرط بهینگی برقرار است لذا به جواب **بهینه** رسیدیم.

## تمرین



**توجه:** به دلیل این که در گام فعلی  $\theta = 0$  شد، به این معناست که جواب **تباهیده** داریم و در گام آخر بهبودی در مقدار تابع هدف اتفاق نیافتاده است.

# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com)

[behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com)

