

درس ۴: برنامه‌ریزی خطی پارامتری

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

در بخش تحلیل حساسیت، توجه خود را به تغییراتی در داده‌ها پرداخته شد که جواب اساسی بهینه تغییر نکند و در صورت تجاوز مقادیر از مقداری که باعث چرخش لولا شود، دیگر معتبر نیست. بررسی نظام‌مند تحلیل حساسیت به ازای تغییر همزمان و تدریجی پارامترها در روش برنامه‌ریزی پارامتری بررسی می‌شود.

تغییر نظام گرای پارامترهای c_j

تابع هدف زیر را در نظر بگیرید:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

در برنامه‌ریزی پارامتری، تابع هدف فوق با تابع زیر جایگزین می‌شود.

$$Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

α_j داده‌های ثابتی هستند که معرف آهنگ تغییرات ضرایب تابع هدف خواهند بود. مقدار θ به تدریج از صفر بزرگتر می‌شود. برای تشریح عملکرد مدل برنامه‌ریزی خطی با تغییر θ ، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5.$$

حل: مقدار $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -1$ در نظر بگیرید. لذا تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

$$Z(\theta) = (3 + 2\theta)x_1 + (5 - \theta)x_2$$

از جدول نهایی سیمپلکس با $\theta = 0$ شروع می‌کنیم که تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

$$Z + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

تغییرات تابع هدف را به سمت چپ تابع هدف اضافه می‌کنیم که به صورت زیر می‌شود.

$$Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

چون x_1 و x_2 متغیرهای اساسی هستند (که در معادلات ۲ و ۳ ظاهر شدند)، باید ضریب این دو متغیر در تابع هدف فوق برابر صفر شود که این کار با اضافه کردن معادلات ۲ و ۳ به تابع هدف میسر می‌شود که به صورت زیر می‌شود:

$$Z + (1.5 - \frac{7}{6}\theta)x_4 + (1 + \frac{2}{3}\theta)x_5 = 36 - 2\theta$$

با توجه به دستور توقف الگوریتم سیمپلکس اولیه، مادامیکه ضرایب متغیرهای غیراساسی غیرمنفی باقی بمانند، جواب اساسی موجه فعلی بهینه خواهد ماند پس داریم:

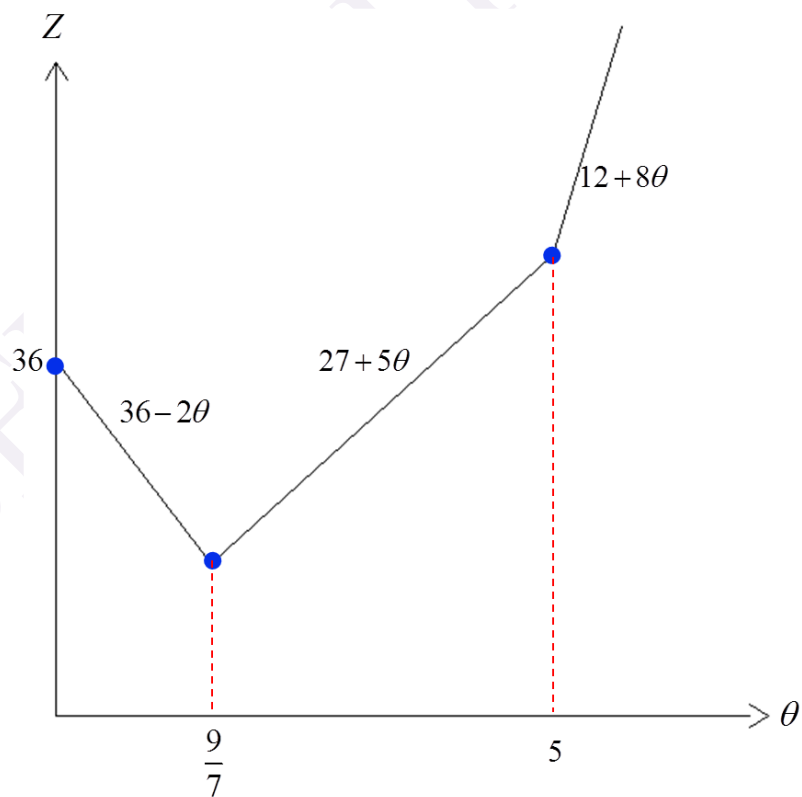
$$1.5 - \frac{7}{6}\theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$$

$$1 + \frac{2}{3}\theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta$$

بنابراین اگر $\theta > \frac{9}{7}$ شود، x_4 به عنوان متغیر اساسی ورودی تکرار بعدی سیمپلکس انتخاب می‌گردد و تا جواب بهینه جدید بدست آید. می‌توان θ را باز هم اضافه کرد تا اینکه ضریب دیگری منفی شود و به همین ترتیب می‌توان θ را تا هر مقداری افزایش داد. خلاصه رویه فوق با افزایش θ در جدول زیر آمده است.

| دامنه θ | متغیر اساسی | شماره معادله | Z | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | X ₅ | طرف سمت راست |
|----------------------------------|----------------|--------------|---|----------------|----------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|
| $0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$ | Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{9-7\theta}{6}$ | $\frac{3+2\theta}{3}$ | $36-2\theta$ |
| | X ₃ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.33 | -0.5 | 2 |
| | X ₂ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | 6 |
| | X ₁ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0.33 | 0.33 | 2 |
| $\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$ | Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{-9+7\theta}{2}$ | 0 | $\frac{5-\theta}{2}$ | $27+5\theta$ |
| | X ₄ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | -1 | 6 |
| | X ₂ | 2 | 0 | 0 | 1 | -1.5 | 0 | 0.5 | 3 |
| | X ₁ | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $\theta \geq 5$ | Z | 0 | 1 | 0 | $-5+\theta$ | $3+2\theta$ | 0 | 0 | $12+8\theta$ |
| | X ₄ | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | X ₅ | 2 | 0 | 0 | 2 | -3 | 0 | 1 | 6 |
| | X ₁ | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |

مقدار تابع هدف جواب بهینه به عنوان تابعی از θ به صورت زیر می شود.



تغییرات نظام گرا پارامترهای سمت راست (b_i)

در این حالت تغییری که داده می‌شود این است که به جای b_i عبارت $b_i + \alpha_i \theta$ قرار می‌گیرد که α_i داده‌های ثابتی هستند. بنابراین، مسئله به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i + \alpha_i \theta \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

هدف از این بخش، مشخص کردن جواب بهینه به عنوان تابعی از θ است. رویه حلی که در زیر بیان می‌شود شباهت زیادی با روند آنچه که به ازای تغییر c_j گفته شده دارد که دلیل آن معادل بودن تغییر در ضرایب تابع هدف مسئله اولیه با تغییر ضرایب سمت راست مسئله همزاد است. برای تشریح بیشتر موضوع چند تمرین حل می‌کنیم.

تمرین: از رویه برنامه‌ریزی خطی پارامتری برای انجام تغییرات نظام گرا در b_i استفاده کنید و جواب بهینه مسئله زیر را به صورت تابعی از θ برای $0 \leq \theta \leq 25$ بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z(\theta) &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \\ (1) \quad x_1 &\leq 10 + 2\theta \\ (2) \quad x_1 + x_2 &\leq 25 - \theta \\ (3) \quad x_2 &\leq 10 + 2\theta \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

حل:

| متغیر اساسی | شماره معادله | Z | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | X ₅ | طرف سمت راست |
|----------------|-----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------|
| Z | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| X ₃ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| X ₄ | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $25-\theta$ |
| X ₅ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 | 0 | $20+4\theta$ |
| X ₁ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| X ₄ | 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | $15-3\theta$ |
| X ₅ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | $30+6\theta$ |
| X ₁ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| X ₄ | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | $5-5\theta$ |
| X ₂ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $35+\theta$ |
| X ₁ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| X ₅ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | $5\theta-5$ |
| X ₂ | 3 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | $15-3\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | $50-2\theta$ |
| X ₁ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $25-\theta$ |
| X ₅ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| X ₃ | 3 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | $3\theta-15$ |

خلاصه نتایج در جدول زیر آمده است.

| θ | (x_1^*, x_2^*) | $Z^*(\theta)$ |
|-------------------------|--------------------------------|----------------|
| $0 \leq \theta \leq 1$ | $(10 + 2\theta, 10 + 2\theta)$ | $30 + 6\theta$ |
| $1 \leq \theta \leq 5$ | $(10 + 2\theta, 15 - 3\theta)$ | $35 + \theta$ |
| $5 \leq \theta \leq 25$ | $(25 - \theta, 0)$ | $50 - 2\theta$ |

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**

BEHINEHYAB.COM