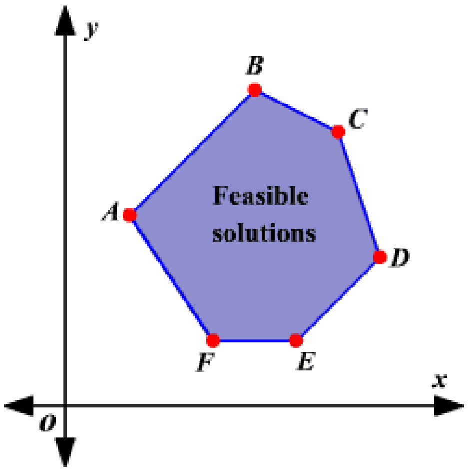
بهینه‌یاب

نخستین مرجع تحقیق در عملیات

LP IP NP Net DP

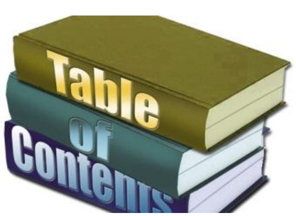
به نام خدا

درس ۱: برنامه ریزی خطی



www.behinehyab.com

فهرست مطالب



بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات چیست؟

تحقیق در عملیات را برخوردی علمی با تصمیم گیری هایی دانست که در جریان عملیات سیستم های سازمان یافته انجام می گیرند.

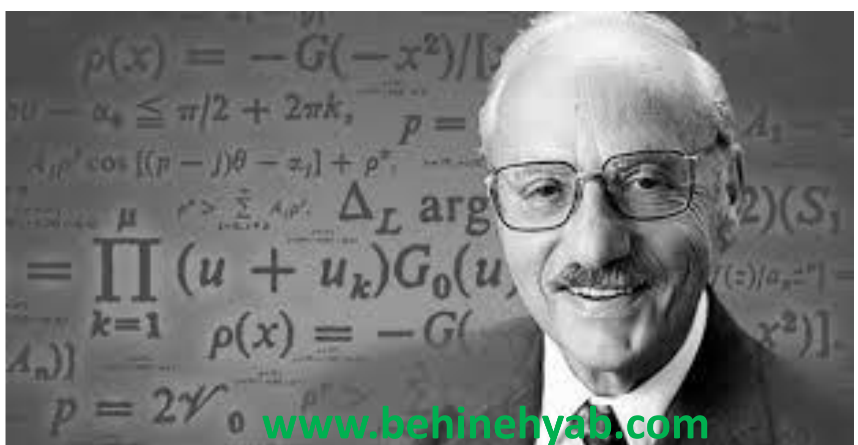
تحقیق درعملیات در رابطه با مسائل مربوط به هدایت و هماهنگی عملیات و فعالیت های گوناگون به کارگرفته می شود.

تحقیق در عملیات در زمینه های گوناگونی نظیر اقتصاد، تجارت، صنعت، دولت ، بهداشت و غیره مورد استفاده قرار می گیرد.

تحقیق در عملیات چیست؟

تحقیق در عملیات شامل بخش های مختلفی است که برنامه ریزی خطی ریاضی یکی از مهمترین بخش های آن است. در برنامه ریزی خطی از مدلی ریاضی به منظور تشریح مسئله مورد نظر استفاده می شود.

تولد برنامه ریزی خطی به سال ۱۹۴۷ میلادی باز می گردد که در آن زمان جورج دانتزیگ (George Dantzig)برای پروژه محاسبات علمی برنامه های بهینه، روش سیمپلکس را برای حل مسائل عمومی برنامه ریزی خطی ابداع کرد.



تحقیق در عملیات چیست؟

فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی

مثال: یک شرکت تولیدی درب و پنجره، داراه سه کارگاه است.

در کارگاه ۱ قاب های آلومینیومی و قسمت های فلزی تولید می شود.

در کارگاه ۲، قاب های چوبی تولید می شود.

در کارگاه ۳، برش شیشه و سوار کردن آن به قاب ها انجام می شود.

مدیریت این گارکاه ها به دنبال تولید دو محصول جدید هستند. محصول ۱، دری با قابی آلومینومی و محصول ۲ پنجره ای شیشه با قاب چوبی است. با توجه به این که هر دو محصول برای جوشکاری نیاز به کارگاه ۳ دارد، ظرفیت این کارگاه باعث می شود که رقابتی بین این دو محصول ایجاد شود. در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است.

فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی

در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است. هدف یافتن تعداد محصولات با بیشینه سود است.

کارگاه \ محصول	ظرفیت لازم برای تولید هر واحد (در هر دقیقه) 1	2	ظرفیت موجود (در هر دقیقه)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
سود هر واحد	3	5	

فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی

حل:

x_1 : تعداد محصولات نوع ۱

x_2 : تعداد محصولات نوع ۲

Z : سود حاصل از فروش

$$Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

بیشینه کردن سود حاصل از فروش

$$s.t.$$

$$x_1 \le 4$$

ظرفیت تولیدی کارگاه ۱

$$2x_2 \le 12$$

ظرفیت تولیدی کارگاه ۲

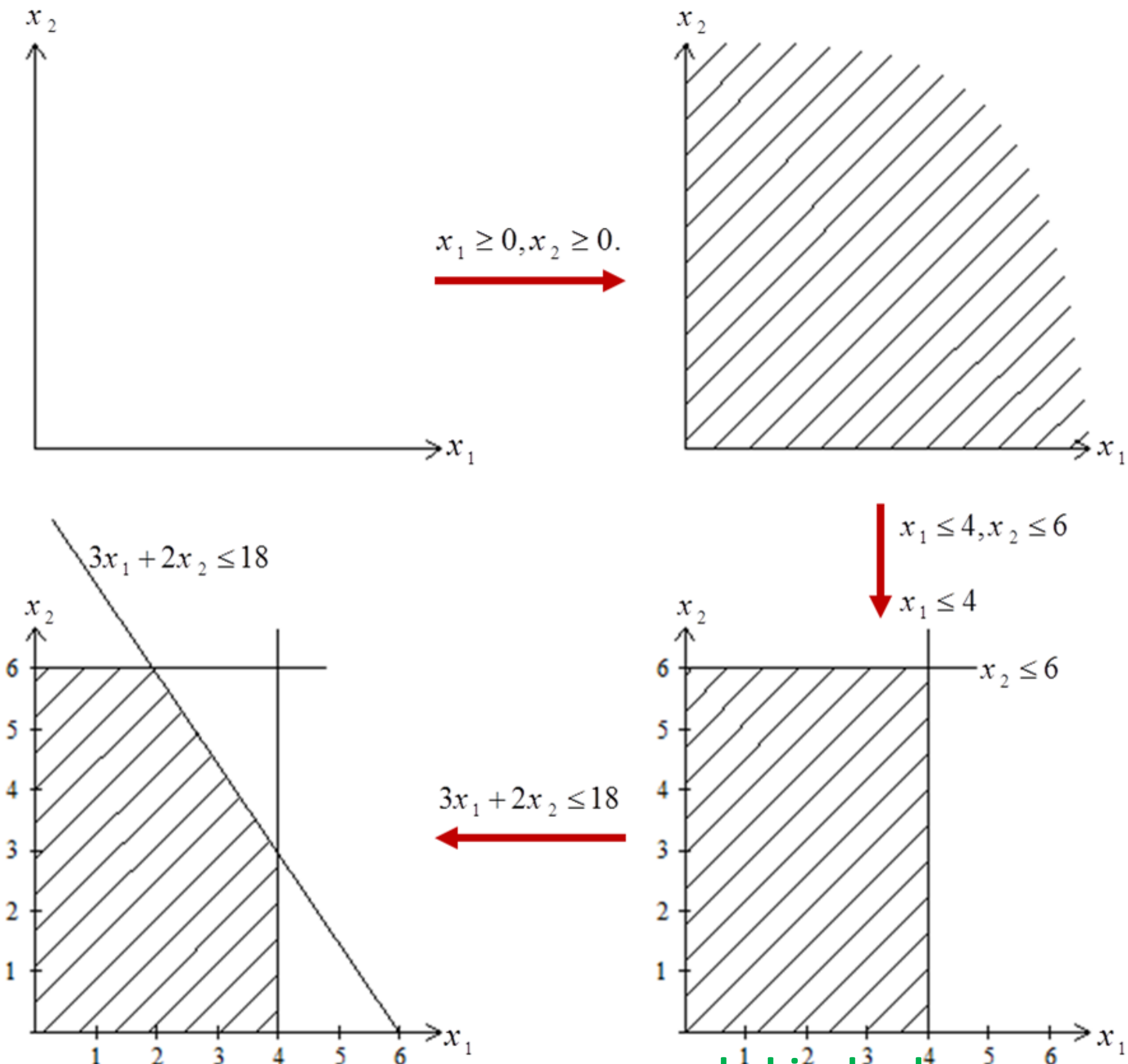
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

ظرفیت تولیدی کارگاه ۳

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

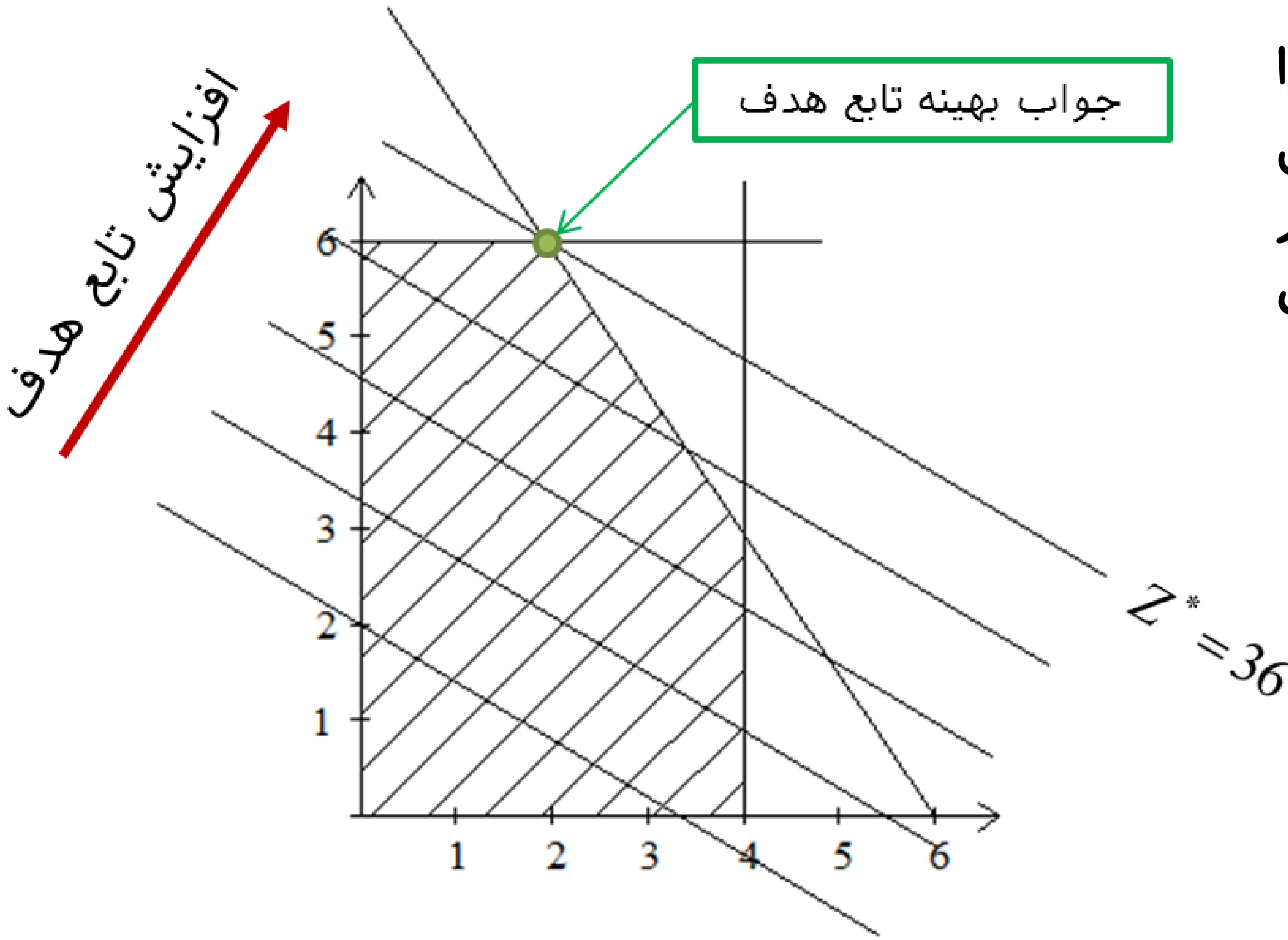
نامنفی بودن متغیرهای تصمیم گیری

فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی



به دلیل این که این مدل برنامه ریزی خطی شامل تنها دو متغیر است، می توان برای حل آن از روش ترسیمی بهره برد.

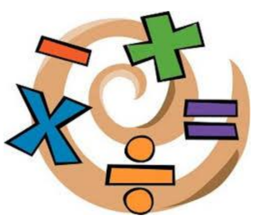
فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی



مقدار تابع هدف را تا انجایی افزایش می دهیم که تا در محدوده امکان پذیر جا بگیرید.

بیان ریاضی مدل برنامه ریزی خطی

محصول / منبع	میزان مصرف از منابع به ازای هر واحد از محصول 1	2	. . .	n	مقدار موجود از منبع
1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	b_m
مقدار تغییر به ازای هر واحد افزایش محصول	c_1	c_2	. . .	c_n	
میزان تولیدی محصول	x_1	x_2	. . .	x_n	



بیان ریاضی مدل برنامه ریزی خطی

با توجه به جدول بالا می توان فرم کلی مسئله تخصیص منابع را به زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

مدل فوق شکل استاندارد مسئله برنامه ریزی خطی می نامیم. هر مسئله ای که به شکل فوق باشد یک مسئله برنامه ریزی خطی است.

بیان ریاضی مدل برنامه ریزی خطی

نکته: ممکن است مدل استاندارد با بسیاری از مدل های برنامه ریزی خطـی در واقعیت تفاوت داشته باشد. شکل های مجاز دیگر از مسئله برنامه ریزی خطی که امکان تبدیل به شکل استاندارد را دارد به صورت زیر است:

- ✓ ممکن است به جای حداکثر کردن (Max)، حداقل کردن (Min) در نظر باشد.
- ✓ ممکن است برخی از محدودیت های کارکردی به صورت بزرگتر –مساوی باشند.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

- ✓ ممکن است برخی از محدودیت های کارکردی به صورت تساوی باشند.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

- ✓ ممکن است برخی از متغیرهای بتوانند فقط منفی یا هم منفی یا مثبت (آزاد در علامـت) یا (unrestricted in sign) باشند.

واژه های مربوط به مدل برنامه ریزی خطی

تابع هدف(objective function) : به تابع $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ که پیدا کردن حداکثر آن مورد نظر است اطلاق می شود.

محدودیت کارکردی(functional constraint) : به تابعی که نشان دهنده میزان کل مصرف هر منبع برای کلیه محصول ها است اطلاق می شود.

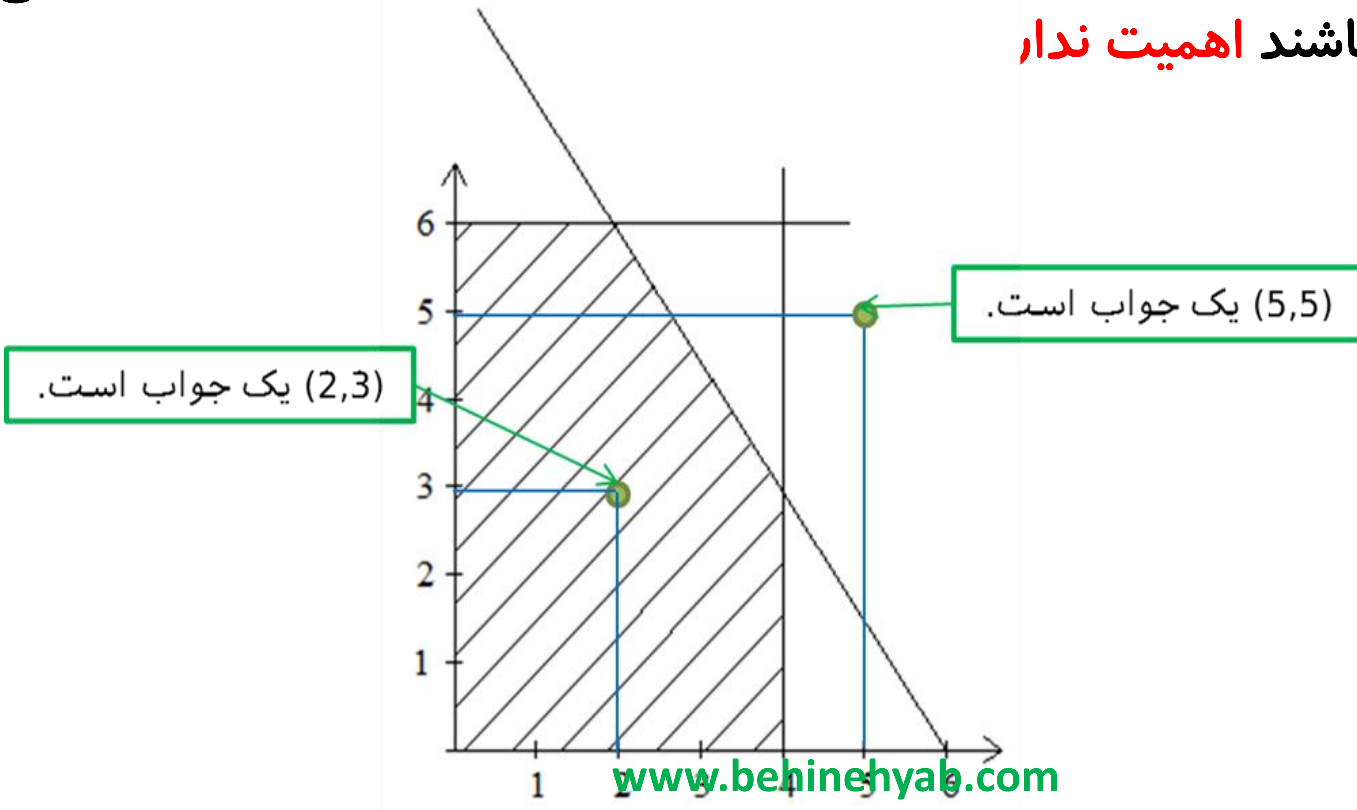
محدودیت نامنفی بودن(non-negativity constraint) : به روابط $x_j \geq 0$ اطلاق می شود.

محدودیت ها(constraints) : به مجموعه محدودیت های کارکردی و نامنفی بودن اطلاق می شود.

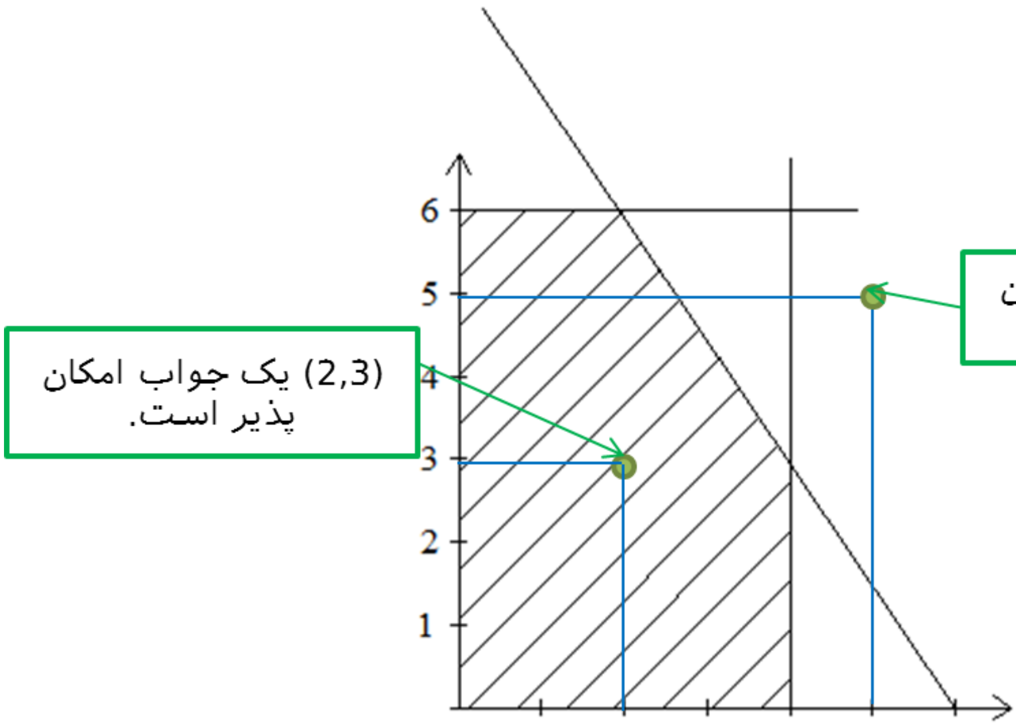
متغیرهای تصمیم(decision variables) : به متغیرهای x_j که میزان هر محصول را نشان می دهد اطلاق می شود.

پارامترها(parameters) : به داده های a_{ij}، b_i، و c_j اطلاق می شود.

جـواب (solution): بـه هـر مجموعـه از مقـادیر کـه بـه متغیرهـای تصـمیم ($x_1,x_2,..,x_n$) اختصاص یابد، اطلاق می شود. در شکل زیر، نقطـه (۲,۳) و (۵,۵) جواب های مـدل برنامـه ریـزی خطـی هسـتند و ایـن کـه در داخـل یـا خـارج محدودیت باشند اهمیت ندار

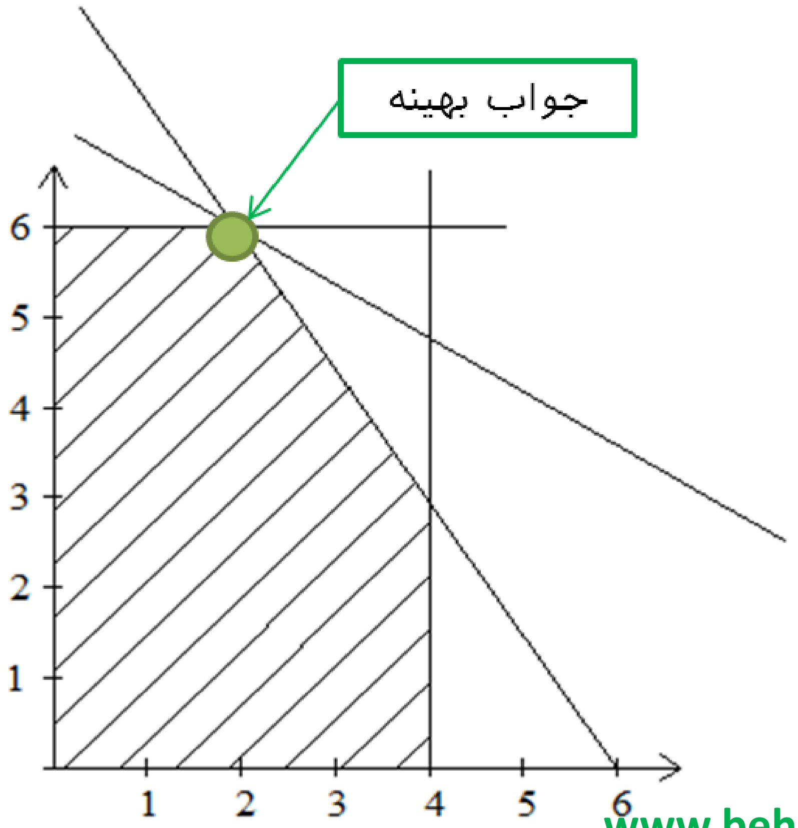


جواب امکان پذیر (feasible solution): به جوابی که در تمـامی محـدودیت ها (عملکردی و نامنفی بودن) صدق می نماید، اطلاق می شـود. بـرای مثـال در شکل فوق، نقطه (۲,۳) جواب موجه و جواب (۵,۵) یک جـواب امکـان ناپـذیر است.



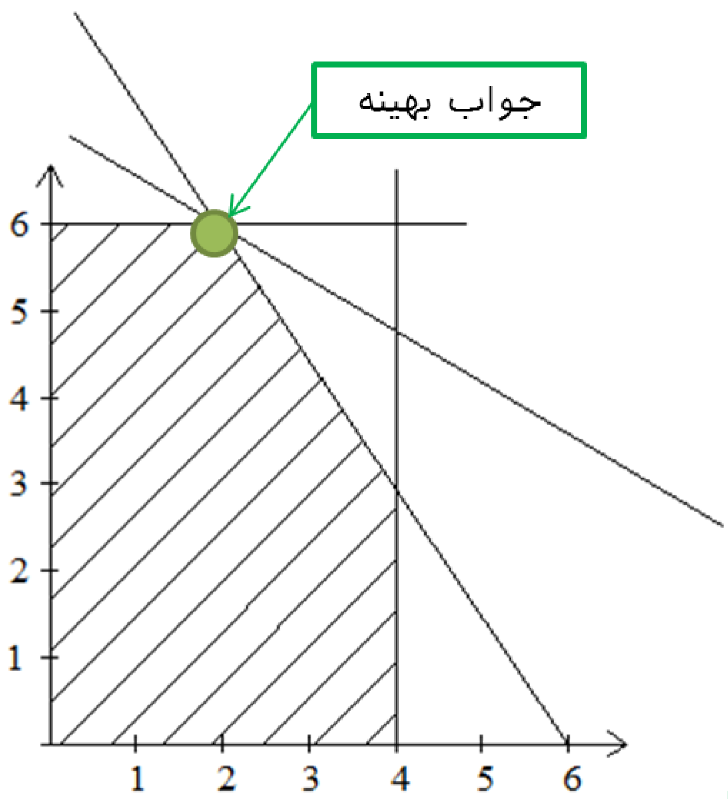
واژه های مربوط به مدل برنامه ریزی خطی

۱-جـواب بهینـه (optimal solution): جـوابی موجـه اسـت کـه بـه ازای آن (جواب بهینه)، مقدار تابع هدف مطلوب ترین است. در شکل زیر یـک جـواب بهینه آورده شده است.



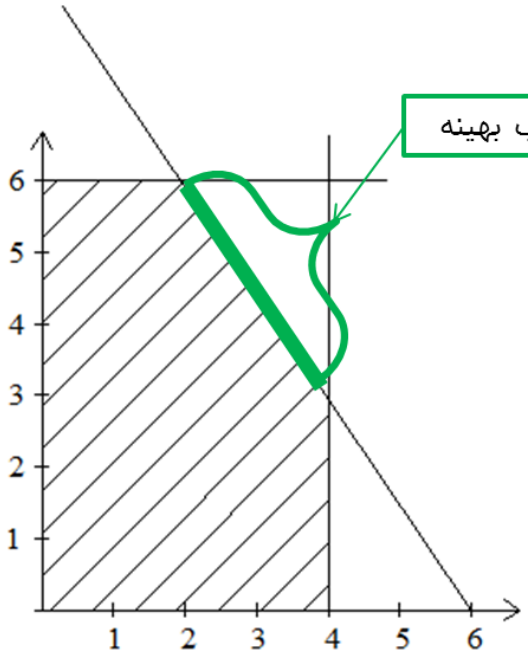
برای جواب بهینه چهار امکان وجوددارد

۱- جواب بهینه یکتا: در این صورت جواب بهینه تنها یک نقطه از فضای امکان پذیر است(مشابه شکل زیر).



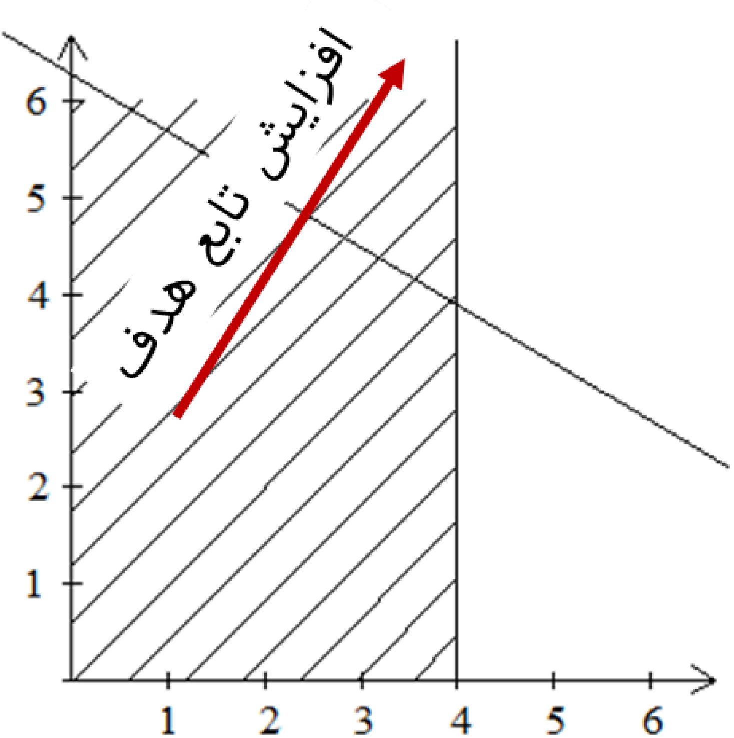
واژه های مربوط به مدل برنامه ریزی خطی

۲- جواب بهینه چندگانه (multiple optimal solution) : غالبا مسئله برنامه ریزی خطی یک جواب یکتا دارد. ولی لزوما این چنین نیست. در مثال قبلی اگر سودآوری محصول شماره ۲ از ۵ به ۲ واحد کاهش یابد، در این صورت خط تابع هدف به موازات خط $3x_1+2x_2=18$ خواهد شد و از این رو تمامی نقاط روی خط $3x_1+2x_2=18$ بین نقاط (۲,۶) و (۴,۳) جواب های بهینه مسئله خواهد بود.



واژه های مربوط به مدل برنامه ریزی خطی

۳- جواب بیکران (unbound solution): این جواب زمانی به وجود می آید که محدودیت ها نتوانند از افزایش لایتناهی تابع هدف (z در جهت مطلوب) جلوگیری نماید. در مثال قبلی اگر دو محدودیت $3x_1+2x_2\leq 18$ و $2x_2\leq 12$. حذف شوند، فضای امکان پذیر به صورت زیر می شود که مقدار تابع هدف می تواند در جهت لایتناهی افزایش یابد.



۴- فاقد جواب (infeasible solution) : در این صورت مسئله اصولا جواب موجه ندارد. اگر در مثال قبلی، محدودیت $2x_2 \le 12$ به $2x_2 \ge 12$ و محدودیت $x_1 \le 4$ به $x_1 \ge 4$ تغییر نماید، فضای امکان پذیر تهی می شود و مسئله فاقد جواب خواهد شد.

تمرین ها

مثال: یک منطقه شامل سه مزرعه است که دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می کند. اطلاعات مربوطه به آب موجود و زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول زیر آمده است.

مزرعه	زمین قابل کشت (هکتار)	آب موجود (هزار متر مکعب)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

تمرین ها

محصولات مناسب کشت در این منطقه عبارتند از چغندر قند، پنبه و ذرت. حداکثر میزان کشت (برای حصول ترکیب متناسب) و میزان آب مصرفی و منافع فروش این سه محصول با هم متفاوت است که در جدول زیر آمده است.

محصول	حداکثر کشت (هکتار)	مصرف آب (هزار متر مکعب)	منافع خالص (دلار در هکتار)
چغندر قند	600	3	400
پنبه	500	2	300
ذرت	325	1	100

تمرین ها

کشاورزان توافق کرده اند که نسبت زمین کاشته شده به زمین موجود برای هر سه مزرعه یکسان باشد و هر سه مزرعه امکان کاشت هر ترکیبی از محصولات را داشته باشند.

ترکیب تولید محصولات را به نحوه بیابید که سود حاصل از فروش بیشینه شود.

تمرین ها

حل:

در این مسئله به دنبال تعیین مقدار زمینی از هر مزرعه است که به هر محصول تخصیص می یابد. لذا متغیر تصمیم گیری به صورت جدول زیر تعریف می شود.

محصول \ مزرعه	1	2	3
چغندر قند	x_1	x_2	x_3
پنبه	x_4	x_5	x_6
ذرت	x_7	x_8	x_9

تمرین ها

برای مثال در جدول فوق، x_1 به معنای مساحتی بر حسب هکتار از مزرعه ۱ که با چغندر کشت می شود، است. سود حاصل از فروش محصول تولیدی از هر سه مزرعه به صورت زیر در می آید.

$$Max \quad Z = 400(x_1 + x_2 + x_3) + 300(x_4 + x_5 + x_6) + 100(x_7 + x_8 + x_9)$$

تمرین ها

۱- محدودیت زمین قابل کشت هر مزرعه (بر حسب هکتار)

مزرعه ۱: $x_1 + x_4 + x_7 \le 400$

مزرعه ۲: $x_2 + x_5 + x_8 \le 600$

مزرعه ۳: $x_3 + x_6 + x_9 \le 300$

۲- محدودیت میزان آب موجود برای کشت در هر مزرعه (بر حسب هزار متر مکعب)

مزرعه ۱: $3x_1 + 2x_4 + x_7 \le 600$

مزرعه ۲: $3x_2 + 2x_5 + x_8 \le 800$

مزرعه ۳: $3x_3 + 2x_6 + x_9 \le 375$

۳- محدودیت حداکثر کشت هر محصول (بر حسب هکتار)

محصول ۱: $x_1 + x_2 + x_3 \le 600$

محصول ۲: $x_4 + x_5 + x_6 \le 500$

محصول ۳: $x_7 + x_8 + x_9 \le 325$

۴- محدودیت نامنفی بودن متغیرهای تصمیم گیری به صورت زیر است.

$$x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,\dots,9$$

تمرین ها

۵- محدودیت توافقنامه بین کشاورزان برای تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۱ و ۲:

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_8}{600}$$

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۱ و ۳:

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۲ و ۳:

$$\frac{x_2 + x_5 + x_8}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

تمرین ها

(ادامه ۵): محدودیت های قبلی به صورت استاندارد نیست. برای تبدیل به شکل مناسب برنامه ریزی خطی، قرار گرفتن تمامی متغیرها در سمت چپ، از ویژگی طرفین وسطین استفاده می کنیم، لذا خواهیم داشت:

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۱ و ۲:

$$3(x_1+x_4+x_7)-2(x_2+x_5+x_8)=0$$

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۱ و ۳:

$$4(x_3+x_6+x_9)-3(x_1+x_4+x_7)=0$$

تساوی نسبت زمین کشت شده به زمین موجود برای مزرعه ۲ و ۳:

$$(x_2+x_5+x_8)-2(x_3+x_6+x_9)=0$$

جواب بهینه مدل:

جواب بهینه مدل برنامه ریزی خطی فوق به صورت زیر است .

مزرعه / محصول	1	2	3
چغندر قند	133.3	100	25
پنبه	100	250	150
ذرت	0	0	0

تمرین ها

مثال: مدیر سرمایه گذاری یک شرکت مسئول سرمایه گذاری ۱۰ میلیون دلاری به صورت سهام است. وی می تواند از وام یک میلیون دلاری با بهره ۵.۵ درصد قبل از کسر مالیات هم استفاده کند. اوراق بهادار موجود، درجه بندی کیفی آن ها، زمان سررسید و نرخ بازده در جدول زیر آمده است.

نام اوراق قرضه	نوع قرضه	کیفیت مقیاس: قرضه	کیفیت مقیاس: بانک	مدت تا سررسید (سال)	نرخ بازده تا سررسید	نرخ بازده بعد از کسر مالیات
A	شهری	Aa	2	9	4.3 درصد	4.3 درصد
B	شرکتی	Aa	2	15	5.4 درصد	2.7 درصد
C	دولتی	Aaa	1	4	5 درصد	2.5 درصد
D	دولتی	Aaa	1	3	4.4 درصد	2.2 درصد
E	شهری	Ba	5	2	4.5 درصد	4.5 درصد

تمرین ها

سیاست های محدودیت کننده سرمایه گذاری به صورت زیر است:

۱-مجموع اوراق قرضه شرکتی و دولتی دست کم ۴ میلیون دلار باشد

۲-متوسط کیفیت مجموعه سهام، نبایـد از 1.۴ مقیـاس کیفـی شـرکت تجـاوز کند(توجه کنید عدد کوچکتر به معنای اوراق با کیفیت بالاتر است)

۳-میانگن مدت سررسید سهام نباید از ۵ سال تجاوز کند.

با فرض این که هدف مدیر مجموعه سهام بیشـینه کـردن بـازده بعـد از کسـر مالیات (با نرخ ۵۰ درصد و اوراق قرضه شهری معاف از مالیات اسـت) اسـت، او کدام یک از اوراق را باید خریداری کند؟

آیا گرفتن وام تا سقف یک میلیون دلار توصیه می شود؟

تمرین ها

حل:

مقدار سرمایه گذاری در هر یک از انواع اوراق قرضه و میزان وام به عنوان متغیرهای تصـمیم گیری هستند که به صورت زیر بیان می شوند.

x_A : مقدار سرمایه گذاری در اوراق قرضه A بر حسب میلیون دلار.

x_B : مقدار سرمایه گذاری در اوراق قرضه B بر حسب میلیون دلار.

x_C : مقدار سرمایه گذاری در اوراق قرضه C بر حسب میلیون دلار.

x_D : مقدار سرمایه گذاری در اوراق قرضه D بر حسب میلیون دلار.

x_E : مقدار سرمایه گذاری در اوراق قرضه E بر حسب میلیون دلار.

Y : مقدار وام با نرخ سود سود ۵.۵ درصد قبل از کسر مالیات بر حسب میلیون دلار.

تمرین ها

در آمد حاصل بعد از کسر مالیات (با فرض مالیات ۵۰ درصد و اوراق قرضه شهری فاقد مالیات) به صورت زیر است:

$$Z = 0.043x_A + 0.027x_B + 0.025x_C + 0.022x_D + 0.045x_E - 0.0275Y$$

در عبارت فوق $0.0275Y$ مالیات به خاطر گرفتن وام $\mathbf{Y}$ است.

محدودیت های این مثال به صورت زیر است:

محدودیت ۱- مدیر فقط می تواند مبلغ ۱۰ میلیون دلار سرمایه گذاری کند که میزان وام $\mathbf{Y}$ به آن اضافه می شود:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \le 10 + Y$$

محدودیت ۲- مدیر حداقل ۴ میلیون دلار در خرید اوراق قرضه شرکتی و دولتی سرمایه گذاری کند:

$$x_B + x_C + x_D \geq 4$$

محدودیت ۳- نسبت کیفیت کل به مقدار کل سهام نباید از مقدار ۱.۴ تجاوز نماید. توجه داشته باشید عدد کوچکتر به معنای کیفیت بالاتر است، لذا رابطه به صورت کوچکتر مساوی خواهد بود:

$$\frac{2x_A + 2x_B + x_C + x_D + 5x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \leq 1.4$$

با ضرب رابطه فوق در عبارت مخرج و ساده سازی آن به صورت زیر خواهد شد:

$$0.6x_A + 0.6x_B - 0.4x_C - 0.4x_D + 3.6x_E \leq 0$$

محدودیت ۴- میانگین مدت سررسید نباید از ۵ سال تجاوز کند که به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \le 5$$

از ضرب کردن مخرج در دو طرف عبارت، معادل خطی به صورت زیر می شود:

$$4x_A + 10x_B - x_C - 2x_D - 3x_E \le 0$$

محدودیت ۵- حداکثر وام برابر یک میلیون دلار است که به صورت محدودیت زیر در مدل لحاظ می شود:

$$Y \le 1$$

محدودیت ۶- محدودیت های نامنفی بودن برای متغیرهای تصمیم به صورت زیر می شود:

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, Y \ge 0$$

مثال: کارخانه ای تولید یکی از محصولات غیرسودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است که در این صورت ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه ای آزاد کرده است. از این ظرفیت ایجاد شده برای تولید سه محصول ۲، ۱، و ۳ استفاده می شود. ظرفیت آزاد ماشین الات مورد نیاز این سه محصول به صورت زیر است.

نوع ماشین	زمان موجود (ماشین ساعت در هفته)
فرز	500
تراش	350
سنگ	150

تمرین ها

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید سه محصول به صورت زیر است:

نوع ماشین	محصول 1	محصول 2	محصول 3
فرز	9	3	5
تراش	5	4	0
سنگ	3	0	2

تمرین ها

دپارتمان فروش با مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که تولید محصولات ۱ و ۲ به هر میزان در بازار خواهان دارد ولی روش محصول ۳ در هر هفته بیش از ۲۰ واحد میسر نیست. سود محصول های ۱، ۲، و ۳ به ترتیب برابر با ۵۰، ۲۰، و ۲۵ است.

مدل برنامه ریزی خطی فوق را با هدف حداکثر کردن سود فرمول بندی کنید.

حل:

x_i را تعداد محصول نوع **i** در هر هفته در نظر بگیرید($i = 1, 2, 3$).

محدودیت ۱ – محدودیت ظرفیت فرز

$$9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500$$

محدودیت۲ – محدودیت تراش

$$5x_1 + 4x_2 \leq 300$$

تمرین ها

محدودیت ۳- محدودیت سنگ

$$3x_1 + 2x_3 \le 150$$

محدودیت ۴- محدودیت کشش بازار

$$x_3 \le 20$$

محدودیت ۵- محدودیت نامنفی بودن متغیرهای تصمیم گیری

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,\ldots,3.$$

تابع هدف:

$$Max\ \ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3$$

تمرین ها

تمرین: فرض کنید در مدل زیر مقدار c_1 نامعلوم است.

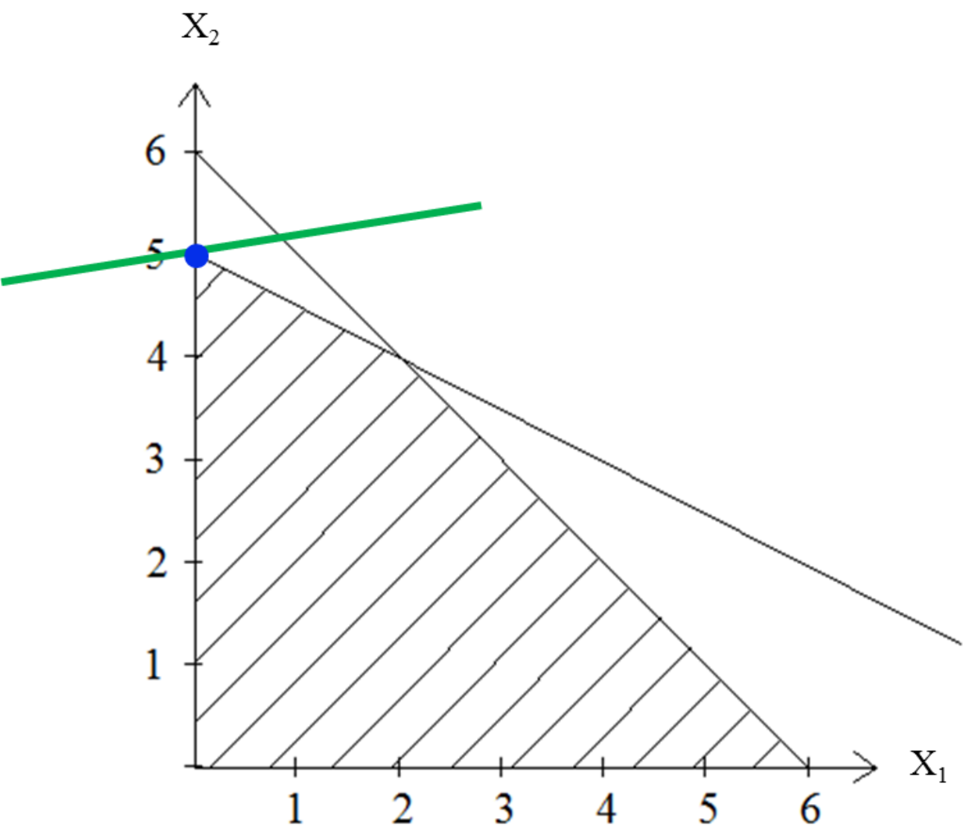
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = c_1 x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad (2)\quad x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

با استفاده از روش ترسیمی، مقدار جواب بهینه مدل فوق را برحسب $-\infty < c_1 < +\infty$ تعیین کنید.

حل: فرض کنید در مدل مقدار c_1 نامعلوم است.

–برای $c_1 < 0.5$ داریم.

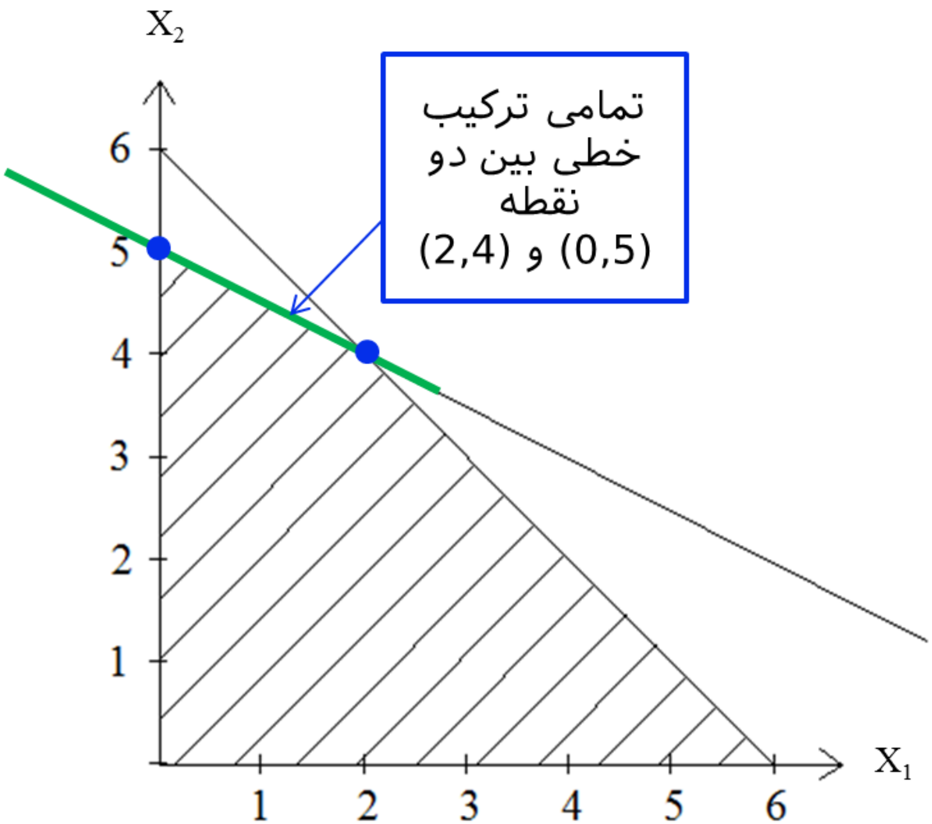
$c < 0.5, x^* = (0, 5), Z^* = 5$



تمرین ها

–برای $c_1 = 0.5$ داریم.

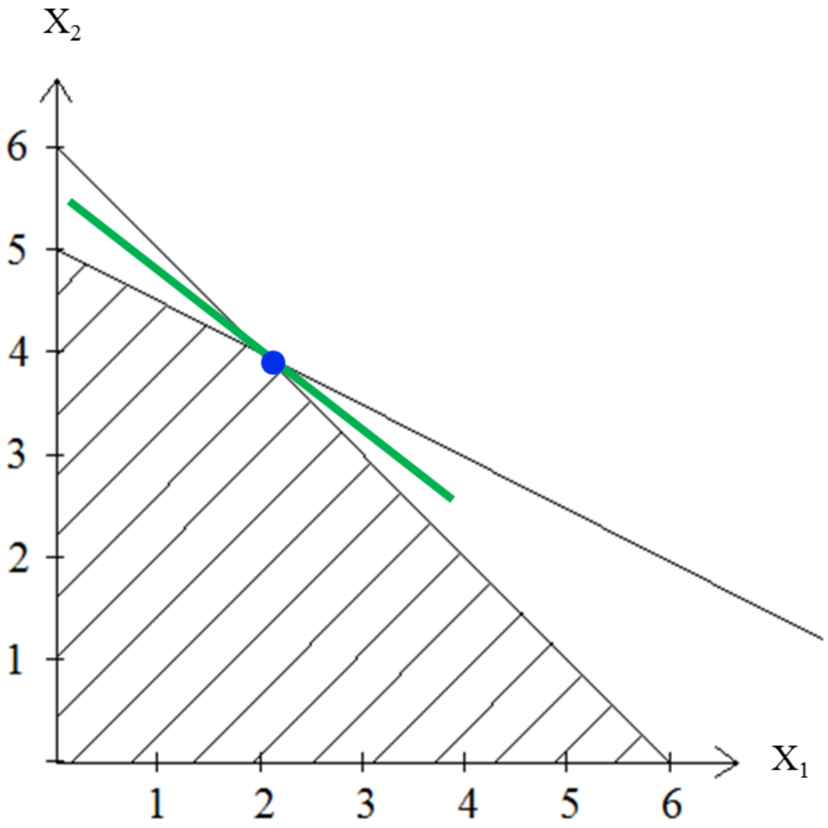
$c = 0.5, x^* = (2,4) \,\&\, (0,5), Z^* = 5$



تمرین ها

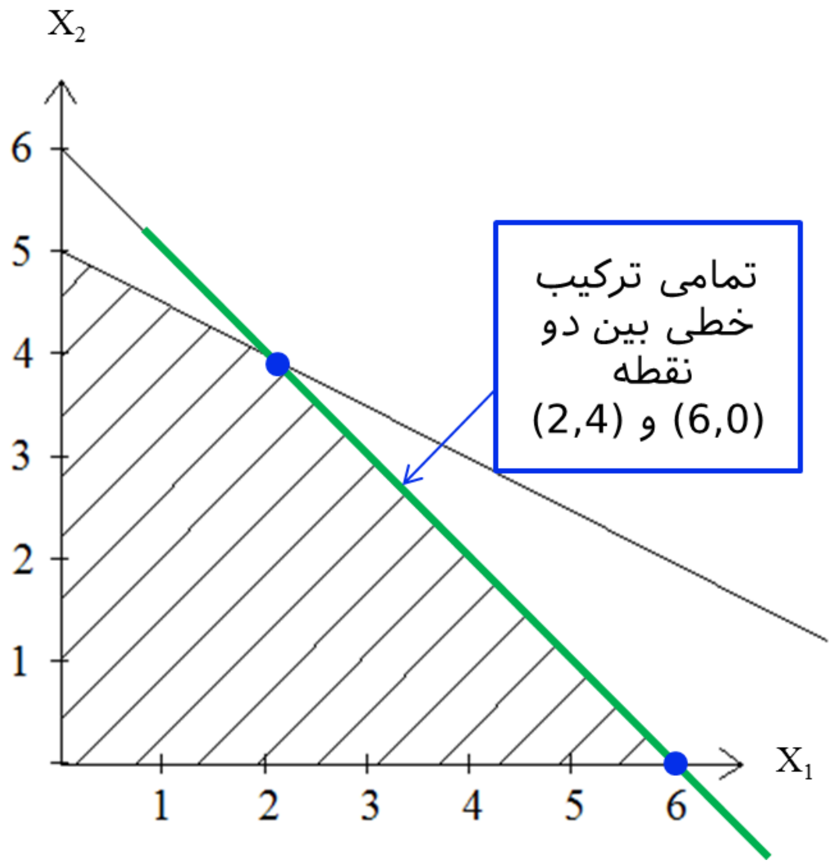
-برای $0.5 < c_1 < 1$ داریم.

$0.5 < c < 1, x^* = (2,4), Z^* = c + 4$



-برای $c_1 = 1$ داریم.

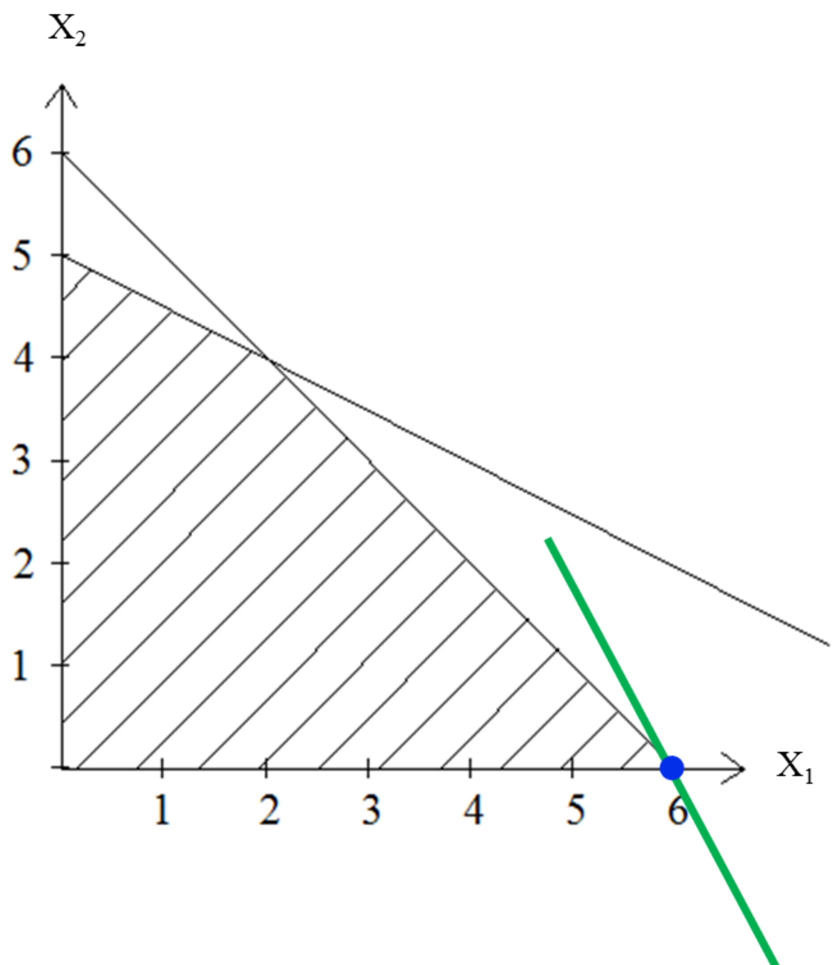
$c = 1, x^* = (2,4) \,\&\, (6,0), Z^* = 6$



تمرین ها

-برای $c_1 > 1$ داریم.

$c > 1, x^* = (6,0), Z^* = 6c$



تمرین ها

تمرین: یک کارخانه در دو کارگاه به تولید وسایل دقیق پزشکی می پردازد. این کارخانه دارای سه مشتری دایم است که به صورت ماهانه سفارش انجام می شود. هزینه حمل کالاهای تولید شده از هر کارگاه برای این سه مشتری در جدول زیر آمده است. در این جدول همچنین تعداد کالای تولید شده و تعداد سفارشات مشتری ها آورده شده است.

از \ به	هزینه حمل سفارشات			خروجی هر کارگاه
	مشتری 1	مشتری 2	مشتری 3	
کارگاه 1	$600	$800	$700	400
کارگاه 2	$400	$900	$600	500
اندازه سفارش ماهانه	300	200	400	

تمرین ها

واحد تحقیق در عملیات این کارخانه به دنبال تعیین تعداد سفارشاتی از هر کارگاه به هر مشتری است به نحویکه هزینه حمل سفارشات کمینه شود. مسئله فوق را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی مدل سازی نمایید.

حل:

در نظر بگیرید x_{ij} تعداد واحدهای ارسال شده از کارگاه i=(۱و۲) به مشتری j=(۱و۲و۳).

تابع هدف: کمینه کردن هزینه جابه جایی سفارشات

$$Min\ Z = 600x_{11} + 800x_{12} + 700x_{13} + 400x_{21} + 900x_{22} + 600x_{23}$$

تمرین ها

محدودیت تولید یا خروجی کارگاه ۱

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400$$

محدودیت تولید یا خروجی کارگاه ۲

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500$$

محدودیت تعداد سفارش مشتری ۱

$$x_{11} + x_{21} = 300$$

محدودیت تعداد سفارش مشتری ۲

$$x_{12} + x_{22} = 200$$

محدودیت تعداد سفارش مشتری ۳

$$x_{13} + x_{23} = 400$$

تمرین ها

با توجه به محدودیت های فوق، مدل به صورت زیر می شود:

$$Min\ Z = 600x_{11} + 800x_{12} + 700x_{13} + 400x_{21} + 900x_{22} + 600x_{23}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400$$

$$(2)\quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500$$

$$(3)\quad x_{11} + x_{21} = 300$$

$$(4)\quad x_{12} + x_{22} = 200$$

$$(5)\quad x_{13} + x_{23} = 400$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,\ j = 1,2,3.$$

جواب بهینه مدل فوق $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (0, 200, 200, 300, 0, 200)$ و $Z^* = 540000$ است.

تمرین ها

تمرین: یک کارخانه تولید آلیاژهای صنعتی، به دنبال تولید یک آلیاژ جدیدی است که از ترکیب ۴۰ درصد قلع، ۳۵ درصد زینک، و ۲۵ درصد سرب تولید می شود که از ۵ آلیاژ فعلی در کارخانه تهیه می شوند. ویژگی آلیاژهای در دسترس به صورت زیر است:

از \ به	آلیاژ 1	آلیاژ 2	آلیاژ 3	آلیاژ 4	آلیاژ 5
درصد قلع	60	25	45	20	50
درصد زینک	10	15	45	50	40
درصد سرب	30	60	10	30	10
هزینه تولید	77	70	88	84	94

تمرین ها

گروه تحقیق در عملیات این کارخانه به دنبال یافتن سهم هر آلیاژ برای تولید آلیاژ جدید است به نحوی که هزینه حداقل شود. مسئله فوق را به صورت یک برنامه ریزی خطی بنویسید.

حل:

x_i را برابر میزان آلیاژ نوع **i** در نظر بگیرید که $i=1,\dots,5$.

محدودیت ۱ – محدودیت درصد قلع

$$60x_1+25x_2+45x_3+20x_4+50x_5=40$$

محدودیت ۲–درصد سرب زینک

$$10x_1+15x_2+45x_3+50x_4+40x_5=25$$

محدودیت۳- محدودیت درصد سرب

$$30x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 30x_4 + 10x_5 = 35$$

محدودیت ۴- مجموع درصد ها برابر یک شود.

$$x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad + x_4 \quad + x_5 \quad = 1$$

محدودیت نامنفی بودن

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5.$$

تابع هدف: کمینه کردن هزینه تولید

$$Min\ Z = 77x_1 + 70x_2 + 88x_3 + 84x_4 + 94x_5$$

با توجه به موارد اشاره شده، مدل بهینه سازی به صورت زیر می شود.

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 77x_1 + 70x_2 + 88x_3 + 84x_4 + 94x_5 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 60x_1 + 25x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 50x_5 = 40 \\
&\quad (2)\quad 10x_1 + 15x_2 + 45x_3 + 50x_4 + 40x_5 = 25 \\
&\quad (3)\quad 30x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 30x_4 + 10x_5 = 35 \\
&\quad (4)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\
&\quad\quad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابر با $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0.0435, 0.2826, 0.6739, 0, 0)$ و

• $Z^* = \$84.43$ است.

تمرین: یک هواپیمای باربری دارای سه مخزن حمل بار در جلو، وسط و عقب است که ظرفیت وزنی و حجمی این سه مخزن به صورت زیر است.

مخزن	ظرفیت وزن (تن)	ظرفیت حجم (متر مکعب)
جلو	12	7000
وسط	18	9000
عقب	10	5000

تمرین ها

برای اینکه تعادل هواپیما در پرواز برقرار باشد، نسبت وزن به ظرفیـت وزنـی در هر سه مخزن باید یکسان باشد. مشتریان بـرای انتقـال ۴ بـار زیـر، تقاضـا کرده اند که وزن، حجم، سود ناشی از انتقال آن ها در جدول زیر آمده است:

بار	ظرفیت وزن (تن)	ظرفیت حجم (متر مکعب بر تن)	سود (دلار بر تن)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

تمرین ها

هر سمتی از ۴ بار فوق قابلیت انتقال دارد. برای بیشینه کردن سود انتقال بار توسط یک هواپیما، این چهار بار به چه میزان و در چه مخزنی قرار گیرید.

حل:

x_{ij} برابر با میزان تناژ بار از نوع $i=1,2,3,4$ که در مخزن $j=$ مرکز(**C**)، جلو(**F**) و عقب(**B**) قرار داده می شود.

تمرین ها

مدل بهینه سازی به صورت زیر می شود.

$$Max\ \ P = 320(x_{1F} + x_{1C} + x_{1B}) + 400(x_{2F} + x_{2C} + x_{2B})$$
$$+360(x_{3F} + x_{3C} + x_{3B}) + 290(x_{4F} + x_{4C} + x_{4B})$$

$s.t.$

$$(1)\quad x_{1F} + x_{2F} + x_{3F} + x_{4F} \le 12$$
$$(2)\quad x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} \le 18$$
$$(3)\quad x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} \le 10$$
$$(4)\quad x_{1F} + x_{1C} + x_{1B} \le 20$$
$$(5)\quad x_{2F} + x_{2C} + x_{2B} \le 16$$
$$(6)\quad x_{3F} + x_{3C} + x_{3B} \le 25$$
$$(7)\quad x_{4F} + x_{4C} + x_{4B} \le 13$$
$$(8)\quad 500x_{1F} + 700x_{2F} + 600x_{3F} + 400x_{4F} \le 7000$$
$$(9)\quad 500x_{1C} + 700x_{2C} + 600x_{3C} + 400x_{4C} \le 9000$$
$$(10)\quad 500x_{1B} + 700x_{2B} + 600x_{3B} + 400x_{4B} \le 5000$$
$$(11)\quad \tfrac{1}{12}(x_{1F} + x_{2F} + x_{3F} + x_{4F}) - \tfrac{1}{18}(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}) = 0$$
$$(12)\quad \tfrac{1}{12}(x_{1F} + x_{2F} + x_{3F} + x_{4F}) - \tfrac{1}{10}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}) = 0$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad j = F, C, B.$$

جواب بهینه مدل فوق در زیر آمده است.

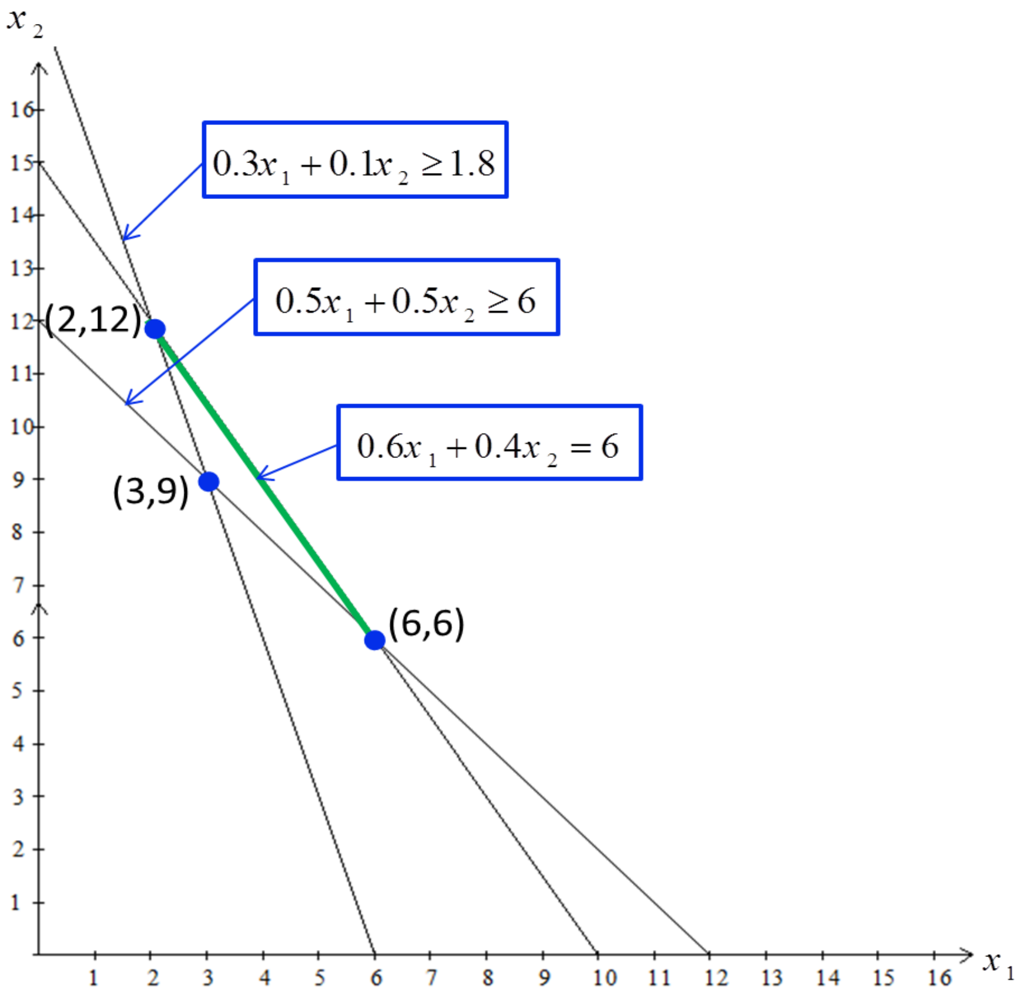
$$(x_{1F}=0, x_{1C}=5, x_{1B}=10, x_{2F}=7.33, x_{2C}=4.167, x_{2B}=0,$$
$$x_{3F}=0, x_{3C}=0, x_{3B}=0, x_{4F}=4.66, x_{4C}=8.33, x_{4B}=0)$$
$$P^*=\$13330$$

تمرین: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \geq 1.8 \\
&\quad (2) \quad 0.5x_1 + 0.5x_2 \geq 6 \\
&\quad (3) \quad 0.6x_1 + 0.4x_2 = 6 \\
&\quad \qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

مدل فوق را به روش ترسیمی حل نمایید.

تمرین ها



حل:

در شکل ذیل، خط سبز پررنگ، ناحیه امکان پذیر و جواب بهینه $(x_1,x_2)=(6,6)$ است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com