درس ۱۱: مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

در برنامه‌ریزی خطی فرض بخش پذیری باعث می‌شود کـه در بسـیاری از مسـائل واقعـی، چنانچـه مقادیری غیر از عدد صحیح به متغیرهای صحیح داده شده که از نظر مفهومی بی معنا باشد. به عنوان مثال، تعداد نفرات یا تعداد دستگاه‌ها که باید به مقادیر صحیح اختصاص یابد. در ادبیات تحقیق در عملیات بررسی موارد فوق را برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح می‌نامند که به اختصار برنامه‌ریزی عدد صحیح نامیده مـی‌شـود. اگر همه متغیرهای تصمیم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، عدد صحیح باشند، به آن برنامه‌ریزی عدد صـحیح خالص(Pure integer programming) گفته می‌شود. اگر فقط در مورد تعدادی از متغیرها فرض عـدد صحیح بودن صادق باشد، به آن برنامه‌ریزی عـدد صـحیح مخـتلط (Mixed integer programming) گفته می‌شود. در ادامه یک نمونه مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک ارایه می‌شود.

مثال: یک شرکت تولیدی تصمیم دارد به منظور توسعه فعالیت‌های خود، کارخانه جدیدی در یکی از دو شهر (الف) و (ب) ایجاد نماید. در شهری که برای این منظور انتخاب می‌شود می‌تواند انبار جدیدی هم احداث نمود ولی حداکثر یک انبار می‌تواند داشته باشد. در ستون ۴ جدول زیر، ارزش خالص فعلی هر کدام از این انتخاب‌ها و در ستون آخر، سرمایه مورد نیاز آورده شده است. حداکثر بودجـه بـرای ایـن توسـعه ۲۴ میلیون دلار است و هدف مسئله، تعیین ترکیبی از انتخاب‌ها است که ارزش خالص را بیشینه نماید.

شماره تصمیم	سوال مربوط به تصمیم	متغیر تصمیم	ارزش خالص فعلی (میلیون دلار)	سرمایه مورد نیاز (میلیون دلار)
1	کارخانه در شهر (الف) ساخته شود؟	x_1	7	20
2	کارخانه در شهر (ب) ساخته شود؟	x_2	5	15
3	انبار در شهر (الف) ساخته شود؟	x_3	4	12
4	انبار در شهر (ب) ساخته شود؟	x_4	3	10

متغیر تصمیم این مسئله به صورت زیر است:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تصمیم j بله باشد.} \\ 0 & \text{اگر تصمیم j خیر باشد.} \end{cases}$$

به دلیل اینکه تصمیم‌های x_1 و x_2 از نوع ناسازگار هستند(شرکت فقط یک کارخانه می‌تواند بسازد)، لذا به محدودیت زیر نیاز است:

$$x_1 + x_2 = 1$$

به طور مشابه برای تصمیم‌های x_3 و x_4 هم این ناسازگاری برقرار است(شرکت حداکثر یک انبار می‌تواند داشته باشد)

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

تصمیم‌های x_3و x_4 تصمیم‌های وابسته به x_1 و x_2 هستند(ساختن انبار در یک شهر منوط به ساخت کارخانه است). این شرط با استفاده از محدودیت زیر بیان می‌شود:

$$x_3 - x_1 \leq 0$$

$$x_4 - x_2 \leq 0$$

در محدودیت اول، اگر x_1 برابر با صفر باشد (یعنی در شهر ۱ کارخانه ساخته شود)، آنگاه $x_2 = 0$ خواهد بود. ولی اگر در شهر ۱ کارخانه‌ای ساخته شود، می‌توان در این شهر انبار ساخته شود($x_3 = 0\, or\, 1$).

بنابراین شکل کلی مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max \quad 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 24 \\
&\qquad x_1 + x_2 = 1 \\
&\qquad x_3 + x_4 \le 1 \\
&\qquad -x_2 + x_4 \le 0 \\
&\qquad -x_1 + x_3 \le 0 \\
&x_i \ge 0, \text{int}
\end{aligned}$$

فرموله کردن مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک

محدودیت‌های این یا آن (either-or constraint)

حالتی را در نظر بگیرید که از بین دو محدودیت موجود می‌توان یکی را انتخاب کرد ولی لزومی ندارد که هر دو محدودیت برقرار باشد. فرض کنید که در مسئله‌ای، یکی از دو محدودیت زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&or \\
&x_1 + 4x_2 \le 16
\end{aligned}$$

با استفاده از عدد M بزرگ می‌توان محدودیت‌های فوق را به زیر در آورد:

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \le 18 + yM \\
&x_1 + 4x_2 \le 16 + (1-y)M
\end{aligned}$$

که y متغیر صفر و یک است. اگر $y = 1$ باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \le 18 + M \\
&x_1 + 4x_2 \le 16
\end{aligned}$$

که در این صورت محدودیت $x_1 + 4x_2 \le 16$ برقرار است و لزومی‌به برقراری محدودیت $3x_1 + 2x_2 \le 18$ نیست.

اگر $y = 0$ باشد، محدودیت‌ها به صورت زیر می‌شوند:

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1 + 4x_2 \le 16 + M$$

که در این صورت محدودیت $3x_1 + 2x_2 \le 18$ برقرار است و لزومی به برقراری محدودیت $x_1 + 4x_2 \le 16$ نیست.

k محدودیت از بین N محدودیت باید برقرار باشد.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که محدودیت‌هایی به صورت زیر وجود دارد.

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 \\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 \\
&\vdots \\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N
\end{aligned}$$

می‌خواهیم k محدودیت از N محدودیت بالا برقرار باشد. فرموله کردن این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 + My_1 \\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 + My_2 \\
&\vdots \\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N + My_N \\
&\sum_{i=1}^{N} y_i = N - k \\
&y_i = 0 \; or \; 1
\end{aligned}$$

توابع با N مقدار محتمل

تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را در نظر بگیرید که تا یکی از N مقدار $d_1, d_2, \ldots, d_N$ را می‌تواند اخذ نماید. در این مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح معادل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i \\
&\sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \\
&y_i = 0 \; or \; 1
\end{aligned}$$

مسئله هزینه ثابت

عملیات تولید، معمولا مستلزم صرف هزینه ثابت (*Fixed charge*) بـا هزینـه راه انـدازی (*set up cost*) است. در این صورت کل هزینه تولید شامل هزینه متغیر (متناسب با حجم فعالیت) و هزینه ثابت (برای راه اندازی آن) است. اگر x_j معرف حجم فعالیت شماره *j*، k_j معرف هزینه راه اندازی آن و c_j معـرف هزینـه انجام هر واحد از این فعالیت باشد، هزینه کل برابر خواهد بود با:

$$f_j(x_j)=\begin{cases} k_j+c_jx_j & x_j>0 \\ 0 & x_j=0 \end{cases}$$

اکنون مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Min \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

معادل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min \quad \sum_{j=1}^{n} c_jx_j+k_jy_j \\ &s.t. \\ &\qquad x_j-My_j\le 0 \quad \forall j=1,\dots,n \\ &\qquad y_j=0 \text{ or } 1 \quad \forall j=1,\dots,n \end{aligned}$$

در مدل فوق، اگر $y_j=0$ باشد، آنگاه $x_j=0$ و سپس $f_j=0$ خواهد بود. اگـر $y_j=1$ باشـد، انگـاه x_j می‌تواند هر مقدار مثبتی اخذ نماید و خواهیم داشت:

$$f_j(x_j)=c_jx_j+k_j$$

برنامه‌ریزی انبار

در مدل‌سازی سیستم‌های توزیع، بایستی در باره ارزش بین هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های انبارداری تصمیم‌گیری شود. فرض کنید به عنوان مثال مدیری بایستی تصمیم بگیرید از میان n انبار کدام‌ها را برای برآوردن تقاضای m مشتری استفاده کند. متغیر تصمیم چنین تصمیمی به صورت زیر است:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر انبار i باز باشد.} \\ 0 & \text{اگر انبار i باز نباشد.} \end{cases}$$

x_{ij} : مقدار کالایی که از انبار i به مشتری j میرود.

هزینه‌های مربوطه عبارتند از:

f_i : هزینه ثابت اجاره برای انبار i اگر باز باشد

c_{ij} : هزینه عملیاتی در انبار i به علاوه هزینه حمل از انبار i به مشتری j

در این مسئله دو محدودیت وجود دارد که عبارتند از:

۱) تقاضا d_j برای هر مشتری بایستی از انبارها تامین شود.

۲) کالا از یک انبار تنها وقتی حمل می‌شود که انبار باز باشد.

مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1,\dots,n \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - y_i(\sum_{j=1}^{n} d_j) \le 0 \quad \forall i = 1,\dots,m \\
&x_{ij} \ge 0 \quad \forall j = 1,\dots,n; \forall i = 1,\dots,m \\
&y_i = 0 \, or \, 1 \quad \forall i = 1,\dots,m.
\end{aligned}$$

تمرین: یک زن و شوهر جوان می‌خواهند کارهای خانه (خرید، آشپزی، ظرف شویی، لباس شویی) را بین خود طوری قسمت کنند که به هر کدام از دو کار تخصیص یابد و مجموع زمانی که صرف انجام کارها می‌شود، حداقل گردد. کارایی آن‌ها در انجام این وظایف متفاوت است. زمانی که هرکدام از آن‌ها برای هر وظیفه صرف می‌کنند به شرح زیر است:

	خرید	آشپزی	ظرف شویی	لباس شویی
زن	4.5	7.8	3.6	2.9
مرد	4.9	7.2	4.3	3.1

این مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی صفر و یک فرموله کنید.

حل:

متغیرهای تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر j آشپزی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad M_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر j خرید انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$L_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر j لباس شویی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad D_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر j ظرف شویی انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$j = F$ (زن) و M (مرد)

$$
\begin{aligned}
&Min\ 4.5M_F + 7.8C_F + 3.6D_F + 2.9L_F + 4.9M_M + 7.2C_M + 4.3D_M + 3.1L_M \\
&s.t. \\
&\quad M_F + C_F + D_F + L_F = 2 \\
&\quad M_M + C_M + D_M + L_M = 2 \\
&\quad M_M + M_F = 1 \\
&\quad C_F + C_M = 1 \\
&\quad D_F + D_M = 1 \\
&\quad L_F + L_M = 1 \\
&\quad M_F, C_F, D_F, L_F, M_M, C_M, D_M, L_M = 0\ or\ 1
\end{aligned}
$$