درس ۱۴: نظریه بازی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

BEHINEHYAB.COM

مقدمه

زندگی مملو از تضادها و مبارزات است. نمونه های بسیاری را می توان بیان کرد که طرف هـای درگیـر منافع متضاد و خلاف هم دارند. جنگ ها، مبارزات سیاسی، بازاریابی و قمارها ازجمله این مجادله ها هستند. یک ویژگی اساسی این مجادله ها این است که نتیجه نهایی بستگی به مجموعه سیاست هـایی (***Strategy***) دارد که توسط طرفین درگیر اخذ می گردد. **نظریه بازی** یا ***Game Theory***، نظریه ای ریاضی است که بـه بررسی مشخصه های کلی رقابت ها می پردازد و در این نظریه بر فراینـد تصـمیم گیـری طـرفین مخاصـمه تاکید می کند.

بازی های ریاضی انواع مختلفی دارد که در ادامه به اختصار بیان می شود.

بازی های غیرمشارکتی و بازی های مشارکتی (Non-cooperative and Cooperation Games)

در بازی های غیرمشارکتی فرض بر این است که هیچ گونه تبادل اطلاعات، همکاری، توافق و تعهـد مـا بین بازیکنان قبل یا حین بازی وجود ندارد و هر بازیکن جهت رسیدن به هدف **خــودش** بـر طبـق قـوانین بازی، بازی می کند و سایر بازیکنان رقبای وی محسوب می شوند.

در بازی های مشارکتی بازیکنان امکان تبادل اطلاع یا همکاری تعهد آور **قبل** یا **حین** بازی را دارند که موجب می شود برخی یا تمام بازیکنان که در توافق مشارکت دارند ملزم به رعایت آن باشند و در راه رسیدن به اهداف توافق تلاش می کنند. از جمله بازی های مشارکتی می توان به اوپک اشاره کرد.

بازی های همزمان و بازی های دنباله ای (Simltaneous and Sequential Games)

در بازی های همزمان بازیکنان همزمان با هم تصمیم می گیرند، اما در بـازی هـای دنبالـه ای بـازیکن آخری از نحوه تصمیم بازیکن(یا بازیکنان) قبلی مطلع است.

از جمله بازی های همزمان می توان به بازی سنگ-کاغذ-قیچی و از جمله بـازی هـای دنبالـه ای مـی توان به بازی شطرنج اشاره کرد.

BEHINEHYAB.COM

بازی با اطلاعات کامل/غیرکامل/یا بدون اطلاعات (Games with Perfect/Imperfect information)

در بازی با اطلاع کامل، بازیکن اشراف کاملی در لحظه انجام بازی از تصمیمات بازیکنان دیگر دارد. اما در بازی با اطلاعات غیرکامل بازیکن فقط بخشی از اطلاعات مربوط به کل بازی را تا لحظه مورد نظر دارد. اگر اطلاعات در بازی کامل باشد فقط می توان بازی دنباله ای را انجام داد.

بازی های دونفره

در این بازی، دو نفر در بازی نقش دارند و از نوع غیر مشارکتی هستند. در ادامه به طور خاص به یک نوع خاص از این نوع بازی با عنوان بازی دو نفره جمع صفر می پردازیم.

در **بازی های دونفری جمع صفر** یا ***Two Person-Zero Sum Game*** ، دو بازیگر حضور دارند که یکی از بازیگرها، بازیگر ۱ یا بازیگر سطری و دیگری بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی هستند. بازیگر ۱ تنها مجاز به انتخاب یکی از سیاست ها از بین m سیاست خود است. به طور مشابه بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی مجاز به انتخاب یکی از n سیاست است.

علت جمع صفر خواندن این بازی آن است که مقدار برد یکی دقیقا با میزان باخت بازیگر دوم مساوی است و جمع جبری برد خالص هر دو بازیگر برابر صفر است.

اگر بازیگر ۱ یا بازیگر سطری i-امین سیاست خود و بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی نیز j-امین سیاست خود را انتخاب کند، بازیگر ۱ مقدار a_{ij} دریافت (برد) و بازیگر ۲ نیز مقدار a_{ij} را پرداخت (باخت) می کند. دریافتی یک بازیگر از محل پرداخت بازیگر دیگر امکان پذیر است و بهمین خاطر بازی را **مجموع صفر** (***Zero-sum***) می نامیم زیر حاصل جمع دریافت ها و پرداخت های بازیگران صفر است و منافع دو بازیگر کاملا در تضاد با هم باشند.

ماتریس پرداخت یا **بازده** (***Pay-off Matrix***) در این نوع بازی ها معمولا از دید بازیگر ۱ یا بازیگر سطری نوشته می شود. اگر $a_{ij} > 0$ یعنی بازیگر ۱ a_{ij} واحد را از بازیگر ۲ دریافت می کند و اگر

$a_{ij} > ۰$ یعنی بازیگر ۱ a_{ij} واحد به بازیگر ۲ پرداخت می کند. ماتریس پرداخت یا بازده به صورت زیر مـی شود.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

برای روشن شدن موضوع یک مثال می زنیم. دو بازیگر در یک بـازی همزمـان بـا یکـدیگر یـک یـا دو انگشت خود را نشان می دهند. اگر تعداد انگشتان آن ها مساوی باشد، بازیگر اول مقدار یک دلار را به بازیگر دوم می پردازد و در غیر این صورت، بازیگر دوم باید یک دلار را به بازیگر اول بپردازد. بـه ایـن ترتیـب، هـر بازیگر می تواند یکی از دو سیاست زیر را اتخاذ نماید.

- ✓ یک انگشت خود را نشان دهد.
- ✓ دو انگشت خود را نشان دهد.

جدول زیر بازده بازیگر اول بر حسب دلار را در صورت انتخاب هر یک از سیاست ها نشان می دهد.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱-	۱
	سیاست ۲	۱	۱-

نکته: در نظریه بازی ها، سیاست قاعده ای از پیش تعیین شده است که مشخص می کند هر بازیگر در تقابل هر پیشآمد که در هر یک از مراحل می تواند رخ دهد، چه واکنشی باید داشته باشد و هر بازیگر قبل از

BEHINEHYAB.COM

شروع بازی سیاست هایی که خود و طرف مقابل می تواند اتخاذ نماید را تعیین کرده و جدول بازده را از دیدگاه خود بدست می آورد.

نظریه بازی بر مبنای دو فرض استوار است.

- ✓ هر دو بازیگر عاقل و منطقی هستند و هر دو بازیگر نهایت توان خود را در مصاف حریف به کار می بندد تا بهترین نتیجه دست یابد.
- ✓ هر بازیگر در هنگام انتخاب سیاست خود فرض می کند که رقیب وی با فهمیدن این سیاست چه سیاستی را انتخاب می کند.

مثال: دو سیاست مدار در یک مبارزه انتخاباتی در مقابل یکدیگر قرار دارند. برای دو روز آخر قبل از انتخابات که از اهمیت بسزایی برخوردار است باید برنامه مبارزاتی تهیه شود. هر دو سیاست مدار می خواهند دو روز باقی مانده را در دو شهر (الف) و (ب) بگذرانند. آن ها می توانند در هر شهر یک روز یا در یک شهر دو روز به سر برند. هر سیاست مدار از برنامه حریف تا وقتی که اعلام نشود بی اطلاع است.

این دو رقیب از مدیران برنامه خود در این دو شهر خواسته اند تا اثرات تصمیم خود و رقیب را در مورد گذراندن یک یا دو روز در این دو شهر بر حسب پیش بینی افزایش یا کاهش تعداد رای بیابند.

برای اینکه این مسئله در غالب یک بازی دو نفری – جمع صفر فرموله شود. در ابتدا باید دو طرف بازی (که در این جا دو سیاست مدار هستند) سیاست های هر کدام و همچنین جدول بازده تعیین شود.

هر یک از سیاست مداران سه سیاست پیش رو دارند.

- ✓ سیاست ۱: گذراندن یک روز در هر شهر
- ✓ سیاست ۲: گذراندن هر دو روز در شهر (الف)
- ✓ سیاست ۳: گذراندن هر دو روز در شهر (ب)

BEHINEHYAB.COM

سه گونه جدول بازده برای این مسئله به صورت زیر تعریف می شود.

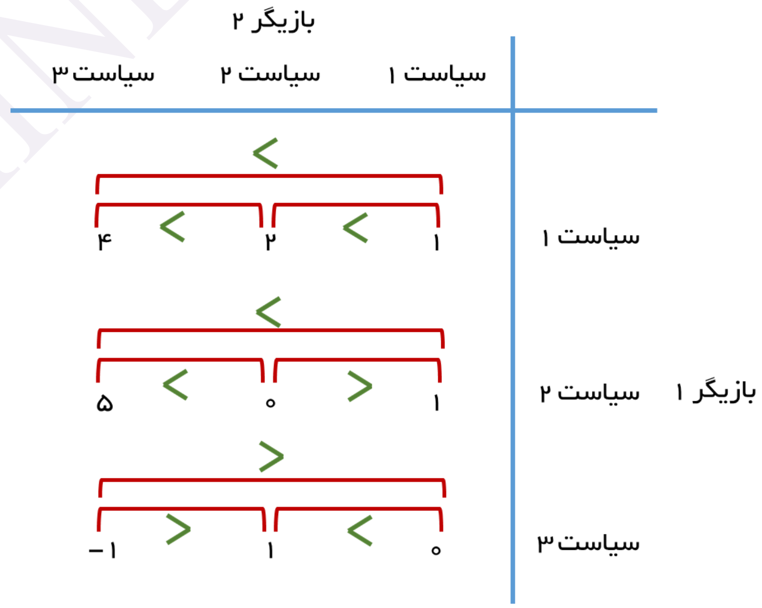
گونه اول:

فرض کنید جدول بازده دو سیاست مدار به صورت جدول زیر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۱	۲	۴
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۰	۵
	سیاست ۳	۰	۱	۱-

در جدول فوق، بازیگر دوم هیچ سیاستی ندارد که مشخصا بدتر از سیاست دیگر باشد. در شکل زیر این وضعیت توضیح داده شده است.

توجه: برای بازیگر ۲، هر چه مقدار کمتر باشد، بهتر است.



BEHINEHYAB.COM

اما برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۳ غالب است و صرف نظر از تصمیم بازیگر ۲ همواره سیاست ۱ بهتر از سیاست ۳ است. در شکل زیر این مفهوم نشان داده شده است.

توجه: در این حالت هر چه مقدار بیشتر باشد، بهتر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۱	۲	۴
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۰	۵
	سیاست ۳	۰	۱	−۱

BEHINEHYAB.COM

در این حالت، سیاست ۳، سیاست مغلوب یا *Dominated Strategy* است و در هر مرحلـه سیاسـت مغلوب حذف می شود. به طور مشخص در هر مرحله سیاستی که از دیگر سیاست بدتر باشد می توان آن را کنار گذاشت. در این صورت جدول بازده به صورت زیر می شود.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲	۴
	سیاست ۲	۱	۰	۵

با توجه به این که هر دو بازیگر منطقی هستند، لذا بازیگر ۲ می داند که بازیگر ۱ فقط دو سیاست ۱ و ۲ را انتخاب می کند و سیاست ۳ را دیگر انتخاب نمی کند. در این جدول بازیگر دوم یک سیاسـت مغلـوب دارد که سیاست ۳ است. در شکل زیر دلیل مغلوب بودن سیاست ۳ نشان داده شده است.

توجه: برای بازیگر ۲ هر چه مقدار بازده کمتر باشد، بهتر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲	۴
	سیاست ۲	۱	۰	۵

با حذف سیاست مغلوب ۳، به جدول زیر می رسیم.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲
	سیاست ۲	۱	۰

در این جدول برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۲ غالب است و سیاست ۲، سیاست مغلوب برای بازیگر ۱ است. که در این صورت جدول بازده به صورت زیر می شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲

همچنین برای بازیگر ۲، سیاست ۲ نسبت به سیاست ۱، سیاست مغلوب است و ناگزیر هر دو بازیگر سیاست ۱ را انتخاب می کنند.

BEHINEHYAB.COM

بدین ترتیب، بازیگر اول همواره یک واحد از بازیگر دوم می برد و در این حالت ارزش بازی یا *Value of the Game* مساوی یک است. در صورتیکه ارزش بازی برابر با صفر باشد، بازی عادلانه یا *Fair Game* نامیده می شود.

گونه دوم:

در این حالت فرض کنید بازده جدول به صورت زیر باشد.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۳-	۲-	۶
	سیاست ۲	۲	۰	۲
	سیاست ۳	۵	۲-	۴-

در جدول فوق، سیاست مغلوبی وجود ندارد و دیگر امکان یافتن سیاست توسط حالت قبلی نیست. بازیگر اول با انتخاب سیاست ۱ می تواند از ۶ واحد برد تا ۳ واحد باخت داشته باشد. چون بازیگر ۲ منطقی است لذا سیاست ۱ را انتخاب می کند تا بازیگر ۱ ببازد. همچنین بازیگر ۱ با انتخاب سیاست ۳ می توان ۵ واحد برد داشته باشد ولی بازیگر ۲ این مجال را بازیگر ۱ نمی دهد و ۴ واحد باخت به او تحمیل می کند. همچنین با انتخاب سیاست ۲، بازیگر ۱ باختی را تجربه نخواهد کرد و به نظر سیاست خوبی باشد.

با تحلیل مشابه برای بازیگر ۲ می توان به این نتیجه رسید که با انتخاب سیاست های ۲،۱، و ۳ به ترتیب باختی برابر با ۵ ، ۰ و ۶ به بار می آید و به نظر می رسد که سیاست ۲ انتخاب عاقلانه ای است زیرا باخت کمتری دارد. لذا سیاست ۲ برای هر دو بازیگر، سیاست مناسب است.

به طور مشخص هر بازیگر باید طوری بازی کند که حداکثر باخت خود را حداقل کند. ضابطه حداقل کردن حداکثر یا *Minimax Criterion* معیار اساسی نظریه بازی در انتخاب سیاست است. این ضابطه به

معنی آن است که بازیگر اول باید سیاستی که حداقل بازده آن از همـه بزرگتـر و بـازیگر دوم سیاسـتی کـه حداکثر بازده ان از همه کوچکتر باشد را انتخاب کند.

تعریف: اگر در یک بازی دو نفره مجموع صفر داشته باشیم:

$$v = \max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j(\max_i a_{ij})$$

آنگاه این بازی دارای **نقطه زین اسبی** (***Saddle Point***) دارد. در این صورت بهترین سیاست بـازیگر ۱ انتخاب $\max_i(\min_j a_{ij})$ و بهترین سیاست بازیگر ۲ انتخاب سیاستی است که بازده برابـر بـا $\min_j(\max_i a_{ij})$ باشد. به این سیاست، **سیاست خالص** یا ***Pure Strategy*** گفته می شود و مقدار v را **ارزش بـازی** مـی نامند. در صورتیکه ارزش بازی برابر صفر باشد به این بازی، بازی عادلانه یا *Fair Game* می گویند.

در این بازی، وجود نقطه زین اسبی نقش تعیین کننده ای دارد و باعث می شود که هیچ بازیگری نتواند از سیاست حریف به نفع خود استفاده کنند. یعنی هر گاه بازیگر دوم حدس بزند یا مطلع شود که قرار است بازیگر ۱ سیاست ۲ را انتخاب کند، او با تغییر سیاستی غیر از ۲ تنها ضرر خود را افزایش می دهد و بنابراین هیچ یک انگیزه ای برای بررسی تغییر سیاست نخواهند داشت. به عبارت دیگر نقطه زینی در واقع برای بازی **نقطه تعادل** یا ***Equilibrium Point*** است. نقطه تعادل نقطه ای است که هیچ یک از بازیکنـان از تغییـر یک جانبه سیاست خود سودی نخواهد برد.

گونه سوم:

جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	۲-	۲
	سیاست ۲	۵	۴	۳-
	سیاست ۳	۲	۳	۴-

اگر هر دو بازیگر مثل حالت قبلی از ضابطه حداقل حداکثر پیروی کنند چه می شود.

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل	
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	۲-	۲	۲-	حداکثر
	سیاست ۲	۵	۴	۳-	۳-	
	سیاست ۳	۲	۳	۴-	۴-	
	حداکثر	۵	۴	۲		
				حداقل		

در صورتیکه مشابه گونه ۲ بازیگران از ضابطه حداقل حداکثر پیروی نمایـد، بـازیگر اول مـی دانـد کـه کمترین مقدار بازی مساوی ۲- است که حداکثر ستون حداقل یا *Min* است. بازیگر ۱ با انتخـاب سیاسـت۱، بیش از ۲ واحد نخواهد باخت. به همین ترتیب، چون بیشترین مقدار بازی برابر ۲ است و بازیگر ۲ می تواند مطمئن باشد که با انتخاب سیاست ۳، بیشتر از ۲ واحد نبازد.

چون مقدار ارزش بازی بزرگتر از صفر است لذا این بازی نقطه زیـن اسـبی نـدارد. حـال ببینـیم وقتـی بازیگر ۱، سیاست ۱ و بازیگر ۲ سیاست ۳ را انتخاب کند چه اتفاقی می افتد. بازیگر ۱ با انتخاب سیاست ۱، ۲ واحد می برد و در این حالت بازیگر ۲، ۲ واحد می بازد. برای این که بازیگر ۲ از این باخت جلوگیری کند، سیاست ۲ را انتخاب می کند و به جای ۲ واحد باخت، ۲ واحد خواهد برد. بازیگر اول هـم منطقـی اسـت و

برای افزایش بازده خود، سیاست ۲ را انتخاب می کند و بازده خود را از ۲- بـه ۴ مـی رسـاند. بـا درک ایـن موضوع، بازیگر ۲ سیاست ۳ را انتخاب می کندکه ۴ واحد باخت را با ۳ واحد برد عوض مـی کنـد. باخـت ۳ واحدی بازیگر ۱ سبب می شود که این بازیگر باخت ۳ واحد را به برد ۲ واحد عضو کند و لذا این حرکـت از نو ایجاد می شود. در واقع جواب به صورت سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ بـرای بـازیگر ۲ اسـت کـه جوابی ناپایدار (*Unstable*) است.

یافتن جواب در مورد بازی هایی که نقطه زین اسبی ندارد به دلیل کاربردی بودن آن ضـرورت دارد. در ادامه روش یافتن جواب بهینه بازی هایی از این دست را بررسی می کنیم.

بازی های با سیاست مختلط یا Mixed strategy

اگر در یک بازی نقطه زین اسبی وجود نداشته باشد، نظریه بازی به هر بـازیگر توصـیه مـی نمایـد کـه سیاست های خود را براساس یک تابع توزیع احتمالی انتخاب نمایید. برای بیـان ایـن موضـوع فـرض کنیـد داشته باشیم.

x_i : احتمال آنکه بازیگر ۱ سیاست i را برگزینند($i=1,\dots,m$)

y_j : احتمال آنکه بازیگر ۲ سیاست j را برگزینند($j=1,\dots,n$)

که در آن m و n تعداد سیاست های مربوط به بازیگران ۱ و ۲ است. بردار $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ برنامـه بـازی بازیگر ۱ است و چون x_1 معرف احتمال است باید غیر منفی و جمعا مساوی یـک شـود $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. همـین طور برای بازیگر ۲ نیز y_j معرف احتمـال اسـت. در ادبیـات نظریـه بـازی $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ و $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ **سیاست** نامیده می شوند. هر بازیگر در بازی یکی از سیاست های خالص خود را انتخـاب مـی کنـد و ایـن انتخاب با استفاده از تابع توزیع احتمالی از طریق سیاست مختلط بدست می آید.

در واقع با تعریف سیاست مختلط، سیاست خالص در بازی های دارای نقطه زین اسبی، سیاست هـا بـه صورت $(0,0,\dots,1,0,\dots,0)$ است که در مولفه ۱ سیاست انتخابی بازیگر با توجه به نقطه زین اسبی است.

برای مشخص شدن موضوع، فرض کنید در گونه سوم مسئله انتخابات، بازیگران به ترتیب سیاست های مختلط $(x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ و $(y_1,y_2,y_3)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ را انتخاب کنند. این جواب بدین معنا است که بازیگر ۱ با احتمال ۰.۵ سیاست های ۱ و ۲ و بازیگر ۲ با احتمال ۰.۵ سیاست های ۲ و ۳ را انتخاب کنند. برای این منظور هر بازیگر یک سکه به هوا پرتاب می کند و براساس آن، یکی از دو سیاست قابل قبول خود را انتخاب می نماید.

مقدار *maximin* یا حد پایین ارزش بازی: سیاستی که صرف نظر از این که بازیگر دوم چه سیاستی را انتخاب کند مقدار امید ریاضی بازده یا برد بازیگر اول را حداکثر کند که به صورت $\underline{v}$ تعریف می شود. نمایش ریاضی این تعریف به صورت زیر می شود:

$$\underline{v}=\max_i(\min_j a_{ij})$$

مقدار *minimax* یا حد بالای ارزش بازی: سیاستی که صرف نظر از این که بازیگر اول چه سیاستی را انتخاب کند مقدار امید ریاضی بازده یا باخت بازیگر دوم را حداقل کند که به صورت $\overline{v}$ تعریف می شود. نمایش ریاضی این تعریف به صورت زیر می شود.

$$\overline{v}=\min_j(\max_i a_{ij})$$

اگر رابطه $\underline{v}<\overline{v}$ برقرار باشد، بازی نقطه پایدار ندارد و باید از سیاست مختلط استفاده کرد. حال اگر بازیگران از سیاست مختلط استفاده می کنند، v یا ارزش بازی به صورت زیر می شود.

$$v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j$$

در این مثال:

$$v=\frac{1}{4}\times(-2+2+4-3)=\frac{1}{4}$$

قضیه اساسی بازی های دو نفره مجموع صفر

چنانچه دو بازیگر یک بازی دونفره مجموع صفر از سیاست های مختلط استفاده کنند، همواره مقدار ارزش بازی برابر با $v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j$ است. بنابراین اگر هر دو بازیگر از سیاست مختلط استفاده کنند آنگاه امید ریاضی بازده آن ها مساوی v خواهد بود و هیچکدام از بازیگران نمی توانند با تغییر یک جانبه سیاست خود به وضعیت بهتری برسند.

اکنون این سئوال مطرح می شود که چگونه سیاست بهینه هر بازیگر را مشخص کرد. برای این کار چند روش وجود دارد. در ادامه دو روش رایج بیان می شود.

روش حل ترسیمی

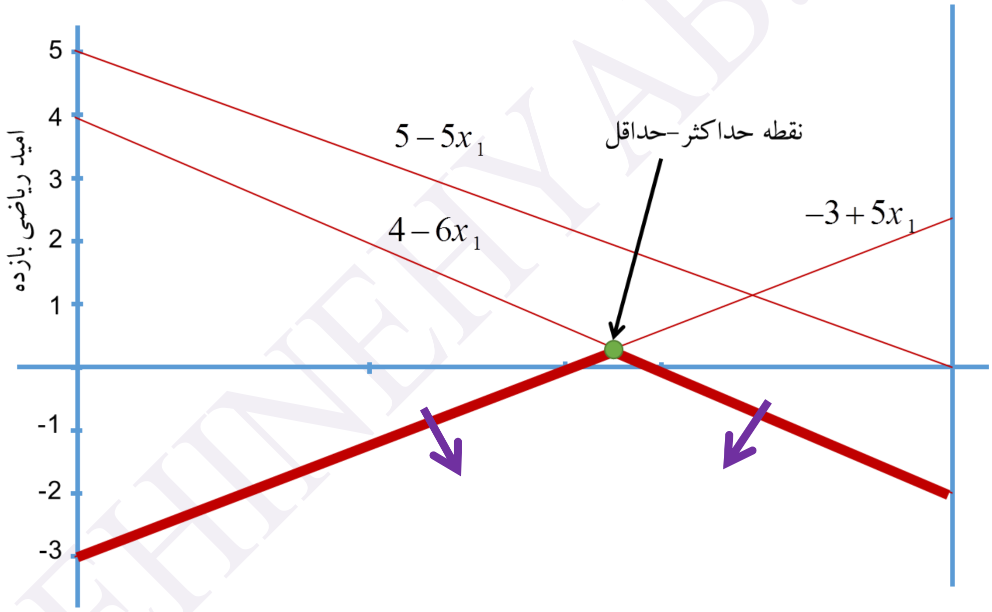
یک بازی با سیاست های مختلط را در نظر بگیرید که پس از حذف سیاست مغلوب تنها دو سیاست ساده باقی مانده باشد. به طور مشخص بازیگر ۱ را در نظر بگیرید که احتمال سیاست هایی که توسط وی انتخاب می شود به صورت (x_1,x_2) است به طوریکه $x_1=1-x_2$. در این حالت کافی است مقدار x_1 محاسبه شود. جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲: سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	x_1 سیاست ۱	۰	۲-	۲
	$1-x_1$ سیاست ۲	۵	۴	۳-

دریافتی بازیگر ۱ در صورت انتخاب سیاست ها توسط بازیگر ۲ به صورت زیر می شود.

بازیگر ۲	دریافتی بازیگر ۱
سیاست ۱	$0 \times x_1 + 5(1-x_1) = 5-5x_1$
سیاست ۲	$-2x_1 + 4(1-x_1) = 4-6x_1$
سیاست ۳	$2x_1 - 3(1-x_1) = -3+5x_1$

بازیگر ۱ به دنبال آن است که حداقل دریافتی مورد انتظار خود را حداکثر کند که نمایش گرافیکی آن به صورت زیر می شود.



مقدار بهینه امید ریاضی در محل تقاطع دو خط $-3+5x_1$ و $4-6x_1$ قرار دارد که از حل جبری $4-6x_1=-3+5x_1$ بدست می آید که $x_1=\frac{7}{11}$ بدست می آید یعنی سیاست بهینه بازیگر ۱ به صورت $(x_1,x_2)=(\frac{7}{11},\frac{4}{11})$ خواهد بود که ارزش بازی به ترتیب زیر بدست می آید.

$$v=-3+5(\frac{7}{11})=\frac{2}{11}$$

بنابراین نقطه بهینه برای بازیگر ۱ از برخورد سیاست های ۲ و ۳ برای بازیگر ۲ بدست می آید و لذا در سیاست بهینه بازیگر ۲، تنها سیاست هـای ۲ و ۳ نقـش دارنـد و احتمـال انتخـاب سیاسـت ۱ در سیاسـت ترکیبی برابر با صفر است.

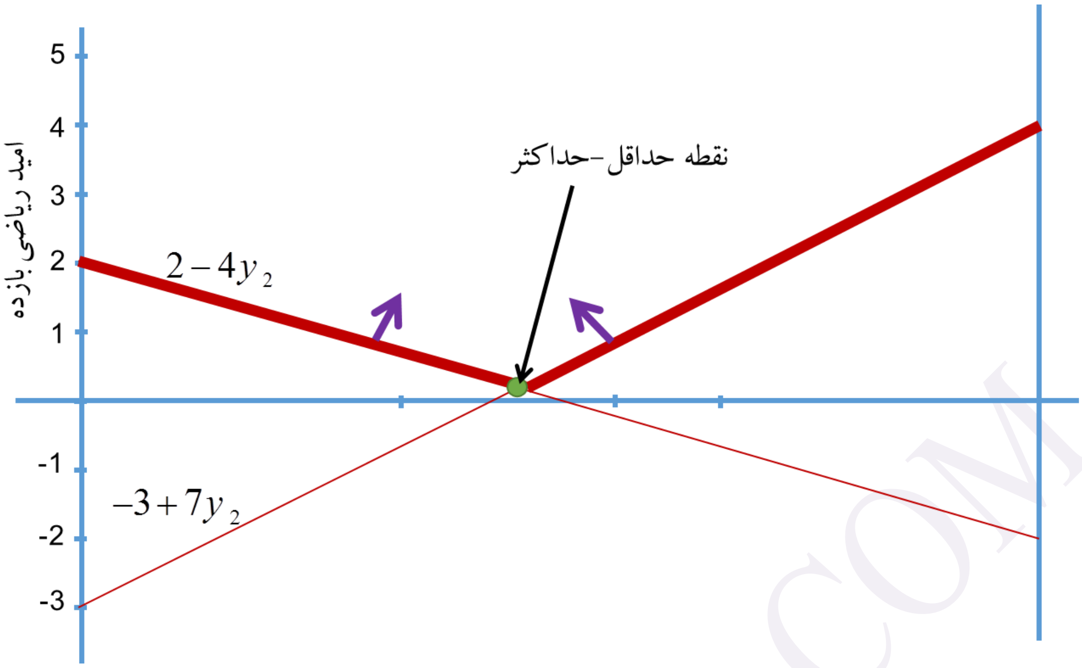
		سیاست ۱	سیاست ۲ (y_2)	سیاست ۳ ($1-y_2$)
			بازیگر ۲	
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	۲-	۲
	سیاست ۲	۵	۴	۳-

دریافتی بازیگر ۲ در صورت انتخاب سیاست ها توسط بازیگر ۱ به صورت زیر می شود.

بازیگر ۱	دریافتی بازیگر ۲
سیاست ۱	$-2y_2+2(1-y_2)=2-4y_2$
سیاست ۲	$4y_2-3(1-y_2)=-3+7y_2$

بازیگر ۲ به دنبال آن است که حداکثر دریافتی مورد انتظار خود را حداقل کند که نمایش گرافیکـی آن به صورت زیر می شود.

BEHINEHYAB.COM



مقدار بهینه امید ریاضی در محل تقاطع دو خط $-3+7y_2$ و $2-4y_2$ قرار دارد که از حل جبری $2-4y_2=-3+7y_2$ بدست می آید که $y_2=\frac{5}{11}$ بدست می آید یعنی سیاست بهینه بازیگر ۲ به صورت $(y_1,y_2,y_3)=(0,\frac{5}{11},\frac{6}{11})$ خواهد بود که ارزش بازی به ترتیب زیر بدست می آید.

$$v=-3+7(\frac{5}{11})=\frac{2}{11}$$

نکته: هر سیاست مختلط برای بازیگر ۱ تضمین می دهد که ارزش منافع مورد انتظار حداکثر برابر با بزرگی ارزش بازی است.

نکته: هر سیاست مختلط برای بازیگر ۲ تضمین می دهد که ارزش مورد انتظار پرداختی وی حداقل برابر با بزرگی ارزش بازی است.

حل از طریق برنامه ریزی خطی

هر بازی با سیاست های مختلط (بدون محدودیت بر روی تعداد سیاست های ساده مانند روش ترسیمی) می توان به راحتی از طریق آن به یک مدل برنامه ریزی خطی حل کرد. برای ارایه این روش از یک مثال کمک می گیریم.

مثال: برای مسئله بازی سنگ – کاغذ – قیچی جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲			
		y_1 سنگ	y_2 کاغذ	y_3 قیچی	حداقل
بازیگر ۱	x_1 سنگ	۰	−۱	۱	−۱
	x_2 کاغذ	۱	۰	−۱	−۱
	x_3 قیچی	−۱	۱	۰	−۱
	حداکثر	۱	۱	۱	

مقدار بازده مورد انتظار برای بازیگر ۱ براساس انتخاب بازیگر ۲ به صورت زیر است.

انتخاب بازیگر ۲	بازده مورد انتظار بازیگر 1
سنگ	$x_2 - x_3$
کاغذ	$-x_1 + x_3$
قیچی	$x_1 - x_2$

بازیگر ۲ به دنبال انتخاب سیاستی است که بازده یا جایزه مورد انتظار بازیگر ۱ را حداقل کند:

$$Min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2\}$$

و به طور متقابل بازیگر ۱ می کوشد که با توجه به این است که بازده یا جایزه خود را حداکثر نماید پس داریم:

$$Max\ \underbrace{Min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2\}}_{V}$$

رابطه بالا را می توان به صورت یک برنامه ریزی خطی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&Max\ V \\
&s.t. \\
&\quad V \le x_2 - x_3 \\
&\quad V \le -x_1 + x_3 \\
&\quad V \le x_1 - x_2 \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0; V\ \ unbounded
\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر می شود.

$$x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{1}{3}, x_3^* = \frac{1}{3}$$

و ارزش بازی با v^* نشان داده می شود و در مدل فوق برابر با صفر می شود.

مقدار بازده مورد انتظار برای بازیگر ۲ براساس انتخاب بازیگر ۱ به صورت زیر است.

BEHINEHYAB.COM

انتخاب بازیگر ۱	بازده مورد انتظار بازیگر ۲
سنگ	$-y_2+y_3$
کاغذ	y_1-y_3
قیچی	$-y_1+y_2$

بازیگر شماره ۱ به دنبال انتخاب سیاستی است که پرداخت مورد انتظار بازیگر شماره ۲ را حداکثر کند.

$$Max\ \{-y_2+y_3, y_1-y_3, -y_1+y_2\}$$

به طور متقابل نیز بازیگر شماره ۲ می کوشد که با توجه به این امر میزان این پرداختی مـورد انتظـار را حداقل نماید.

$$Min\ \underbrace{Max\ \{-y_2+y_3, y_1-y_3, -y_1+y_2\}}_{W}$$

رابطه بالا را می توان با استفاده از برنامه ریزی خطی به صورت یک مدل بهینه سازی بیان کرد.

$$\begin{aligned}
&Min\ \ W\\
&s.t.\\
&\ \ W \geq -y_2+y_3\\
&\ \ W \geq y_1-y_3\\
&\ \ W \geq -y_1+y_2\\
&\ \ y_1+y_2+y_3=1\\
&\ \ y_1, y_2, y_3 \geq 0; W\ \ unbounded
\end{aligned}$$

در صورت حل مدل فوق، جواب بهینه متغیرها به صورت زیر می شود.

$$y_1^*=\frac{1}{3}, y_2^*=\frac{1}{3}, y_3^*=\frac{1}{3}$$

W^* را ارزش بازی فوق می نامیم که برابر با صفر است.

BEHINEHYAB.COM

نکته: مدل خطی بازیگر شماره ۱، همزاد یا دوگان مدل خطی بازیگر شماره ۲ است و داریم $V^* = W^*$.

نکته: در یک بازی دونفره مجموع صفر اگر مقدار ثابت C را به هر عنصر ماتریس بازده اضافه کنیم در این صورت استراتژی بهینه تغییر نمی کند و ارزش بازی برابر با C می شود.

مثال: ماتریس بازده زیر را در نظر بگیرید. با استفاده برنامه ریزی خطی ارزش بازی و سیاست های بهینه را بدست آورید.

بازیگر ۲

			y_1	y_2	y_3	
			۱	۲	۳	حداقل
بازیگر ۱	x_1	۱	۳۰	۴۰	۳۶	۳۰
	x_2	۲	۶۰	۱۰	۳۶	۱۰
	حداکثر		۶۰	۴۰	۳۶	

به دلیل این که جدول بازده فوق دارای نقطه زین اسبی نیست، دارای سیاست بهینه مختلط است. برای محاسبه این سیاست از برنامه ریزی خطی استفاده می کنیم.

مدل برنامه ریزی خطی برای بازیگر ۱ به صورت زیر می شود.

$$
\begin{aligned}
&Max\ V\\
&s.t.\\
&V \le 30x_1 + 60x_2\\
&V \le 40x_1 + 10x_2\\
&V \le 36x_1 + 36x_2\\
&x_1 + x_2 = 1\\
&x_1, x_2 \ge 0; V\ \ unbounded
\end{aligned}
$$

مدل برنامه ریزی خطی برای بازیگر ۲ به صورت زیر می شود.

$$
\begin{aligned}
& Min\ W \\
& s.t. \\
& \quad W \geq 30y_1 + 40y_2 + 36y_3 \\
& \quad W \geq 60y_1 + 10y_2 + 36y_3 \\
& \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
& \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0; W \ \ unbounded
\end{aligned}
$$

از حل مدل های برنامه ریزی خطی فوق، سیاست بهینه و ارزش بازی به صورت زیر می شود.

$$x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{1}{6}, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = 0, V^* = W^* = 35$$

تمرین ها

تمرین: سیاست بهینه هر یک از بازیگران جدول بازده زیر را با استفاده از حذف متوالی سیاست های مغلوب تعیین کنید.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۳-	۱	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲	۱
	سیاست ۳	۱	۰	۲-

حل:

سیاست ۳ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می شود.

BEHINEHYAB.COM

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲	بازیگر ۲ سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	-۳	۱	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲	۱
حذف می شود	سیاست ۳	۱	۰	-۲

سیاست ۳ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۱ حذف می شود.

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲	حذف می شود سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	-۳	۱	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲	۱

سیاست ۱ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می شود.

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲
حذف می شود	سیاست ۱	-۳	۱
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲

BEHINEHYAB.COM

سیاست ۲ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۱ حذف می شود.

		بازیگر ۲	
			حذف می شود
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲

بنابراین سیاست بهینه برابر با انتخاب سیاست ۲ برای بازیگر ۱ و سیاست ۱ برای بازیگر ۲ است که منجر به بازده ۱ برای بازیگر ۱ می شود.

تمرین: سیاست بهینه هر یک از بازیگران جدول بازده زیر را با استفاده از حذف متوالی سیاست های مغلوب تعیین کنید.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
	سیاست ۱	۵	۷-	۲-	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۲-	۲	۵-	۵
	سیاست ۳	۲-	۵	۲-	۷

حل:

سیاست های ۱ و ۴ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۳ حذف می شود.

BEHINEHYAB.COM

بازیکن ۲

بازیکن ۱	سیاست ۱ (حذف می شود)	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴ (حذف می شود)
سیاست ۱	۵	۷-	۲-	۲
سیاست ۲	۲-	۲	۵-	۵
سیاست ۳	۲-	۵	۲-	۷

سیاست های ۱ و ۲ برای بازیکن ۱ توسط سیاست ۳ حذف می شود.

بازیکن ۲

بازیکن ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
حذف می شود سیاست ۱	۷-	۲-
حذف می شود سیاست ۲	۲	۵-
سیاست ۳	۵	۲-

سیاست ۲ برای بازیکن ۲ توسط سیاست ۳ حذف می شود.

بازیکن ۲

بازیکن ۱	سیاست ۲ (حذف می شود)	سیاست ۳
سیاست ۳	۵	۲-

بنابراین سیاست ۳ برای هر دو بازیکن سیاست بهینه است و بازده نهایی برای بازیکن ۲، برابر با ۲ و برای بازیکن ۱ برابر ۲- است.

تمرین: با استفاده از معیار حداقل حداکثر، بهترین سیاست برای هر بازیگر را بدست آورید؟ آیا این بازی نقطه زیر اسبی دارد؟ آیا این بازی پایدار است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۳	−۱	۳
بازیگر ۱	سیاست ۲	−۳	۱	۷
	سیاست ۳	۷	۳	۵

حل:

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل	
	سیاست ۱	۳	−۱	۳	−۱	
بازیگر ۱	سیاست ۲	−۳	۱	۷	−۳	
	سیاست ۳	۷	۳	۵	۳	حداکثر
	حداکثر	۷	۳	۷		
			حداقل			

سیاست بهینه، سیاست ۳ برای بازیگر ۱ و سیاست ۲ برای بازیگر ۲ و بازده نهایی ۳ برای بازیگر ۱ می شود. این بازی پایدار است و دارای نقطه زین اسبی دارد که این به دلیل برابری حداقل حداکثر با حداکثر حداقل است.

BEHINEHYAB.COM

تمرین: با استفاده از معیار حداقل حداکثر، بهترین سیاست برای هر بازیگر را بدست آورید؟ آیا این بازی نقطه زیر اسبی دارد؟ آیا این بازی پایدار است.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
بازیگر ۱	سیاست ۱	۳	−۳	−۲	−۴
	سیاست ۲	−۴	−۲	−۱	۱
	سیاست ۳	۱	−۱	۲	۰

حل:

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴	حداقل
بازیگر ۱	سیاست ۱	۳	−۳	−۲	−۴	−۴
	سیاست ۲	−۴	−۲	−۱	۱	−۴
	سیاست ۳	۱	−۱	۲	۰	−۱ حداکثر
	حداکثر	۱	−۱	۲	۱	

حداقل

بهترین سیاست، سیاست ۳ برای بازیگر ۱ و سیاست ۲ برای بازیگر ۲ است که منجر بـه بـازده ۱ بـرای بازیگر ۲ می شود. این بازی پایدار است و دارای نقطه زین اسبی (3,2) است.

تمرین:

BEHINEHYAB.COM

بازار محصولی در اختیار دو شرکت است. این دو شرکت برنامه بازاریابی سـال آینـده خـود را در دسـت تهینه دارند و سعی می کنند تا سهمی از بازار طرف مقابل را از آن خود کنند(مجموع فروش محصول تقریبا ثابت است، لذا افزایش فروش هر شرکت تنها از طریق کاهش فروش شرکت دیگـر امکـان پـذیر اسـت). هـر شرکت برای نیل به این مقصود سه راه پیش رو دارد.

- ✓ بهبود بسته بندی محصول
- ✓ افزایش تبلیغات
- ✓ کاهش قیمت محصول

هزینه اجرای هر سه راه حل تقریبا با یکدیگر برابر و به اندازه کافی زیاد اسـت، بـه طـوری کـه بودجـه بازاریابی هر شرکت تنها کفاف پیاده کردن یکی از سه راه حل را می دهد. اثرات انتخاب هر یـک از راه حـل ها توسط هر شرکت بر حسب درصد افزایش فروش شرکت ۱(بازیگر ۱) در جدول زیر نشان داده شده است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۲	۳	۱
	سیاست ۲	۱	۴	۰
	سیاست ۳	۳	−۲	−۱

هر شرکت سیاست خود را قبل از اطلاع از سیاست شرکت مقابل اتخاذ می نماید.

الف) بدون حذف سیاست های مغلوب و با استفاده از ضابطه حداقل حداکثر سیاست بهینه هر شرکت را مشخص کنید.

BEHINEHYAB.COM

ب) حال سیاست های مغلوب را تا آنجا که ممکن است مشخص و حذف کنید. فهرست سیاست های مغلوب را به ترتیب حذف آن ها بنویسید. سرانجام، جدول بازده که دیگر در آن سیاست مغلوبی وجود ندارد را نشان دهید.

حل:

الف) سیاست های بهینه برای بازیگران این بازی به صورت زیر محاسبه می شود.

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل	
بازیگر ۱	سیاست ۱	۲	۳	۱	۱	حداکثر
	سیاست ۲	۱	۴	۰	۰	
	سیاست ۳	۳	−۲	−۱	−۲	
	حداکثر	۳	۴	۱		
				حداقل		

بهترین سیاست، سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ به بازیگر ۲ و بازده نهایی برای بازیگر ۱ برابر با ۱ است.

ب)

سیاست ۱ برای بازیگر۲ توسط سیاست ۳ حذف می شود.

سیاست ۳ برای بازیگر ۱ توسط سیاست های ۱ و ۲ حذف می شود.

سیاست ۲ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۳ حذف می شود.

سیاست ۲ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۱ حذف می شود.

BEHINEHYAB.COM

جواب بهینه، سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ برای بازیگر ۲ است و بازده نهایی برای بازیگر ۱ برابر ۱ است.

تمرین:

دو تولید کننده که رقیب یکدیگر هستند هر کدام دو محصول تولید می کنند. سود هر دو محصول برابر است. میزان فروش تولید کننده دوم در مورد هر دو محصول، سه برابر تولید کننده اولی است. در حال حاضر، هر دو تولید کننده می خواهند همگام با پیشرفت های فنی، اصلاحات اساسی در محصولات خود انجام دهند. لیکن برای آن ها روشن نیست که در مورد اصلاح و بازاریابی چه سیاستی را باید انتخاب کنند.

اصلاح همزمان هر دو محصول برای هر کدام از تولید کنندگان به ۱۲ ماه وقت نیاز دارد. راه دیگر این است که با یک برنامه ضربتی ابتدا یک محصول را اصلاح کرد تا به این ترتیب سعی شود که قبل از رقیب، محصول اصلاح شده را به بازار فرستاد. در این صورت، اصلاح یک محصول برای تولید کننده دوم ۹ ماه و برای تولید کننده اول ۱۰ ماه طول می کشد(زیرتولید کننده اول در حال حاضر تعهدات دیگری نیز دارد). اصلاح دومین محصول برای هر دو تولید کننده ۹ ماه طول می کشد.

چنانچه هر دو تولید کننده محصولات اصلاح شده خود را همزمان به بازار عرضه کنند، پیش بینی می شود که سهم تولید کننده اول در بازار ۸ درصد افزایش یابد(یعنی از ۲۵ درصد فعلی به ۳۳ درصد می رسد). به همین ترتیب، اگر تولید کننده اول بتواند محصول اصلاح شده خود را ۲، ۶ یا ۸ ماه زودتر از رقیب به بازار عرضه کند سهم او در کل بازار به ترتیب ۲۰،۳۰، و ۴۰ درصد افزایش می یابد. از طرف دیگر اگر این تولید کننده ۱، ۳، ۷ یا ۱۰ ماه دیرتر از رقیب محصولی را وارد بازار کنند سهم او در کل بازار به ترتیب ۴، ۱۰، ۱۲، و ۱۴ درصد کاهش می یابد.

این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فورموله کنید. در چارچوب ضابطه حداقل حداکثر، هر تولید کننده باید چه سیاستی را انتخاب کند؟

حل:

محصولات با برچسب A و B معرفی می شوند. سیاست های مورد استفاده توسط این تولید کننده به صورت زیر است.

سیاست ۱ – اصلاح همزمان هر دو محصول

سیاست ۲ – اصلاح ضربتی محصول A

سیاست ۳ - اصلاح ضربتی محصول B

p_{ij} را برابر با $\frac{1}{2}\times$ {(درصد افزایش فروش کارخانه ۱ در محصول A)+(درصد افزایش فروش کارخانه ۱ از محصول B)} وقتی کارخانه ۱ سیاست i و کارخانه ۲ سیاست j را اخذ نماید. در این صورت ماتریس بازده برابر می شود با:

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۸	۱۰	۱۰
بازیگر ۱	سیاست ۲	۴	−۴	۱۳
	سیاست ۳	۴	۱۳	−۴

سیاست بهینه به صورت زیر محاسبه می شود.

BEHINEHYAB.COM

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	
	سیاست ۱	۸	۱۰	۱۰	۸ ← حداکثر
بازیگر ۱	سیاست ۲	۴	−۴	۱۳	−۴
	سیاست ۳	۴	۱۳	−۴	−۴
	حداکثر	۸	۱۳	۱۳	
		↑ حداقل			

در جدول فوق، سیاست بهینه برابر با اتخاذ سیاست ۱ (اصلاح همزمان برای هر دو محصول) برای هر دو کارخانه است. در این صورت کارخانه ۱ می تواند سهم خود را ۸ درصد افزایش دهد.

تمرین:

بازی دونفری زیر را در نظر بگیرید. در آغاز داور یک سکه را پرتاب و نتیجه آن را یادداشت می کند ضمنا به بازیگر اول نیز نشان می دهد. بازیگر اول دو راه در پیش دارد:

۱- صرف نظر کند و ۵ دلار به دومی بپردازد و بازی تمام می شود.

۲- شرط ببندد و بازی ادامه پیدا کند.

بازیگر دوم نیز دو راه در پیش خواهد داشت.

۱- صرفنظر کند و ۵ دلار به اولی بپردازد.

۲- درخواست اعلام نتیجه کند که در این صورت داور نتیجه پرتاب را اعلام می کند. چنانچه شیر باشد بازیگر دومی ۱۰ دلار به بازیگر اول و اگر خط باشد بازیگر اول همین مقدار به بازیگر دوم می پردازد.

الف) سیاست های ساده هر بازیگر را مشخص کنید.

ب) جدول بازده این بازی را تهیه کنید. با استفاده از سیاست مغلوب جدول را خلاصه کنید.

BEHINEHYAB.COM

ج) با استفاده از ضابطه حداقل حداکثر، آیا این جدول بازده نقطه زین اسبی دارد؟

حل:

الف) سیاست های ساده بازیگر ۱

۱- صرفنظر کردن از شیر یا خط

۲- شرط بندی روی شیر یا خط

۳- صرفه نظر کردن از شیر و شرط بندی روی خط

۴- صرف نظر کردن روی خط و شرط بندی روی شیر

سیاست ساده بازیگر ۲:

۱- اگر بازیگر ۱ شرط بندی کرد، آنگاه درخواست اعلام نتیجه.

۲- اگر بازیگر ۱ شرط بندی کرد، آنگاه صرف نظر کردن از شرط بندی.

ب)

		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	−۵	−۵
	سیاست ۲	۰	۵
	سیاست ۳	−۷٫۵	۰
	سیاست ۴	−۲٫۵	۰

سیاست ۱ و ۲ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می شود. لذا ماتریس بازده ساده شده بـه صـورت زیر می شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۰	۵
	سیاست ۴	۲,۵	۰

ج) به دلیل اینکه حداکثر حداقل (صفر) با حداقل حداکثر (۲.۵) برابر نیست لذا ایـن بـازی نقطـه زیـن اسبی ندارد.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	
بازیگر ۱	سیاست ۱	−۵	−۵	−۵
	سیاست ۲	۰	۵	۰ حداکثر
	سیاست ۳	−۷,۵	۰	−۷,۵
	سیاست ۴	۲,۵	۰	۰
		۲,۵	۵	
		حداقل		

تمرین: جدول بازده برای یک مسئله بازی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
بازیگر ۱	سیاست ۱	۵	۰	۳	۱
	سیاست ۲	۲	۴	۳	۲
	سیاست ۳	۳	۲	۰	۴

BEHINEHYAB.COM

الف) مسئله پیدا کردن سیاست های مختلط حداقل-حداکثر را به مسئله معادل برنامه ریزی خطی تبدیل کنید.

ب) جواب بهینه مدل خطی بدست آمده را با استفاده از روش سیمپلکس بدست آورید.

حل:

الف)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad x_4 \\
&5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0 \\
&\qquad 4x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 0 \\
&3x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \geq 0 \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 0 \\
&x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

ب) جواب بهینه مدل قسمت (الف) به صورت زیر می شود.

متغیر	مقدار بهینه
x_1	0.053
x_2	0.737
x_3	0.211
x_4	2.368

در این حالت ارزش بازی برابر با ۲.۳۶۸ می شود.

تمرین: جدول بازده بازی ریاضی زیر را در نظر بگیرید.

BEHINEHYAB.COM

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۵	−۴
	سیاست ۲	−۲	۳

الف) ارزش بازی و سیاست مختلط هر بازیگر را در قالب ضابطه حداقل حداکثر و با استفاده از روش ترسیمی تعیین نمایید.

ب) در صورتیکه جدول بازده بازیگر ۲ را به عنوان پایه در نظر بگیریم، جواب بهینه مسئله بازی فوق الذکر را با استفاده از روش ترسیمی بیابید.

حل:

الف)

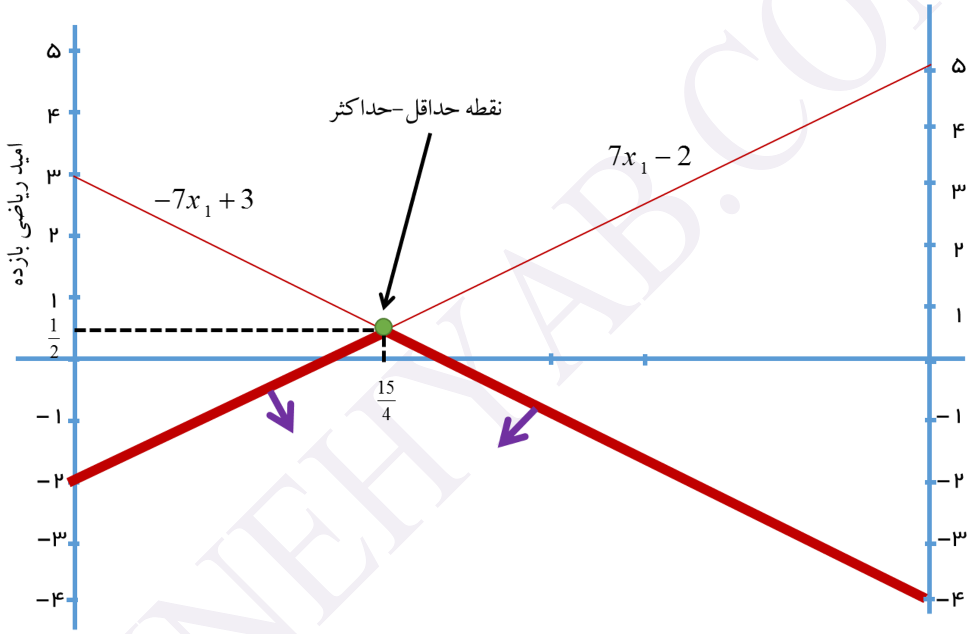
			بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲
بازیگر ۱	x_1	سیاست ۱	۵	−۴
	$1-x_1$	سیاست ۲	−۲	۳

لذا داریم.

BEHINEHYAB.COM

		دریافتی بازیگر ۱
بازیگر ۲	سیاست ۱	$5x_1 - 2(1-x_1) = 7x_1 - 2$
	سیاست ۲	$-4x_1 + 3(1-x_1) = 3 - 7x_1$

و نمایش ترسیمی مسئله ریاضی فوق به صورت زیر می شود.



$$7x_1 - 2 = -7x_1 + 3 \rightarrow (x_1^*, x_2^*) = (\frac{5}{14}, \frac{9}{14}) \rightarrow v = 7(\frac{5}{14}) - 2 = 0.5$$

امید ریاضی بازده برای سیاست مختلط (y_1, y_2) به صورت زیر است.

$$\left.\begin{array}{l} 5y_1 - 4y_2 = 0.5 \\ -2y_1 + 3y_2 = 0.5 \end{array}\right\} \rightarrow (y_1, y_2) = (0.5, 0.5)$$

ب) از منظر بازیگر ۲، ماتریس بازده به صورت زیر می شود.

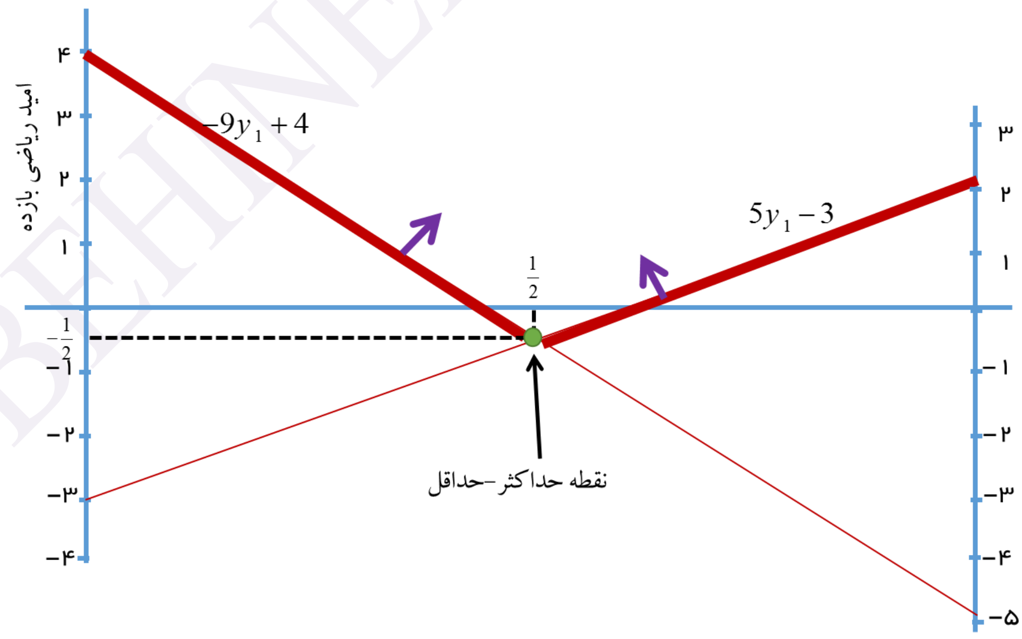
BEHINEHYAB.COM

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱ (y_1)	سیاست ۲ ($1-y_1$)
بازیگر ۱	سیاست ۱	۵-	۴
	سیاست ۲	۲	۳-

لذا داریم:

		دریافتی بازیگر ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	$-5y_1+4(1-y_1)=-9y_1+4$
	سیاست ۲	$2y_1-3(1-y_1)=-3+5y_1$

و نمایش ترسیمی مسئله بازی فوق به صورت زیر می شود.



$$-9y_1+4=5y_1-3 \rightarrow (y_1^*,y_2^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \rightarrow v=5(\frac{1}{2})-3=-0.5$$

BEHINEHYAB.COM

تمرین:

برای جدول بازده زیر، ارزش بازی و سیاست مختلط بازیگر را به وسیله ضابطه حداقل-حداکثر و با استفاده از روش ترسیمی بیابید.

		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲	بازیگر ۲: سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۴	۳	۱
	سیاست ۲	۰	۱	۲

حل:

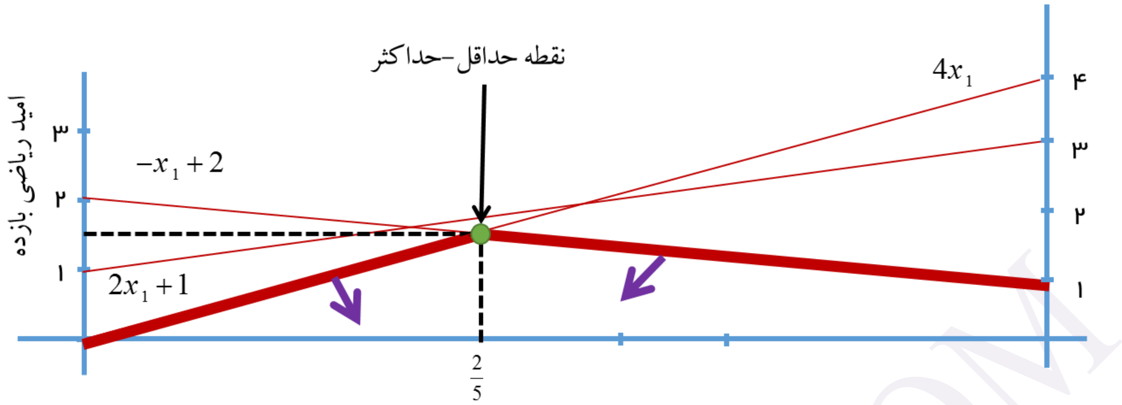
			بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲	بازیگر ۲: سیاست ۳
بازیگر ۱	x_1	سیاست ۱	۴	۳	۱
	$1-x_1$	سیاست ۲	۰	۱	۲

لذا داریم:

		دریافتی بازیگر ۱
بازیگر ۲	سیاست ۱	$4x_1 = 4x_1$
	سیاست ۲	$3x_1 + (1-x_1) = 2x_1 + 1$
	سیاست ۳	$x_1 + 2(1-x_1) = -x_1 + 2$

BEHINEHYAB.COM

و نمایش ترسیمی مسئله بازی فوق به صورت زیر می شود.



$$4x_1=-x_1+2 \rightarrow (x_1,x_2)=(\frac{2}{5},\frac{3}{5}) \rightarrow v=\frac{8}{5}$$

برای محاسبه سیاست مختلط بازیگر ۲ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\left.\begin{aligned} 4y_1+3y_2+y_3&=\frac{8}{5} \\ +y_2+2y_3&=\frac{8}{5} \\ y_1+y_2+y_3&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow (y_1^*,y_2^*,y_3^*)=(\frac{1}{5},0,\frac{4}{5})$$

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**

BEHINEHYAB.COM