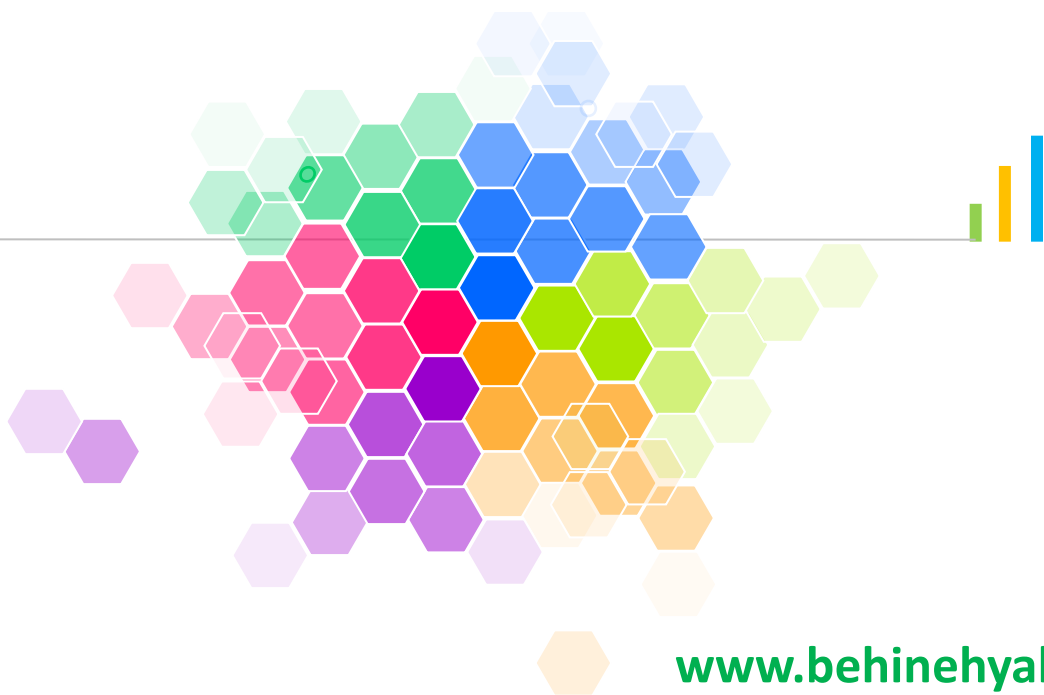


به نام خدا



درس ۵: مسئله حمل و نقل



فهرست مطالب

مسئله عمومی جریان در شبکه

۱

مسئله حمل و نقل

۲

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

۳

تمرین‌ها

۴



مسئله عمومی جریان در شبکه

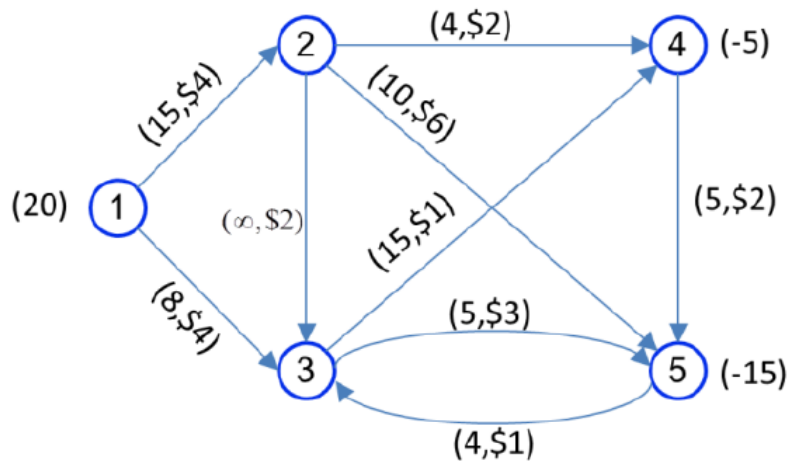
تا کنون به بررسی مسئله برنامه ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله حمل و نقل که حالت خاصی از مسئله جریان در شبکه است، خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قید های ظرفیت بعضی از خطوط حمل و نقل را محدود می کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول ها است.

مسئله عمومی جریان در شبکه

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد.



در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان $i-j$ است.

مسئله عمومی جریان در شبکه



مدل برنامه ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می شود.

$$\text{Min} \quad 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53}$$

s.t.

$$(1) \quad x_{12} + x_{13} = 20$$

$$(2) \quad -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0$$

$$(3) \quad -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0$$

$$(4) \quad -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5$$

$$(5) \quad -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15$$

$$x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4.$$

مسئله عمومی جریان در شبکه

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می کند که جریان خروجی از گره ۱ ($x_{12} + x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23} + x_{24} + x_{25}$) است.

مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱ و -۱ اخذ می کنند. به علاوه دقیقاً در دو معادله توازن ظاهر می شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می گیرند و ۱- مربوطه به گره ای که به آن وارد می شوند.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

مسئله حمل و نقل

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبدیل به فرم های ساده تری است که در ادامه مسئله حمل و نقل را بیان می کنیم.

مسئله حمل و نقل

مسئله حمل و نقل نوعی مدل جریان در شبکه است که در آن نقطه واسط (مانند گره های ۲ و ۳ در شکل فرم عمومی) وجود ندارد. برای بیان فرم ریاضی مسئله حمل و نقل، پارامترهای زیر تعریف می شود.

a_i : تعداد واحدهای موجود در منبع i ($i = 1, \dots, m$)

b_j : تعداد واحدهای مورد نیاز در مقصد j ($j = 1, \dots, n$)

c_{ij} : هزینه حمل و نقل هر واحد در منبع i به مقصد j ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$)

مسئله حمل و نقل

فرض می شود که مجموع کل تعداد واحدهای موجود در منابع با تعداد واحدهای مورد نیاز در مقاصد **برابر** باشند، یعنی:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

اگر فرض فوق برقرار **نباشد**، با اعمال تغییراتی می توان فرض فوق را برقرار کرد که بعداً به آن خواهیم پرداخت.

اگر x_{ij} برابر تعداد واحدهایی که از منبع i به مقصد j حمل می شود در نظر گرفته شود، آنگاه **مسئله حمل و نقل** را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m (-x_{ij}) = -b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

مسئله حمل و نقل

مثال: محصولات یک شرکت بزرگ کنسرو سازی در سه کارخانه تولید می شود و به وسیله کامیون به چهار انبار مستقر می شوند. چون هزینه انتقال مبلغ قابل توجهی است، لذا مدیریت به دنبال کمینه کردن این هزینه ها است. اطلاعات مربوط به هزینه حمل در جدول زیر آمده است. مدل برنامه ریزی خطی این مسئله را بنویسید.

انبار \ کارخانه	1	2	3	4	میزان تولید (عرضه) برحسب کامیون
1	464	513	654	867	75
2	352	416	690	791	125
3	995	682	388	685	100
میزان احتیاج (تقاضا) برحسب کامیون	80	65	70	85	

مسئله حمل و نقل



(حل) مدل برنامه ریزی خطی مسئله فوق به صورت زیر بیان می شود.

$$\text{Min } 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$$

s.t.

$$\begin{array}{llllllllll} (1) & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & + x_{14} & & & & & & = 75 \\ (2) & & & & & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & + x_{24} & & = 125 \\ (3) & & & & & & & & & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & + x_{34} & = 100 \\ (4) & x_{11} & & & & + x_{21} & & & & + x_{31} & & & & = 80 \\ (5) & & x_{12} & & & & + x_{22} & & & & + x_{32} & & & = 65 \\ (6) & & & x_{13} & & & & + x_{23} & & & & + x_{33} & & = 70 \\ (7) & & & & x_{14} & & & & + x_{24} & & & & + x_{34} & = 85 \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4.$$

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

از آنجاییکه مسئله حمل و نقل حالتی خاص از مسئله برنامه ریزی خطی است، لذا می‌توان با استفاده از روش سیمپلکس حل کرد. ولی از آن جاییکه ساختار مسئله حمل و نقل خاص است می‌توان از روش ساده تری جواب بهینه را بدست آورد. به جای این که از جدول سیمپلکس برای یافتن جواب بهینه استفاده کرد، می‌توان از جدول زیر ذخیره اطلاعات جدول سیمپلکس در مسئله حمل و نقل استفاده کرد.

مقصد مبدا	1	2	...	n	عرضه
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2
...	...	...		...	...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m
تقاضا	d_1	d_2	...	d_n	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

در صورتیکه متغیر اساسی یا غیراساسی باشد، اطلاعات هر خانه به صورت زیر تعیین می شود.

x_{ij} یک متغیر غیراساسی است x_{ij} یک متغیر اساسی است

c_{ij}	0

c_{ij}	$c_{ij} - u_i - v_j$

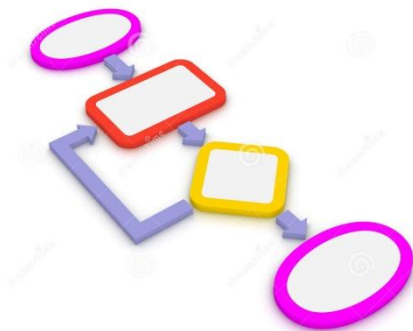
ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

قدم ابتدایی:

در این قدم یک جواب اساسی موجه بدست می آوریم. در مسئله حمل و نقل روش های مختلفی برای تولید جواب اولیه وجود دارد:

روش گوشه شمال غربی (north west corner rule):

ابتدا متغیر x_{11} را انتخاب کنید که به عنوان **متغیر اساسی** در نظر می گیریم. در ادامه اگر x_{ij} **متغیر اساسی** باشد، حال چنانچه عرضه مبدأ i تمام نشده باشد، متغیر x_{ij+1} و در غیر این صورت متغیر x_{i+1j} را به عنوان **متغیر اساسی** انتخاب می کنیم.



ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14	13	22	17	50 20
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20	70	30	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	14	13	22	17	50 200
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	300	200	70	30	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	14	13	22	17	50 200
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	300	200	70	30	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	13 → 60	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 10	30	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	13 → 60	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50 40
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 20 0
2	14	14	13	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50 40 10
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 10 0	30 0	60	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

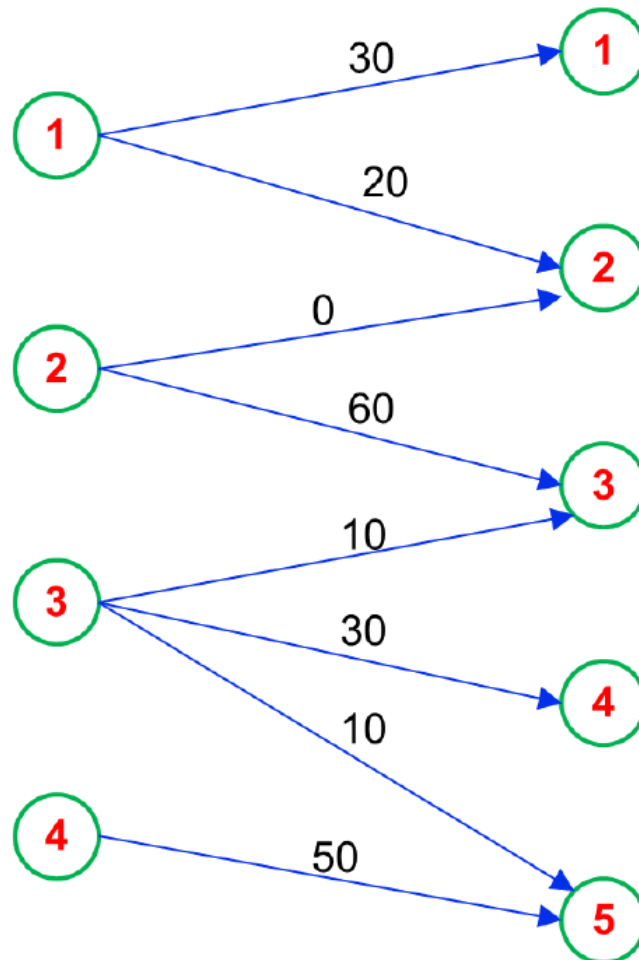
مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 20 0
2	14	14	13	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50 40 10 0
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 10 0	30 0	60 50	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	13	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50 40 100
4	M	0	M	0	0	50 0
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30 0	60 50 0	

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

جواب اساسی اولیه به صورت زیر است.



ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



روش تخمین فوگل (Vogel's Approximation)

روش قبلی هزینه را در نظر نمی گیرد، اما روش هایی که هزینه را در نظر **نمی گیرد** می تواند به جواب های منجر شود که هزینه کل بسیار زیاد شود. روش تخمین فوگل برای رفع این مشکل پیشنهاد شده است و آنقدر اثر بخش است که گاهی برای بدست آوردن جواب **بهینه** تقریبی مورد استفاده قرار می گیرد. **روش تخمین فوگل** به این صورت عمل می کند که به ازای هر سطر یا ستونی که هنوز تحت بررسی است، تفاوت بین کوچکترین و ما قبل کوچکترین هزینه واحد c_{ij} محاسبه کنید. در سطر یا ستونی که تفاوت آن از همه **بزرگتر** است، متغیر که هنوز حذف نشده است و هزینه واحد آن از همه کمتر است را انتخاب می کند.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



تکرار ۱:

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	22	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	19	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	23	M	50	$19 - 19 = 0$
4	M	0	M	0	0	50	$0 - 0 = 0$
تقاضا	30	20	70	30	60		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$14 - 0 = 14$	$13 - 13 = 0$	$19 - 0 = 19$	$15 - 0 = 15$		

ستون با بیشترین اختلاف

$0 = \min(0, 23, 19, 22)$

ستون ۴ حذف می شود و $x_{44} = 30$ در نظر گرفته می شود.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

تکرار ۲:

مقصد \ مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
4	M	0	M	0	20	$0 - 0 = 0$
تقاضا	30	20	70	60		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$14 - 0 = 14$	$13 - 13 = 0$	$15 - 0 = 15$		

ستون با بیشترین اختلاف
 $0 = \min(0, 17, 15, M)$

سطر ۴ حذف می شود و $x_{45} = 20$ در نظر گرفته می شود.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

تکرار ۳:

مقصد مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	70	40		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$16 - 14 = 2$	$13 - 13 = 0$	$17 - 15 = 2$		

سطر با
بیشترین
اختلاف

$$13 = \min(17, 13, 16, 16)$$

سطر ۱ حذف می شود و $x_{13} = 50$ در نظر گرفته می شود.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

تکرار ۴:

مقصد \ مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	20	40		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$	$20 - 13 = 7$	$M - 15 = 2$		

$15 = \min(15, M, 40)$

ستون با بیشترین اختلاف

ستون ۵ حذف می شود و $x_{25} = 40$ در نظر گرفته می شود.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

تکرار ۵:

مقصد \ مبدا	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	20	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	20		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$	$20 - 13 = 7$		

ستون با بیشترین اختلاف

$13 = \min(13, 20)$

ستون ۳ حذف می شود و $x_{23} = 20$ در نظر گرفته می شود.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



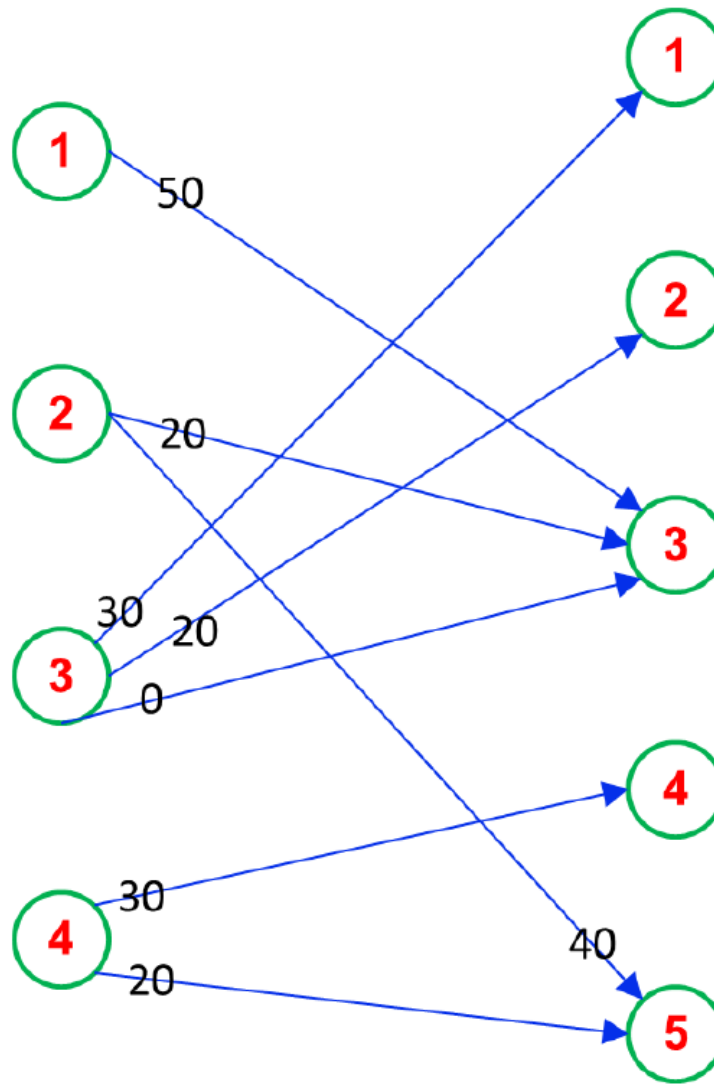
تکرار ۶:

مقصد مبدا	1	2	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	0	$14 - 14 = 0$
3	19	19	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$		

جدول نهایی است و داریم: $x_{33} = 0; x_{32} = 20; x_{31} = 30$

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

جواب اساسی اولیه برای مسئله حمل و نقل به صورت زیر می شود.



ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



دستور توقف

هدف دستور توقف، آزمون بهینگی جواب اساسی موجه فعلی است. یک جواب اساسی موجه بهینه است **اگر و فقط اگر** به ازای کلیه متغیرهای **غیر اساسی** x_{ij} رابطه $C_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ برقرار باشد.

برای کنترل شرایط بالا باید مقدار u_i و v_j را محاسبه کرد. در صورتیکه متغیر x_{ij} **اساسی** باشد آنگاه $C_{ij} = u_i + v_j$ خواهد بود که از حل دستگاه معادلات برای متغیرهای اساسی می توان u_i و v_j را محاسبه کرد. به دلیل این که تعداد معادلات یک واحد از تعداد متغیرها کمتر است می توان برای یافتن جواب این دستگاه معادلات، یکی از متغیرها را مساوی با مقدار **دلخواه** گرفت و با توجه به ساختار ساده دستگاه معادلات، مقدار سایر متغیرها را بدست آورد.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



برای نشان دادن این موضوع، اگر متغیرهای اساسی x_{31} ، x_{32} ، x_{34} ، x_{21} ، x_{23} ، x_{13} ، x_{15} و x_{45} باشند، نگاه داریم:

$$x_{31} : 19 = u_3 + v_1 \quad x_{23} : 13 = u_2 + v_3$$

$$x_{32} : 19 = u_3 + v_2 \quad x_{13} : 13 = u_1 + v_3$$

$$x_{34} : 23 = u_3 + v_4 \quad x_{15} : 17 = u_1 + v_5$$

$$x_{21} : 14 = u_2 + v_1 \quad x_{45} : 0 = u_4 + v_5$$

اگر $u_3 = 0$ قرار دهیم (چون u_3 بیشترین حضور در معادلات را دارد)، مقادیر سایر متغیرها به صورت زیر بدست می آید.

$$v_1 = 19; v_2 = 19; v_4 = 23; u_2 = 14 - 19 = -5; v_3 = 13 - (-5) = 18$$

$$u_1 = 13 - 18 = -5; v_5 = 17 - (-5) = 22; u_4 = -22.$$

با در اختیار داشتن مقدار متغیرهای همزاد می توان شرایط بهینگی را کنترل کرد.

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

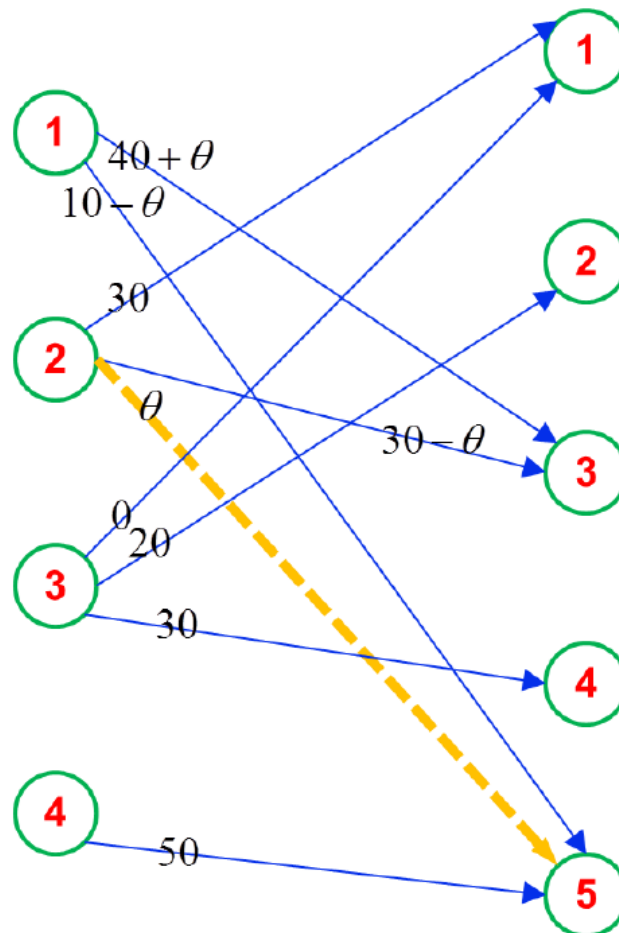
قدم تکراری

در این قدم، متغیر اساسی ورودی و متغیر اساسی خروجی را تشخیص می دهیم. در روش سیمپلکس مسئله حمل و نقل، متغیری که منفی ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را داشته باشد، به عنوان متغیر اساسی ورودی و در نظر می گیریم. براساس مقادیر و از مرحله قبل، جدول سیمپلکس مسئله حمل و نقل به صورت زیر می شود.

مقصد مبدا	1	2	3	4	5	عرضه	u_i
1	16 +2	16 +2	13 40	22 +4	17 10	50	-5
2	14 30	14 0	13 30	19 +1	15 -2	60	-5
3	19 0	19 20	20 +2	23 30	M M-22	50	0
4	M M+3	0 +3	M M+4	0 -1	0 50	50	-22
تقاضا	30	20	70	30	60		
v_i	19	19	18	23	22		

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

در جدول فوق، متغیر x_{25} دارای کمترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ است و به عنوان متغیر ورودی استفاده می شود. برای یافتن متغیر اساسی خروجی از پایه یک سری کارهای زنجیری نسبتاً ساده به صورت زیر انجام می شود.



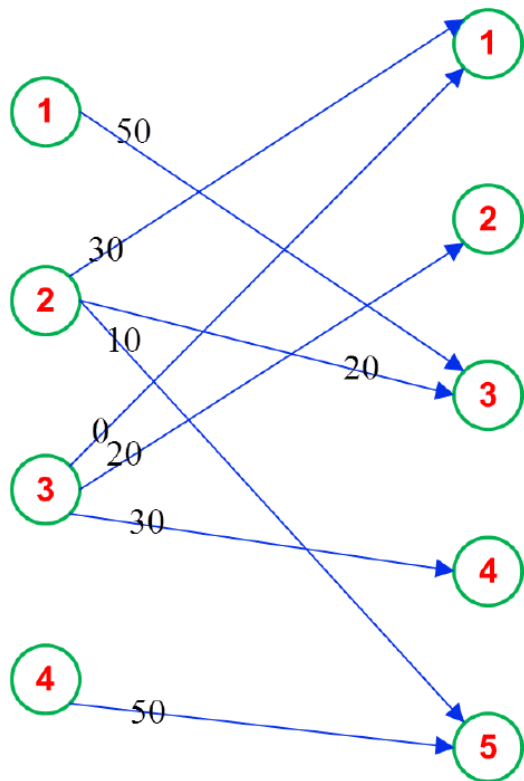
ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

در شکل فوق، مقدار θ تا اندازه ای باید افزایش یابد که هزینه کمان منفی نشود لذا خواهیم داشت:

$$10 - \theta \geq 0; 30 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta = 10$$

با افزایش مقدار θ به اندازه ۱۰، متغیر x_{15} از جواب اساسی خارج می شود و x_{15} متغیر اساسی خروجی

است. در این صورت جواب اساسی موجه جدید به صورت زیر می شود.



ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل



قدم ابتدایی:

جواب اساسی موجه ابتدایی را با استفاده از یکی از دو روش شمال غربی یا روش تخمین فوگل بدست آورید.

دستور توقف:

دستگاه معادله $c_{ij} = u_i + v_j$ را برای متغیرهای اساسی حل کنید و مقدار متغیرهای همزاد u_i و v_j را بدست آورید. در صورتیکه برای تمامی متغیرهای غیراساسی رابطه $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه جواب اساسی موجه فعلی بهینه است.

قدم تکراری:

قسمت ۱: متغیر غیر اساسی x_{ij} که منفی ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را به عنوان متغیر اساسی ورود در نظر بگیرید.

قسمت ۲: متغیر اساسی خروجی را براساس عکس العمل های زنجیره ای تعیین کنید.

قسمت ۳: جواب اساسی موجه جدید را مشخص کنید.

تمرین ها

مثال: یک شرکت کمپودسازی در سه محل شیگالو، کلیولند، و بوستون کارخانه دارد. در هفته گذشته میزان تولید این سه کارخانه به ترتیب ۳۵، ۵۰، و ۴۰ واحد بوده است. شرکت می خواهد ۴۵ واحد را به دالاس، ۲۰ واحد از آن به آتلانتا، و ۳۰ واحد را به سانفرانسیسکو و ۳۰ واحد دیگر را به فیلادلفیا حمل نماید. هزینه تولید و توزیع هر کارخانه به هر مرکز توزیع در جدول زیر آمده است. بهترین روش حمل چیست؟

انبار کارخانه	دالاس 1	آتلانتا 2	سانفرانسیسکو 3	فیلادلفیا 4	عرضه (تعداد)
کلیولند 1	8	6	10	9	35
شیکاگو 2	9	12	13	7	50
بوستون 3	14	9	16	5	40
نیازها (تعداد)	45	20	30	30	[125]

تمرین ها



حل:

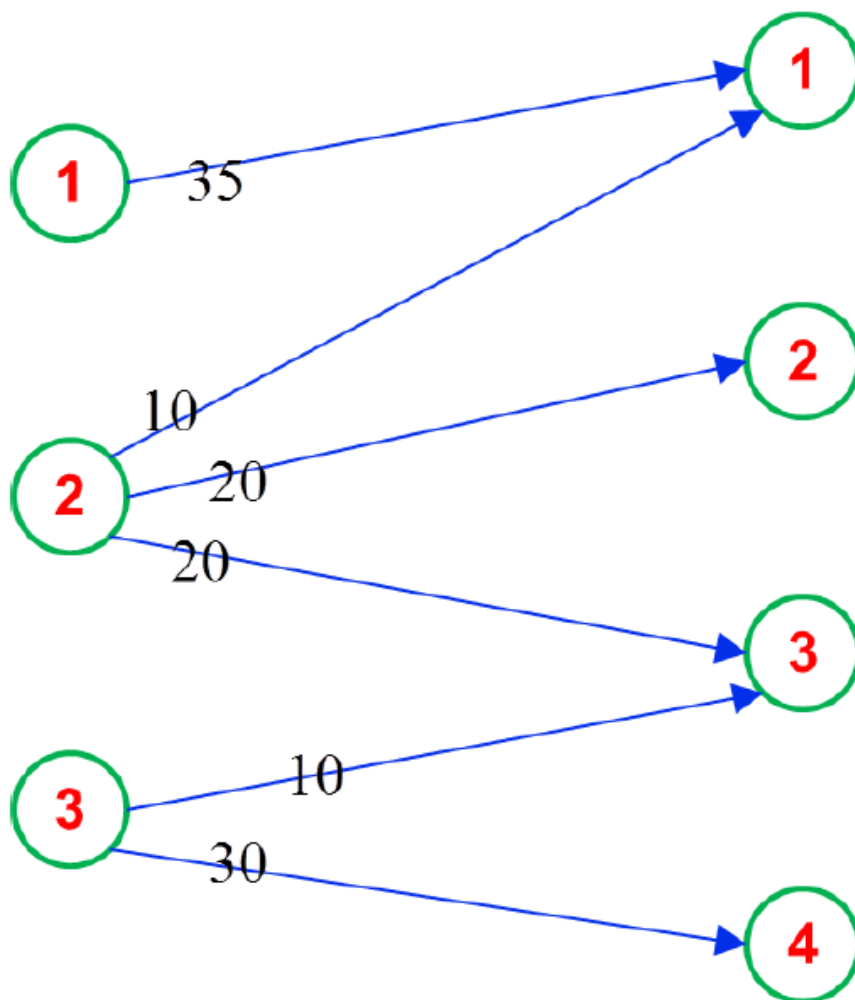
گام یافتن جواب اساسی اولیه:

۱- روش گوشه شمالی غربی

مقصد مبدا					عرضه
	1	2	3	4	
1	8 35	6	10	9	350
2	9 10	12 20	13 20	7	50 40 200
3	14	9	16 10	5 30	40 300
تقاضا	45 100	200	30 100	300	

تمرین ها

جواب اساسی اولیه به روش گوشه شمالی غربی با تابع هدف $z = 1180$ به صورت زیر است.



تمرین ها



۲- روش تقریب فوگل

کاربرد روش تقریب فوگل برای یافتن جواب اساسی اولیه به صورت زیر می شود.

تکرار ۱:

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6	10	9	35	2
2	9	12	13	7	50	2
3	14	9	16	5	40 10	4 سطر با بیشترین اختلاف
تقاضا	45	20	30	30 0		
اختلاف ستونی	1	3	3	2		

ستون ۴ حذف می شود و $x_{34} = 30$ در نظر گرفته می شود.

تمرین ها



تکرار ۲:

مقصد \ مبدا	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6	10	35	2
2	9	12	13	50	3
3	14	9	16	100	5
تقاضا	45	20 10	30		
اختلاف ستونی	1	3	3		

سطر با بیشترین اختلاف

10

سطر ۳ حذف می شود و $x_{32} = 30$ در نظر گرفته می شود.

تمرین ها

تکرار ۳:

مقصد \ مبدا	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6	10	35 25	2
2	9	12	13	50	3
تقاضا	45	20 100	30		
اختلاف ستونی	1	6	3		

ستون با بیشترین اختلاف

ستون ۲ حذف می شود و $x_{12} = 10$ در نظر گرفته می شود.

تمرین ها

تکرار ۴:

مقصد مبدا	1	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	10	35 25	2
2	9	13	50 5	4
تقاضا	45 0	30		
اختلاف ستونی	1	3		

ستون با بیشترین اختلاف

ستون ۱ حذف می شود و $x_{21} = 45; x_{13} = 25; x_{23} = 5$ در نظر گرفته می شود.

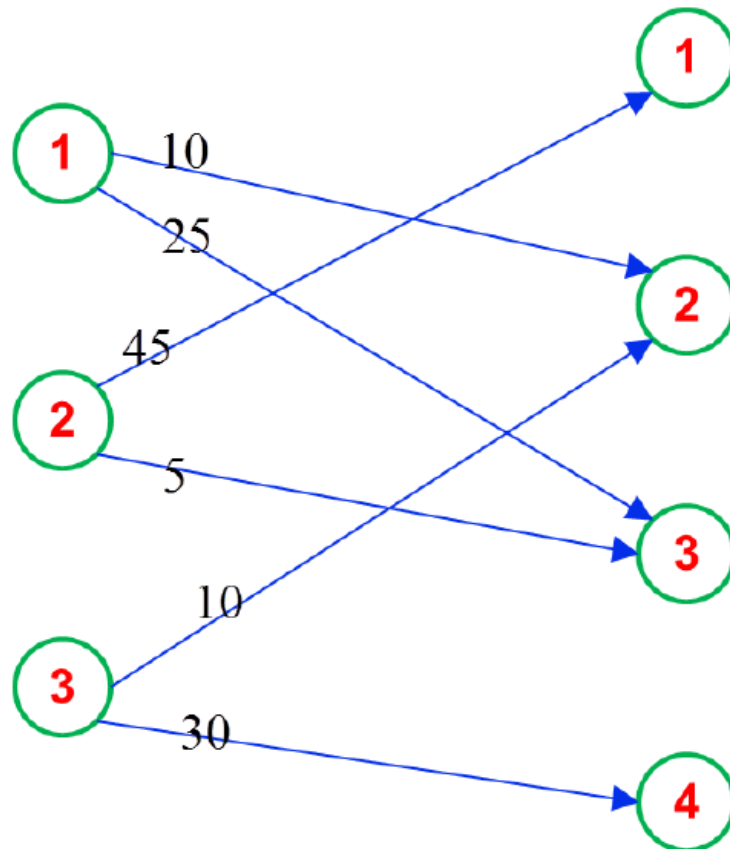
لذا جواب اساسی اولیه از روش فوگل به صورت زیر می شود.

$$x_{34} = 30; x_{32} = 10; x_{12} = 10; x_{21} = 45; x_{13} = 25; x_{23} = 5.$$

مقدار تابع هدف فوق برابر با $Z = 1020$.

تمرین ها

از مقایسه مقدار تابع هدف دو روش گوشه شمال غربی و تخمین فوگل می توان فهمید که روش تخمین فوگل منجر به جواب اساسی با تابع هدف بهتری می شود. لذا جواب اولیه مورد استفاده در ادامه الگوریتم به صورت زیر است.



تمرین ها

قدم توقف : با فرض $u_1 = 0$ ، مقدار متغیرهای همزاد به صورت زیر می شود.

$$v_1 = 6; v_2 = 6; v_3 = 10; v_4 = 2; u_1 = 0; u_2 = 3; u_3 = 3$$

در جدول زیر، مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ برای متغیرهای غیراساسی محاسبه می شود.

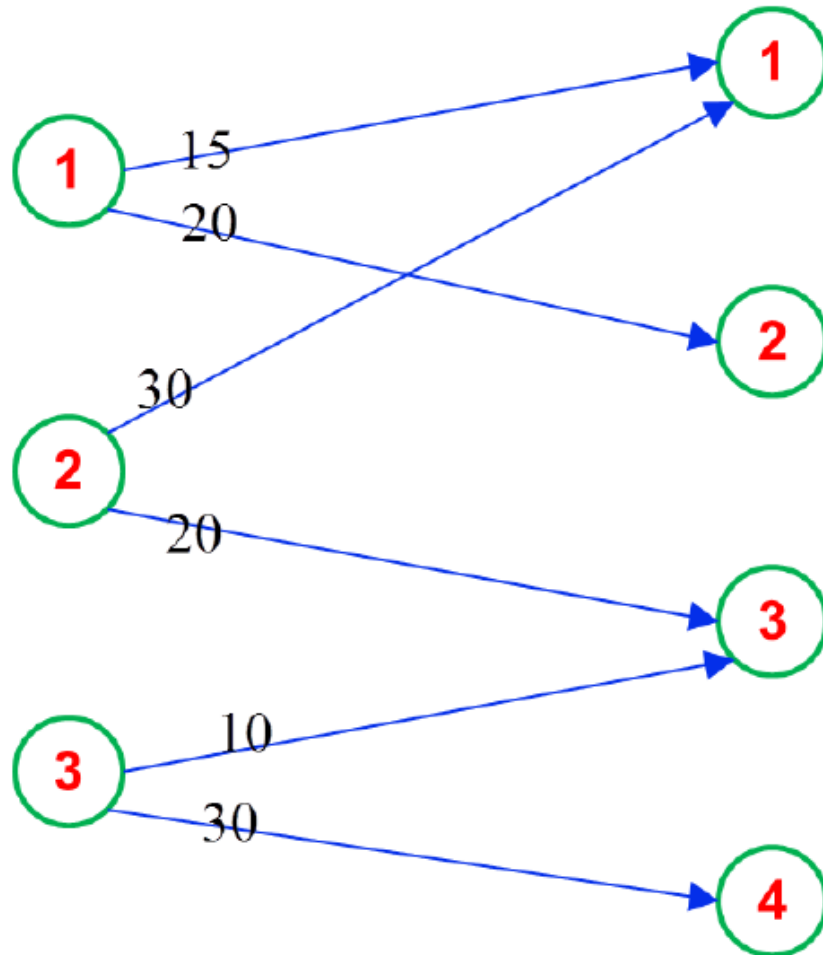
مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 +2	6	10	9 7	35	0
2	9	12 +3	13	7 2	50	3
3	14 +5	9	16 3	5	40	3
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	2		

چون هیچ متغیر غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ برقرار نیست لذا به جواب بهینه رسیدیم. ملاحظه می شود

که تقریب فوگل منجر به جواب بهینه رسیده است. **46**

تمرین‌ها

برای تمرین بیشتر، فرض کنید که جواب اولیه به صورت زیر داده شده است:



قدم توقف : با فرض $u_1 = 0$ ، مقدار متغیرهای همزاد به صورت زیر می شود:

$$\left. \begin{array}{l} 8 = u_1 (= 0) + v_1 \\ 6 = u_1 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_1 \\ 13 = u_2 + v_3 \\ 16 = u_3 + v_3 \\ 5 = u_3 + v_4 \end{array} \right\} \rightarrow v_1 = 8; v_2 = 6; v_3 = 12; v_4 = 1; u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = 4.$$

تمرین ها

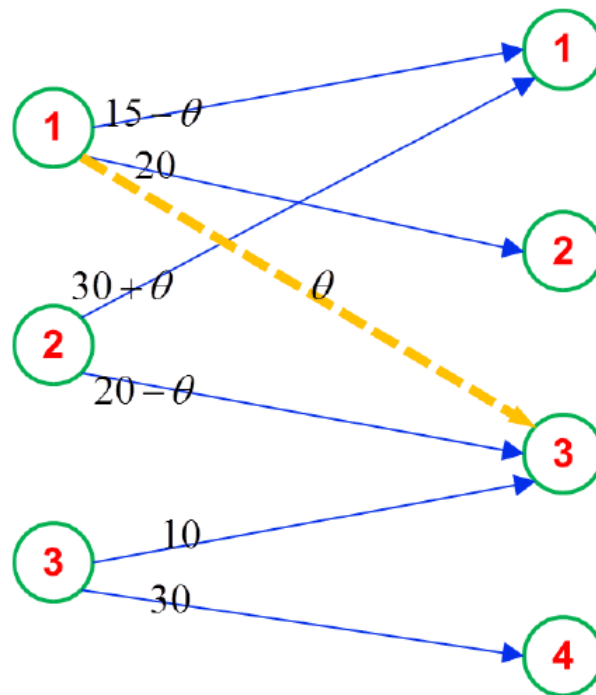
در جدول زیر، مقدار $C_{ij} - u_i - v_j$ برای متغیرهای غیراساسی محاسبه می شود.

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8	6	10	9	35	0
2	9	12	13	7	50	1
3	14	9	16	5	40	4
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	8	6	12	1		

تمرین‌ها

چون برای دو متغیر غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ است، لذا جواب اساسی موجه فعلی بهینه نیست و نیاز به پیدا کردن جواب بهبود یافته داریم. x_{13} را به عنوان متغیر ورودی در نظر می‌گیریم. برای یافتن متغیر اساسی خروجی به صورت زیر عمل می‌شود.

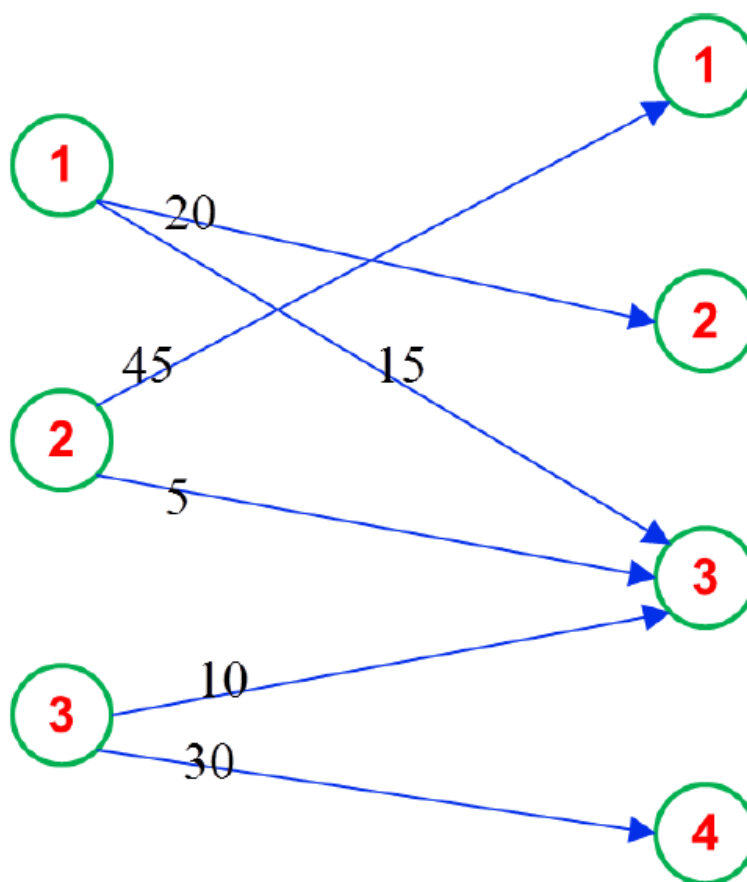
قدم تکراری



$$\left. \begin{array}{l} 15 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 15 \\ 20 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 20 \end{array} \right\} \rightarrow \theta_{\max} = 15$$

تمرین ها

لذا متغیر اساسی x_{11} از پایه خارج و متغیر غیر اساسی x_{13} به پایه وارد می شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می شود.



تمرین ها

دستور توقف:

با فرض $u_1 = 0$ می توان مقدار متغیرهای همزادی را به صورت زیر محاسبه کرد.

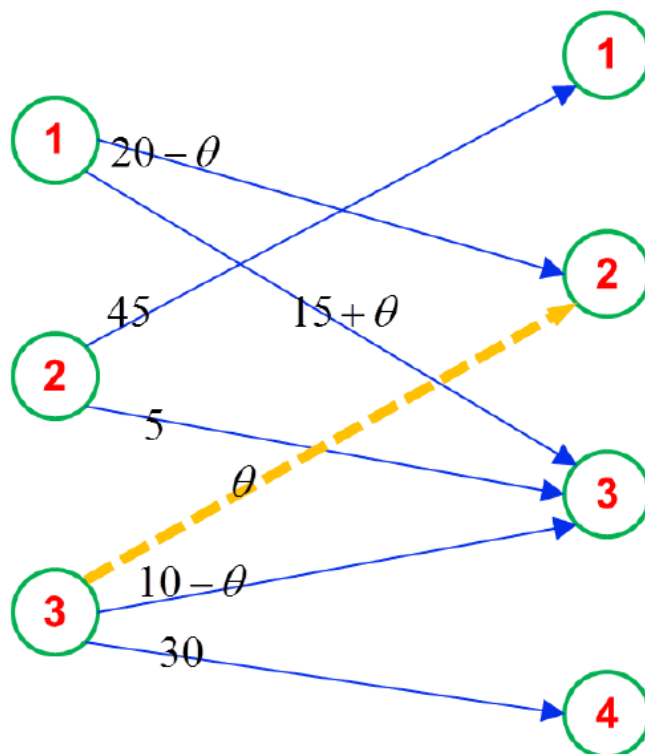
$$v_1 = 6; v_2 = 6; v_3 = 10; v_4 = -1; u_1 = 0; u_2 = 3; u_3 = 6.$$

در جدول زیر مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ متغیرهای غیر اساسی آورده شده است.

مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 2	6	10	9 +10	35	0
2	9	12 +3	13	7 +5	50	3
3	14 +2	9	16 -3	5	40	6
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	-1		

تمرین ها

متغیر غیر اساسی x_{32} وارد پایه می شود. برای یافتن اینکه کدام متغیر اساسی خارج می شود، به صورت زیر عمل می کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} 20 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 20 \\ 10 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 10 \end{array} \right\} \rightarrow \theta_{\max} = 10$$

تمرین ها

در جدول زیر مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ متغیرهای غیر اساسی آورده شده است.

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 +2	6	10	9 +7	35	0
2	9	12 +3	13	7 +2	50	3
3	14 +5	9	16 +1	5	40	3
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	2		

شرط بهینگی برقرار است و لذا جواب اساسی فعلی، جواب بهینه است.

تمرین‌ها

تمرین: مسئله حمل و نقل با جدول هزینه زیر مفروض است. با استفاده از روش گوشه شمال غربی و روش تخمین فوگل یک جواب اساسی ابتدایی پیدا کنید. تعداد تکرارهای سیمپلکس در هر یک از دو جواب‌های اولیه را با هم مقایسه کنید.

مقصد مبدا \	1	2	3	4	عرضه
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
نیازها	3	3	2	2	

تمرین ها

حل:

الف) روش گوشه شمال غربی:

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3 3	7 2	6 1	4 2	5	0
2	2 1	4 1	3 1	2 2	2	-3
3	4 2	3 2	8 1	5 2	3	2
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	3		

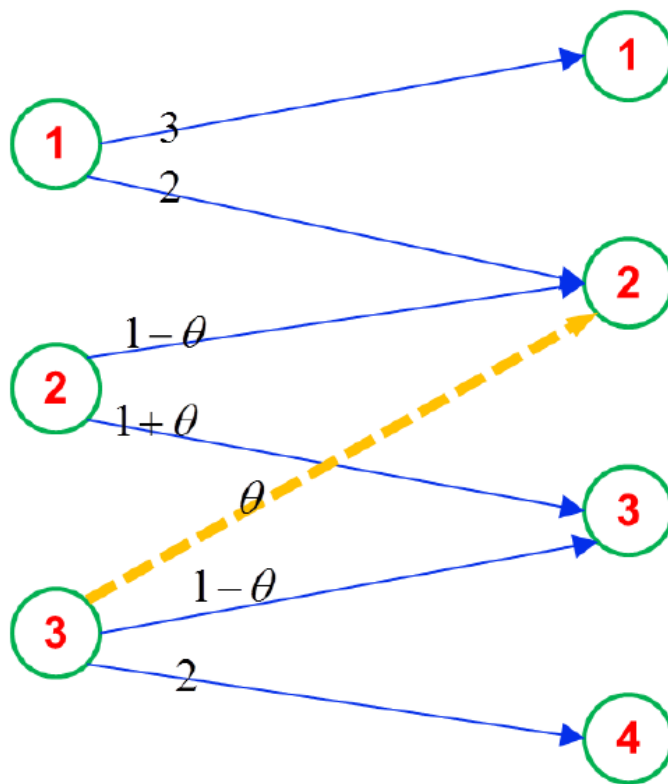
تمرین ها

مقدار تابع هدف جدول فوق برابر با ۴۸ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3 0	7 0	6 0	4 +1	5	0
2	2 +2	4 0	3 0	2 +2	2	-3
3	4 -1	3 -6	8 0	5 0	3	2
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	3		

تمرین ها

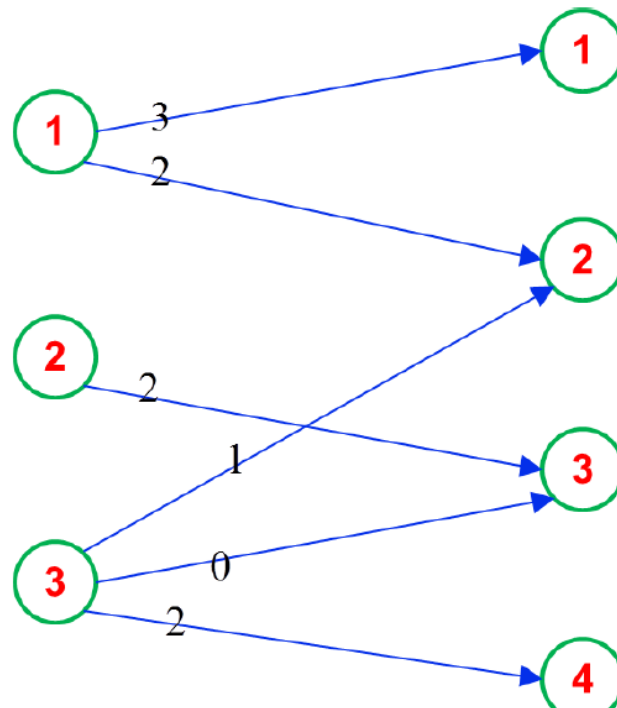
متغیر x_{32} به عنوان متغیر اساسی ورودی در نظر گرفته می شود. برای تعیین متغیر اساسی خروجی به صورت زیر عمل می کنیم.



$$1 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta_{\max} = 1$$

تمرین‌ها

متغیر x_{22} به عنوان متغیر خروجی از جواب اساسی در نظر گرفته شود که در این صورت جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود.



با فرض $u_1 = 0$ ، سایر متغیرهای همزاد به صورت زیر است:

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 7; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -4; u_3 = 1.$$

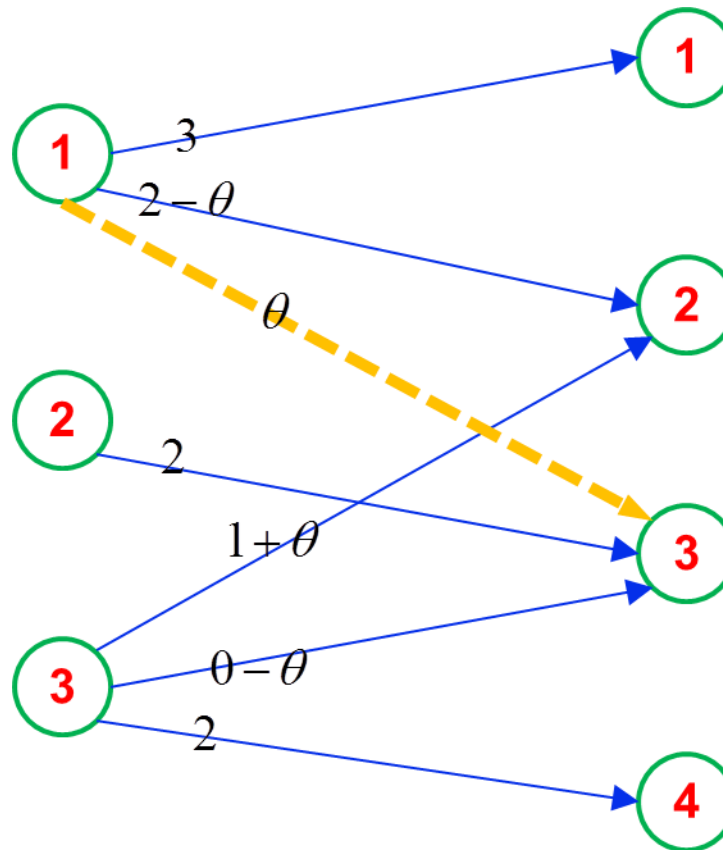
تمرین ها

مقدار تابع هدف در این تکرار برابر با ۴۲ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3 -1	7	6	4 0	5	0
2	2 +3	4 +6	3	2 +2	2	-4
3	4 0	3	8	5	3	1
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	7	4		

تمرین ها

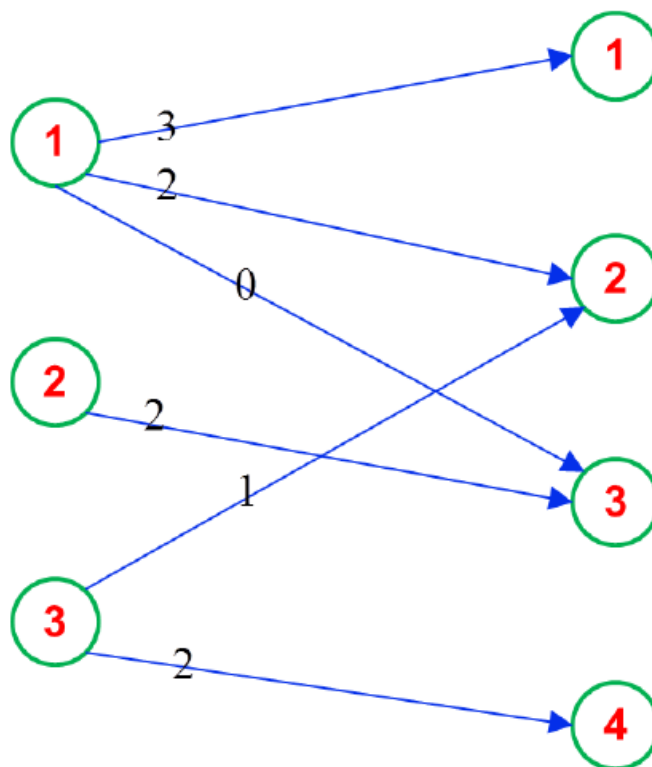
یکی از $c_{ij} - u_i - v_j$ نامثبت هستند، لذا شرط بهینگی برقرار نیست. متغیر x_{13} وارد متغیرهای اساسی می شوند.



$$2 - \theta \geq 0; -\theta \geq 0 \rightarrow \theta_{\max} = 0$$

تمرین ها

با $\theta = 0$ متغیر x_{33} از جواب اساسی خارج و متغیر x_{13} وارد جواب اساسی می شود. لذا جواب اساسی به صورت زیر می شود.



تمرین‌ها

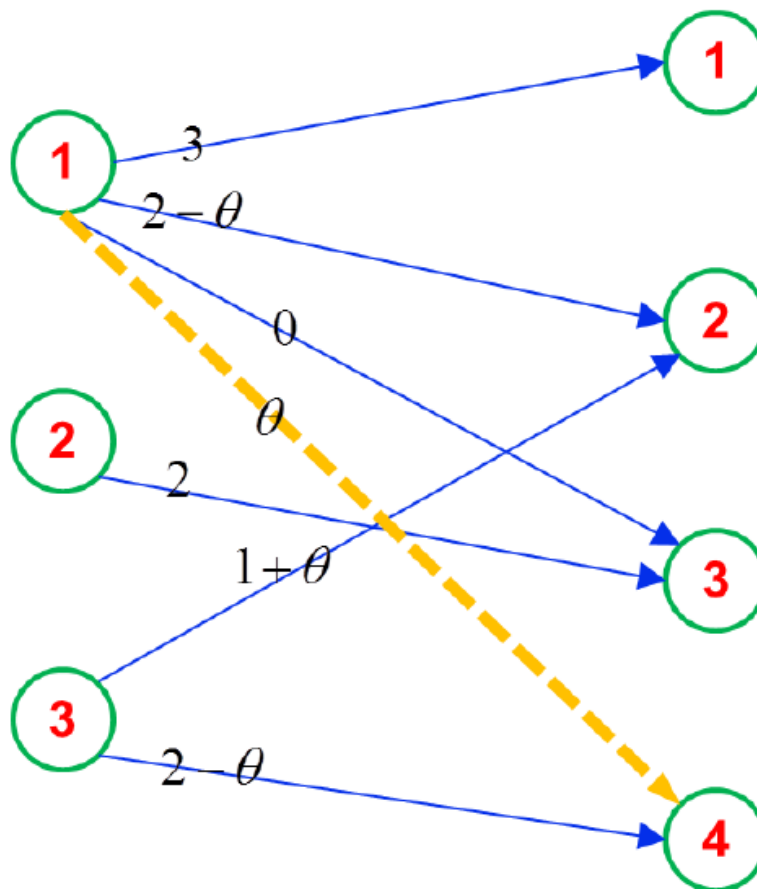
مقدار تابع هدف در این تکرار برابر ۴۲ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

$$v_1 = 3; v_2 = 7; v_3 = 6; v_4 = 9; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = -4.$$

برای کنترل بهینگی از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

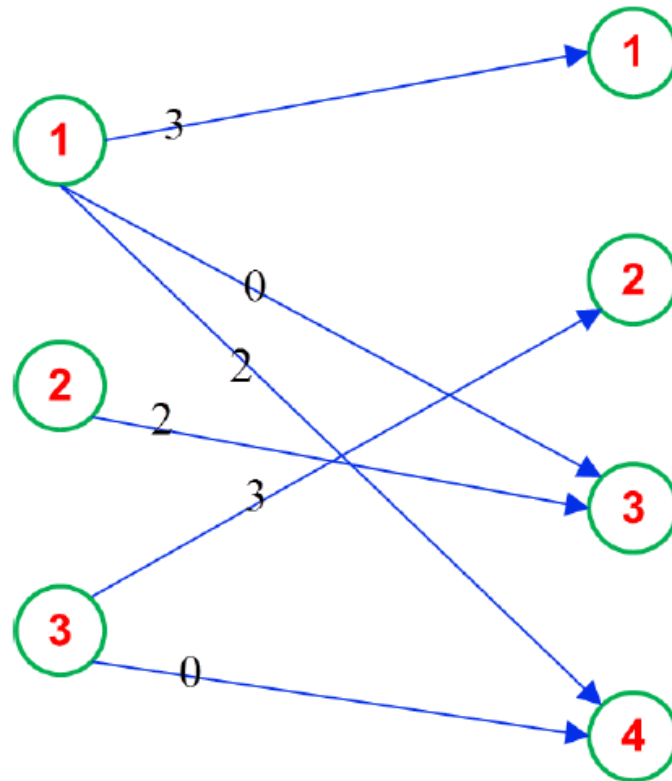
مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7	6	4	5	0
2	2	4	3	2	2	-3
3	4	3	8	5	3	-4
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	9		

تمرین ها



تمرین ها

با قرار دادن $\theta = 2$ ، متغیر x_{12} از جواب های اساسی خارج می شود و جواب اساسی به صورت زیر می شود.



مقدار تابع هدف جواب اساسی فوق برابر با ۳۲ می شود. با فرض $u_1 = 0$ ، سایر متغیرهای همزاد به صورت زیر است:

تمرین ها

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 6; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = 1.$$

برای کنترل بهینگی از جدول زیر استفاده می کنیم.

مقصد مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7	6	4	5	0
2	2	4	3	2	2	-3
3	4	3	8	5	3	+1
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	6	4		

با توجه به اینکه کمان های غیراساسی مقدار نامنفی دارند، لذا به جواب بهینه رسیدیم. مقدار تابع هدف برابر ۳۲ می شود. تعداد تکرارهای برای رسیدن به جواب بهینه برابر ۳ است.

تمرین‌ها

ب) جواب اولیه با استفاده از روش تخمین فوگل به صورت زیر است.

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	7	6	4	5	1
2	2	4	3	2	0	0
3	4	3	8	5	3	1
تقاضا	3	3	0	2		
اختلاف ستونی	1	1	3	2		

ستون با بیشترین اختلاف

$$x_{23} = 2$$

تمرین ها

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	7	6	4	5	1
3	4	3	8	5	$\not\equiv 0$	1
تقاضا	3	$\not\equiv 0$	$\not\equiv 0$	2		
اختلاف ستونی	1	4	2	1		

ستون با بیشترین اختلاف

$$x_{32} = 3$$

تمرین ها

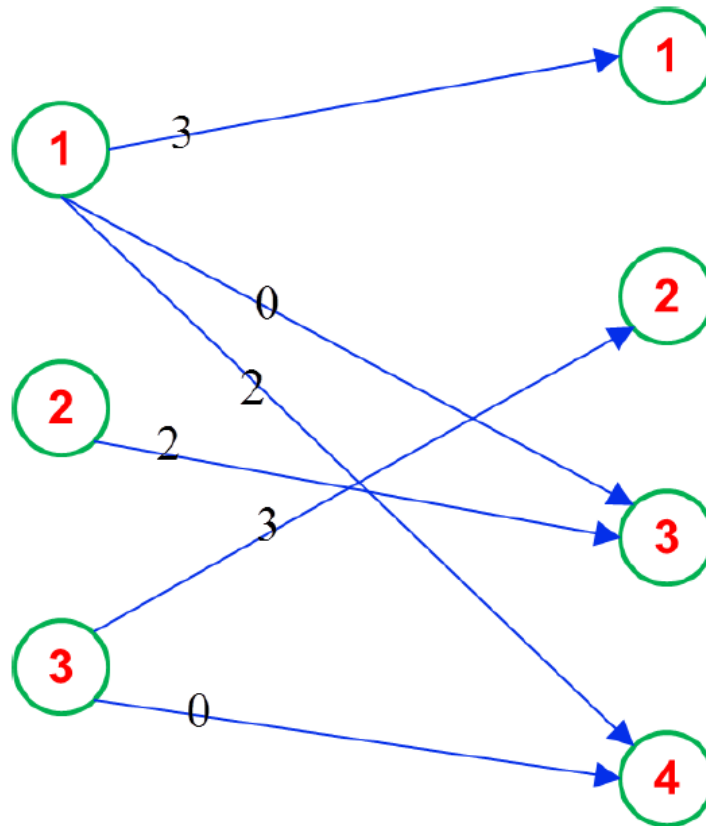
مقصد \ مبدا	1	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	6 0	4	5	1
3	4	8	5	$\neq 0$	1
تقاضا	3	$\neq 0$	2		
اختلاف ستونی	1	2	1		

ستون با بیشترین اختلاف

$$x_{13} = 0$$

تمرین ها

جواب بدست آمده از تخمین فوگل به صورت زیر است.



مقادیر متغیرهای همزاد به صورت زیر است:

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 6; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = 1.$$

تمرین ها

مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3 0	7 0	6 0	4 0	5	0
2	2 +2	4 +5	3 0	2 +1	2	-3
3	4 0	3 0	8 +1	5 0	3	1
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	6	4		

همان طور که مشاهده می شود، برای تمامی متغیرهای غیراساسی نامنفی است و لذا به جواب بهینه رسیدم. تعداد تکرار برای رسیدن به جواب بهینه با روش تخمین فوگل برابر یک است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com