

درس ۱۱: مدل سازی برنامه ریزی

عدد صحیح

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

در برنامه‌ریزی خطی فرض بخش پذیری باعث می‌شود که در بسیاری از مسائل واقعی، چنانچه مقادیری غیر از عدد صحیح به متغیرهای صحیح داده شده که از نظر مفهومی بی معنا باشد. به عنوان مثال، تعداد نفرات یا تعداد دستگاه‌ها که باید به مقادیر صحیح اختصاص یابد. در ادبیات تحقیق در عملیات بررسی موارد فوق را برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح می‌نامند که به اختصار برنامه‌ریزی عدد صحیح نامیده می‌شود. اگر همه متغیرهای تصمیم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، عدد صحیح باشند، به آن برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص (Pure integer programming) گفته می‌شود. اگر فقط در مورد تعدادی از متغیرها فرض عدد صحیح بودن صادق باشد، به آن برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط (Mixed integer programming) گفته می‌شود. در ادامه یک نمونه مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک ارائه می‌شود.

مثال: یک شرکت تولیدی تصمیم دارد به منظور توسعه فعالیت‌های خود، کارخانه جدیدی در یکی از دو شهر (الف) و (ب) ایجاد نماید. در شهری که برای این منظور انتخاب می‌شود می‌تواند انبار جدیدی هم احداث نمود ولی حداکثر یک انبار می‌تواند داشته باشد. در ستون ۴ جدول زیر، ارزش خالص فعلی هر کدام از این انتخاب‌ها و در ستون آخر، سرمایه مورد نیاز آورده شده است. حداکثر بودجه برای این توسعه ۲۴ میلیون دلار است و هدف مسئله، تعیین ترکیبی از انتخاب‌ها است که ارزش خالص را بیشینه نماید.

شماره تصمیم	سوال مربوط به تصمیم	متغیر تصمیم	ارزش خالص فعلی (میلیون دلار)	سرمایه مورد نیاز (میلیون دلار)
1	کارخانه در شهر (الف) ساخته شود؟	x_1	7	20
2	کارخانه در شهر (ب) ساخته شود؟	x_2	5	15
3	انبار در شهر (الف) ساخته شود؟	x_3	4	12
4	انبار در شهر (ب) ساخته شود؟	x_4	3	10

متغیر تصمیم این مسئله به صورت زیر است:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تصمیم ز بله باشد.} \\ 0 & \text{اگر تصمیم ز خیر باشد.} \end{cases}$$

به دلیل اینکه تصمیم‌های x_1 و x_2 از نوع ناسازگار هستند (شرکت فقط یک کارخانه می‌تواند بسازد)، لذا به محدودیت زیر نیاز است:

$$x_1 + x_2 = 1$$

به طور مشابه برای تصمیم‌های x_3 و x_4 هم این ناسازگاری برقرار است (شرکت حداکثر یک انبار می‌تواند داشته باشد)

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

تصمیم‌های x_3 و x_4 تصمیم‌های وابسته به x_1 و x_2 هستند (ساختن انبار در یک شهر منوط به ساخت کارخانه است). این شرط با استفاده از محدودیت زیر بیان می‌شود:

$$x_3 - x_1 \leq 0$$

$$x_4 - x_2 \leq 0$$

در محدودیت اول، اگر x_1 برابر با صفر باشد (یعنی در شهر ۱ کارخانه ساخته شود)، آنگاه $x_2 = 0$ خواهد بود. ولی اگر در شهر ۱ کارخانه‌ای ساخته شود، می‌توان در این شهر انبار ساخته شود ($x_3 = 0 \text{ or } 1$).

بنابراین شکل کلی مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\
 &st. \\
 &\quad 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 24 \\
 &\quad x_1 + x_2 = 1 \\
 &\quad x_3 + x_4 \leq 1 \\
 &\quad -x_2 + x_4 \leq 0 \\
 &\quad -x_1 + x_3 \leq 0 \\
 &x_i \geq 0, \text{int}
 \end{aligned}$$

فرموله کردن مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک

محدودیت‌های این یا آن (*either-or constraint*)

حالتی را در نظر بگیرید که از بین دو محدودیت موجود می‌توان یکی را انتخاب کرد ولی لزومی ندارد که هر دو محدودیت برقرار باشد. فرض کنید که در مسئله‌ای، یکی از دو محدودیت زیر باید برقرار باشد:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

or

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

با استفاده از عدد M بزرگ می‌توان محدودیت‌های فوق را به زیر در آورد:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + yM$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + (1 - y)M$$

که y متغیر صفر و یک است. اگر $y = 1$ باشد، لذا خواهیم داشت:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

که در این صورت محدودیت $x_1 + 4x_2 \leq 16$ برقرار است و لزومی به برقراری محدودیت

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ نیست.

اگر $y = 0$ باشد، محدودیت‌ها به صورت زیر می‌شوند:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + M$$

که در این صورت محدودیت $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ برقرار است و لزومی به برقراری محدودیت

$x_1 + 4x_2 \leq 16$ نیست.

k محدودیت از بین N محدودیت باید برقرار باشد.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که محدودیت‌هایی به صورت زیر وجود دارد.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2$$

⋮

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N$$

می‌خواهیم k محدودیت از N محدودیت بالا برقرار باشد. فرموله کردن این مسئله به صورت زیر است:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1 + My_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2 + My_2$$

⋮

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N + My_N$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = N - k$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1$$

توابع با N مقدار محتمل

تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نظر بگیرید که تا یکی از N مقدار d_1, d_2, \dots, d_N را می‌تواند اخذ نماید. در

این مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح معادل به صورت زیر است:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N d_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = 1$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1$$

مسئله هزینه ثابت

عملیات تولید، معمولاً مستلزم صرف هزینه ثابت (Fixed charge) با هزینه راه اندازی (set up cost) است. در این صورت کل هزینه تولید شامل هزینه متغیر (متناسب با حجم فعالیت) و هزینه ثابت (برای راه اندازی آن) است. اگر x_j معرف حجم فعالیت شماره j ، k_j معرف هزینه راه اندازی آن و c_j معرف هزینه انجام هر واحد از این فعالیت باشد، هزینه کل برابر خواهد بود با:

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

اکنون مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

معادل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح به صورت زیر می‌شود:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j + k_j y_j$$

s.t.

$$x_j - M y_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$y_j = 0 \text{ or } 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

در مدل فوق، اگر $y_j = 0$ باشد، آنگاه $x_j = 0$ و سپس $f_j = 0$ خواهد بود. اگر $y_j = 1$ باشد، آنگاه

x_j می‌تواند هر مقدار مثبتی اخذ نماید و خواهیم داشت:

$$f_j(x_j) = c_j x_j + k_j$$

برنامه‌ریزی انبار

در مدل‌سازی سیستم‌های توزیع، بایستی در باره ارزش بین هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های انبارداری تصمیم‌گیری شود. فرض کنید به عنوان مثال مدیری بایستی تصمیم بگیرد از میان n انبار کدام‌ها را برای برآوردن تقاضای m مشتری استفاده کند. متغیر تصمیم چنین تصمیمی به صورت زیر است:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر انبار } i \text{ باز باشد.} \\ 0 & \text{اگر انبار } i \text{ باز نباشد.} \end{cases}$$

x_{ij} : مقدار کالایی که از انبار i به مشتری j می‌رود.

هزینه‌های مربوطه عبارتند از:

f_i : هزینه ثابت اجاره برای انبار i اگر باز باشد

c_{ij} : هزینه عملیاتی در انبار i به علاوه هزینه حمل از انبار i به مشتری j

در این مسئله دو محدودیت وجود دارد که عبارتند از:

(۱) تقاضا d_j برای هر مشتری بایستی از انبارها تامین شود.

(۲) کالا از یک انبار تنها وقتی حمل می‌شود که انبار باز باشد.

مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح به صورت زیر می‌شود:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - y_i \left(\sum_{j=1}^n d_j \right) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; \forall i = 1, \dots, m$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

تمرین: یک زن و شوهر جوان می‌خواهند کارهای خانه (خرید، آشپزی، ظرف شویی، لباس شویی) را بین خود طوری قسمت کنند که به هر کدام از دو کار تخصیص یابد و مجموع زمانی که صرف انجام کارها می‌شود، حداقل گردد. کارایی آن‌ها در انجام این وظایف متفاوت است. زمانی که هر کدام از آن‌ها برای هر وظیفه صرف می‌کنند به شرح زیر است:

	لباس شویی	ظرف شویی	آشپزی	خرید	
	2.9	3.6	7.8	4.5	زن
	3.1	4.3	7.2	4.9	مرد

این مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی صفر و یک فرموله کنید.

حل:

متغیرهای تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر ز خرید انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad C_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر ز آشپزی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$D_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر ز ظرف شویی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad L_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر ز لباس شویی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$j = F \text{ (زن) و } M \text{ (مرد)}$$

$$\text{Min } 4.5M_F + 7.8C_F + 3.6D_F + 2.9L_F + 4.9M_M + 7.2C_M + 4.3D_M + 3.1L_M$$

s.t.

$$M_F + C_F + D_F + L_F = 2$$

$$M_M + C_M + D_M + L_M = 2$$

$$M_M + M_F = 1$$

$$C_F + C_M = 1$$

$$D_F + D_M = 1$$

$$L_F + L_M = 1$$

$$M_F, C_F, D_F, L_F, M_M, C_M, D_M, L_M = 0 \text{ or } 1$$

تمرین: شرکتی، سرمایه گذاری در ۶ طرح بزرگ را مورد بررسی قرار داده است. میزان بازدهی این سرمایه گذاریها در دراز مدت و همچنین میزان سرمایه مورد نیاز این طرحها در جدول زیر (بر حسب میلیون دلار) آمده است.

شماره طرح	1	2	3	4	5	6
میزان بازدهی	15	12	16	18	9	11
سرمایه مورد نیاز	38	33	39	45	23	27

کل میزان بودجه برای سرمایه گذاری، ۱۰۰ میلیون دلار است. طرحهای ۱ و ۲ ناسازگارند و نمی‌توان هر دو آنها را اجرا کرد. طرحهای ۳ و ۴ نیز چنین هستند. علاوه بر این، هیچکدام از طرحها ۳ و ۴ را نمی‌توان اجرا کرد مگر این که یکی از دو طرح ۱ و ۲ هم اجرا شود. در مورد سایر طرحها چنین محدودیتی نیست. هدف مسئله انتخاب ترکیبی از سرمایه گذاری است که مجموع بازده حداکثر شود.

حل: متغیر تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{سرمایه گذاری در طرح } j \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر p_j ، سود تخصیص برای طرح j ، c_j ، هزینه سرمایه گذاری روی طرح j باشد، مدل به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^6 p_j x_j \\ & \sum_{j=1}^6 c_j x_j \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq x_1 + x_2 \\ & x_4 \leq x_1 + x_2 \\ & x_j = 0 \text{ or } 1 \quad j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

تمرین: یک شرکت هواپیمایی در صدد خرید هواپیما مسافری جدید است که در سه اندازه بزرگ، متوسط، و کوچک عرضه می شود. قیمت خرید هواپیماها بزرگ، متوسط، و کوچک به ترتیب، ۳۳.۵، ۲۵، و ۱۷.۵ میلیون دلار است. شرکت حداکثر سرمایه گذاری جدید را ۷۵۰ میلیون دلار تعیین کرده است. صرف نظر از این که چه هواپیمایی خریداری شود، تخمین زده می شود که به اندازه کافی مسافر وجود دارد که هواپیما با ظرفیت کامل پرواز کنند. برآورد می شود که سود سالیانه هر یک از هواپیماهای بزرگ، متوسط، و کوچک به ترتیب ۲.۱، ۱.۵ و ۱.۱۵ میلیون دلار است.

پیش بینی می شود در مجموع سی خلبان برای هدایت این هواپیماها در اختیار است. تجهیزات و امکانات برای نگهداری و تعمیر ۴۰ هواپیمای کوچک کافی است ولی تجهیزات و امکانات لازم برای نگهداری و تعمیر یک هواپیما متوسط و بزرگ به ترتیب $\frac{4}{3}$ و $\frac{5}{3}$ برابر تجهیزات و امکانات مورد نیاز یک هواپیما کوچک است. مدیریت از چه نوع هواپیما باید خرید کند که سودش بیشینه شود:

حل: L ، M و S به ترتیب تعداد هواپیماهای بلند پرواز، متوسط و کوتاه پرواز است. مدل برنامه ریزی عدد صحیح به صورت زیر است:

$$\text{Max } 2.1L + 1.5M + 1.15S$$

s.t.

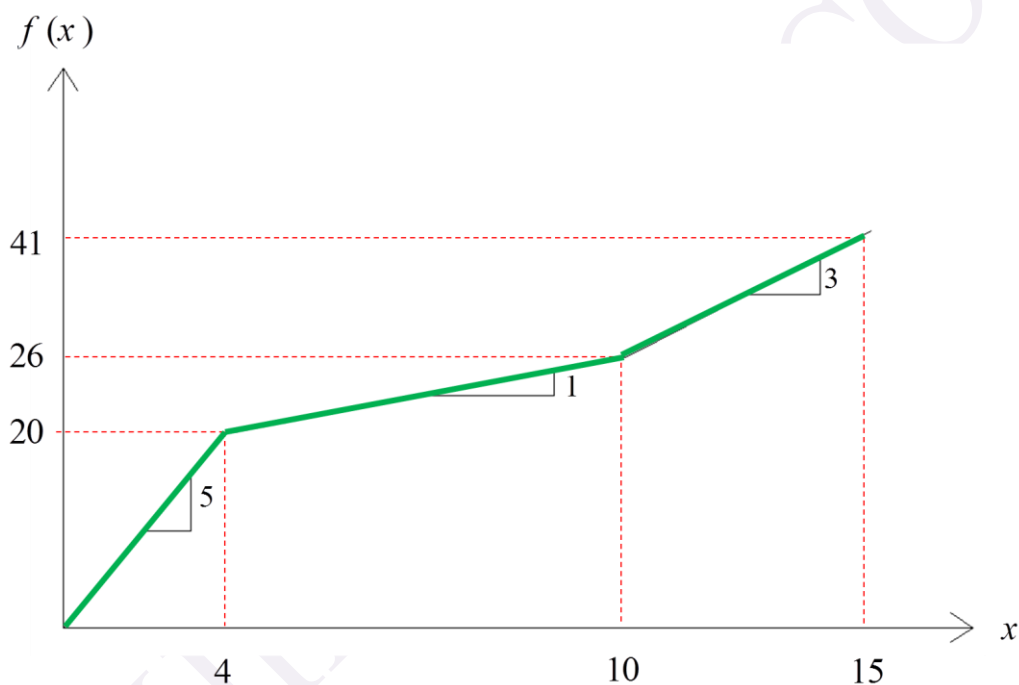
$$33.5L + 25M + 17.5S \leq 750$$

$$L + M + S \leq 30$$

$$\frac{5}{3}L + \frac{4}{3}M + S \leq 40$$

$$L, M, S \geq 0, \text{int}$$

تمرین: تابع خطی قطعه بندی شده (*piecewise linear*) در شکل زیر نشان داده شده است. مدل برنامه عدد صحیح ارایه دهید که بیان کننده این تابع خطی قطعه بندی شده باشد.



حل: برای مدل کردن منحنی فوق، هر مقدار x را به صورت مجموع سه متغیر δ_1 ، δ_2 و δ_3 نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

که در آن:

$$0 \leq \delta_1 \leq 4$$

$$0 \leq \delta_2 \leq 6$$

$$0 \leq \delta_3 \leq 5$$

که در این صورت مقدار تابع به صورت مجموع سه متغیر δ_1 ، δ_2 و δ_3 به صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = 5\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3$$

توجه کنید δ_1 ، δ_2 و δ_3 باید دارای ویژگی زیر باشند.

δ_1 : به مقداری از x که از صفر بیشتر باشد ولی کوچکتر مساوی ۴ باشد، مربوط می‌شود.

δ_2 : مازاد مقدار x از ۴ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۰ باشد.

δ_3 : مازاد مقدار x از ۱۰ است تا موقعی که x کوچکتر یا مساوی ۱۵ باشد.

برای این که متغیر فوق برقرار باشد، دو متغیر دودویی زیر تعریف می‌شود:

$$w_1 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \delta_1 \text{ در حد بالای خود باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad w_2 = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \delta_2 \text{ در حد بالای خود باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با تعریف دو متغیر فوق، می‌توان شرایط را به صورت زیر بیان کرد:

$$4w_1 \leq \delta_1 \leq 4$$

$$6w_2 \leq \delta_2 \leq 6w_1$$

$$0 \leq \delta_3 \leq 5w_2$$

$$w_1, w_2 = 0 \text{ or } 1$$

اکنون برابری شرایط را برای مقادیر مختلف w_1 و w_2 بررسی می‌کنیم:

اگر $w_1 = 0$ باشد، براساس رابطه $6w_2 \leq \delta_2 \leq 6w_1$ ، آنگاه $w_2 = 0$ می‌شود و لذا مقادیر δ_1 ، δ_2 و δ_3

به صورت زیر است.

$$0 \leq \delta_1 \leq 4$$

$$\delta_2 = 0$$

$$\delta_3 = 0$$

که در این صورت $0 \leq x \leq 4$

اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 0$ باشد، در این صورت مقادیر δ_1 ، δ_2 و δ_3 به صورت زیر می‌شود:

$$\delta_1 = 4$$

$$0 \leq \delta_2 \leq 6$$

$$\delta_3 = 0$$

که در این صورت $4 \leq x \leq 10$.

و بالاخره، اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ باشد، در این صورت مقادیر δ_1 ، δ_2 و δ_3 به صورت زیر می‌شود:

$$\delta_1 = 4$$

$$\delta_2 = 6$$

$$0 \leq \delta_3 \leq 5$$

که در این صورت $10 \leq x \leq 15$.

تمرین: جمعیت شهری در I ناحیه متمرکز یافته اند و ناحیه i جمعیتی معادل p_i دارد. تجربه و تحلیل‌های مقدماتی، مکان‌های بالقوه آتش‌نشانی را به J محل محدود کرده است. می‌خواهیم بهترین محل ممکن و تخصیص نواحی به آتش‌نشانی را تعیین کنیم.

حل: متغیرهای تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر محل } j \text{ انتخاب شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ناحیه } i \text{ به محل } j \text{ تخصیص داده شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از این که هر ناحیه بایستی تنها به یک ایستگاه آتش نشانی تخصیص داده شود، نمایش ریاضی آن به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, I$$

هیچ یک از نواحی به محل ای که انتخاب نشده تخصیص داده نشود. یعنی $y_j = 0$ نتیجه دهد که $x_{ij} = 0$. نمایش ساده این محدودیت به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} \leq y_j I \quad j = 1, \dots, J$$

فاصله ناحیه i تا آتش نشانی‌های آن ناحیه برابر d_i است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$d_i = \sum_{j=1}^J d_{ij} x_{ij}$$

کل جمعیتی که زیر پوشش محل j قرار می‌گیرند عبارت است از:

$$s_j = \sum_{i=1}^I p_i x_{ij}$$

فرض کنید که ناحیه در مرکز برای آتش سوزی قبلی مستعد است و محل‌های ۱ و ۲ یا محل‌های ۳ و ۴ می‌توانند برای حفاظت این ناحیه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این صورت نمایش ریاضی به صورت زیر می‌شود:

$$y_1 + y_2 \geq 2 \text{ or } y_3 + y_4 \geq 2$$

با فرض این که $y = 0 \text{ or } 1$ باشد، محدودیت جایگزین دو محدودیت فوق به صورت زیر می‌شود:

$$y_1 + y_2 \geq 2y \text{ or } y_3 + y_4 \geq 2(1-y)$$

هزینه ساخت واحد آتش نشانی در ناحیه j وابسته به جمعیت ناحیه j و محدود به B است. اگر این هزینه به صورت تابع $f_j(s_j)$ باشد، لذا محدودیت بودجه ساخت واحد آتش نشانی به صورت زیر می شود:

$$\sum_{j=1}^J f_j(s_j) \leq B$$

در نهایت تابع هدف که کمینه کردن فاصله طی شده از دورترین ناحیه به آتش نشانی تخصیص یافته به آن ناحیه است، به صورت زیر می شود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } D \\ D = \max_{i=1, \dots, I} d_i \end{array} \right\} \rightarrow \text{Min } D \quad D \geq d_i \quad i = 1, \dots, I$$

پس از جایگزینی $d_i = \sum_{j=1}^J d_{ij} x_{ij}$ در رابطه فوق، مدل به صورت کامل به شرح ذیل می شود:

$$\text{Min } D$$

s t .

$$D - \sum_{j=1}^J d_{ij} x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, I$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} \leq y_j I \quad j = 1, \dots, J$$

$$s_j - \sum_{i=1}^I p_i x_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, J$$

$$\sum_{j=1}^J f_j(s_j) \leq B$$

$$y_1 + y_2 - 2y \geq 0$$

$$y_3 + y_4 + 2y \geq 2$$

$$x_{ij}, y_i, y = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J.$$

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**