به نام خدا

بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

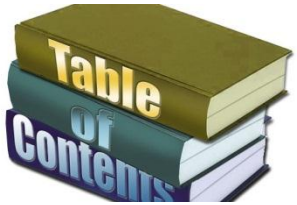
# درس ۴: برنامه ریزی خطی پارامتری

# فهرست مطالب


۱ تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

۲ تغییر نظام گرای پارامترهای $b_i$

۳ تمرین ها

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

تابع هدف زیر را در نظر بگیرید:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

در برنامه ریزی پارامتری، تابع هدف فوق با تابع زیر جایگزین می شود.

$$Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$\alpha_j$ داده های ثابتی هستند که معرف آهنگ تغییرات ضرایب تابع هدف خواهند بود. مقدار $\theta$ به تدریج از صفر بزرگتر می شود. برای تشریح عملکرد مدل برنامه ریزی خطی با تغییر $\theta$ ، مثال زیر را در نظر بگیرید.

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

مثال:

$$Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$s.t.$$

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,5.$$

حل: مقدار $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -1$ در نظر بگیرید. لذا تابع هدف به صورت زیر می شود.

$$Z(\theta) = (3+2\theta)x_1 + (5-\theta)x_2$$

از جدول نهایی سیمپلکس با $\theta = 0$ شروع می کنیم که تابع هدف به صورت زیر می شود.

$$Z + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

تغییرات تابع هدف را به سمت چپ تابع هدف اضافه می کنیم که به صورت زیر می شود.

$$Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

چون $x_1$ و $x_2$ متغیرهای اساسی هستند ( که در معادلات ۲ و ۳ ظاهر شدند)، باید ضریب این دو متغیر در تابع هدف فوق برابر صفر شود که این کار با اضافه کردن معادلات ۲ و ۳ به تابع هدف میسر می شود که به صورت زیر می شود:

$$Z + (1.5 - \frac{7}{6}\theta)x_4 + (1 + \frac{2}{3}\theta)x_5 = 36 - 2\theta$$

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

با توجه به دستور توقف الگوریتم سیمپلکس اولیه، مادامیکه ضرایب متغیرهای غیراساسی غیرمنفی باقی بمانند، جواب اساسی موجه فعلی بهینه خواهد ماند پس داریم:

$$1.5-\frac{7}{6}\theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$$

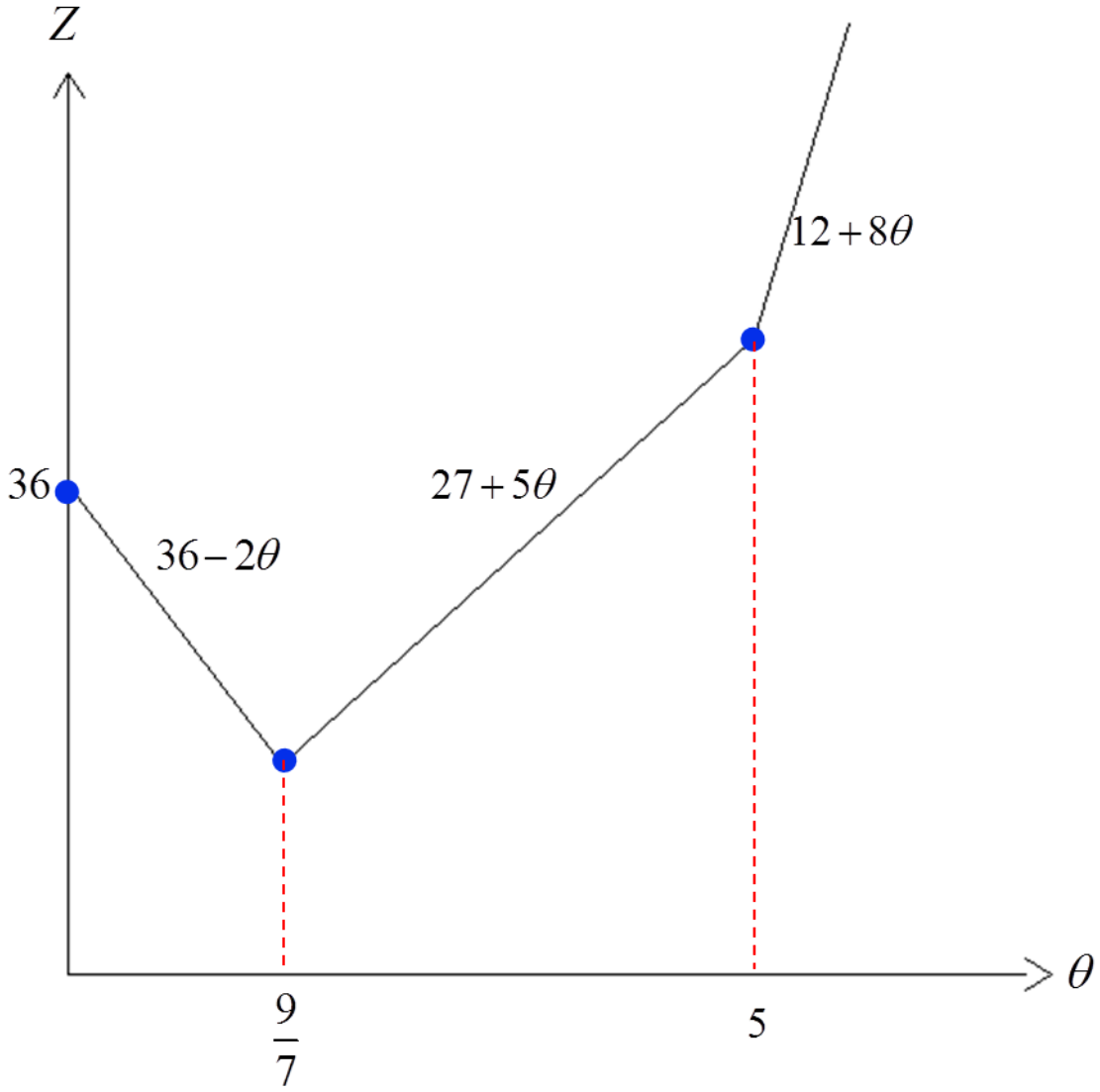
$$1+\frac{2}{3}\theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta$$

بنابراین اگر $\theta > \frac{9}{7}$ شود، $x_4$ به عنوان متغیر اساسی ورودی تکرار بعدی سیمپلکس انتخاب می گردد و تا جواب بهینه جدید بدست آید. می توان $\theta$ را باز هم اضافه کرد تا اینکه ضریب دیگری منفی شود و به همین ترتیب می توان $\theta$ را تا هر مقداری افزایش داد. خلاصه رویه فوق با افزایش $\theta$ در جدول زیر آمده است.

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$

| دامنه $\theta$ | متغیر اساسی | شماره معادله | Z | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | طرف سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 \le \theta \le \frac{9}{7}$ | Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{9-7\theta}{6}$ | $\frac{3+2\theta}{3}$ | $36-2\theta$ |
| | $X_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.33 | -0.5 | 2 |
| | $X_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | 6 |
| | $X_1$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0.33 | 0.33 | 2 |
| $\frac{9}{7} \le \theta \le 5$ | Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{-9+7\theta}{2}$ | 0 | $\frac{5-\theta}{2}$ | $27+5\theta$ |
| | $X_4$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | -1 | 6 |
| | $X_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | -1.5 | 0 | 0.5 | 3 |
| | $X_1$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $\theta \ge 5$ | Z | 0 | 1 | 0 | $-5+\theta$ | $3+2\theta$ | 0 | 0 | $12+8\theta$ |
| | $X_4$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | $X_5$ | 2 | 0 | 0 | 2 | -3 | 0 | 1 | 6 |
| | $X_1$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |

# تغییر نظام گرای پارامترهای $c_j$



# تغییر نظام گرای پارامترهای $b_i$

در این حالت تغییری که داده می شود این است که به جای $b_i$ عبارت $b_i + \alpha_i \theta$ قرار می گیرد که $\alpha_i$ داده های ثابتی هستند. بنابراین، مسئله به صورت زیر در می آید.

$$Max \ Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + \alpha_i \theta \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, n.$$

# تغییر نظام گرای پارامترهای $b_i$

**تمرین:** از رویه برنامه ریزی خطی پارامتری برای انجام تغییرات نظام گرا در $b_i$ استفاده کنید و جواب بهینه مسئله زیر را به صورت تابعی از $\theta$ برای $0 \le \theta \le 25$ بدست اورید.

$$Max \quad Z(\theta) = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad x_1 \le 10 + 2\theta$$

$$(2) \qquad x_1 + x_2 \le 25 - \theta$$

$$(3) \qquad x_2 \le 10 + 2\theta$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1, 2.$$

| متغیر اساسی | شماره معادله | Z | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | طرف سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $X_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| $X_4$ | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $25-\theta$ |
| $X_5$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 | 0 | $20+4\theta$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| $X_4$ | 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | $15-3\theta$ |
| $X_5$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | $30+6\theta$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| $X_4$ | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | $5-5\theta$ |
| $X_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $35+\theta$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10+2\theta$ |
| $X_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | $5\theta-5$ |
| $X_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | $15-3\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | $50-2\theta$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $25-\theta$ |
| $X_5$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $10+2\theta$ |
| $X_3$ | 3 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | $3\theta-15$ |

بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

# تغییر نظام گرای پارامترهای $b_i$

خلاصه نتایج در جدول زیر آمده است.

| $\theta$ | $(x_1^*, x_2^*)$ | $Z^*(\theta)$ |
|---|---|---|
| $0 \le \theta \le 1$ | $(10+2\theta, 10+2\theta)$ | $30+6\theta$ |
| $1 \le \theta \le 5$ | $(10+2\theta, 15-3\theta)$ | $35+\theta$ |
| $5 \le \theta \le 25$ | $(25-\theta, 0)$ | $50-2\theta$ |

# تمرین ها

مثال

$$Max \quad Z(\theta) = 8x_1 + 24x_2$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$(2) \qquad 2x_1 + x_2 \le 10$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1, 2.$$

به طور مشخص، فرض کنید بتوان سود فعالیت اول را از ۸ بالاتر برد(حداکثر تا ۱۸). اما به ازای افزایش یک واحد سود واحد اول، سود فعالیت دوم به اندازه دو واحد کاهش می یابد.

# تمرین ها

بنابراین، $Z(\theta)$ باید به صورت زیر نشان داده شود.

$$Z(\theta) = (8+\theta)x_1 + (24-2\theta)x_2$$

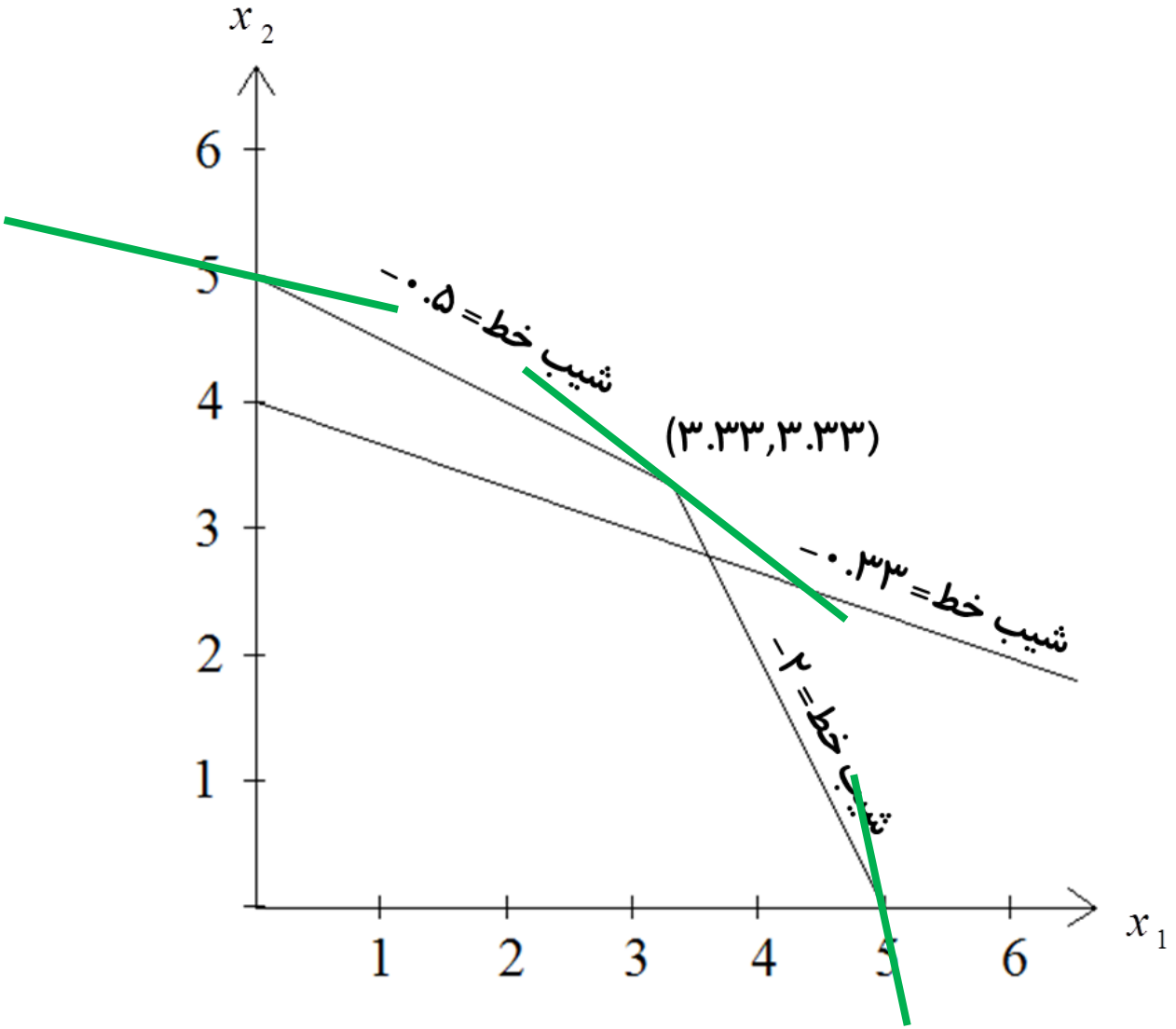
که $\theta$ خود یک متغیر تصمیم گیری است به طوریکه $0 \le \theta \le 10$.

الف) جواب بهینه شکل اصلی مسئله با استفاده از روش سیمپلکس بدست آورید. سپس از برنامه ریزی خطی پارامتری استفاده کرده و جواب بهینه و همچنین مقدار بهینه $Z(\theta)$ را به صورت تابعی از $\theta$ به ازای $0 \le \theta \le 10$ مشخص کنید.

ب) مقدار بهینه $\theta$ را مشخص کنید.

# تمرین ها

حل:الف)



# تمرین ها

جواب بهینه $(0,5)$ تا زمانی برقرار است که

$$-\frac{8+\theta}{24-2\theta} \geq -0.5 \rightarrow \theta \leq 2$$

جواب بهینه $(3.33,3.33)$ تا زمانی بهینه است که

$$-0.5 \geq -\frac{8+\theta}{24-2\theta} \geq -2 \rightarrow 2 \leq \theta \leq 8$$

جواب بهینه $(5,0)$ تا زمانی بهینه است که

$$-\frac{8+\theta}{24-2\theta} \leq -2 \rightarrow \theta \geq 8$$

# تمرین ها

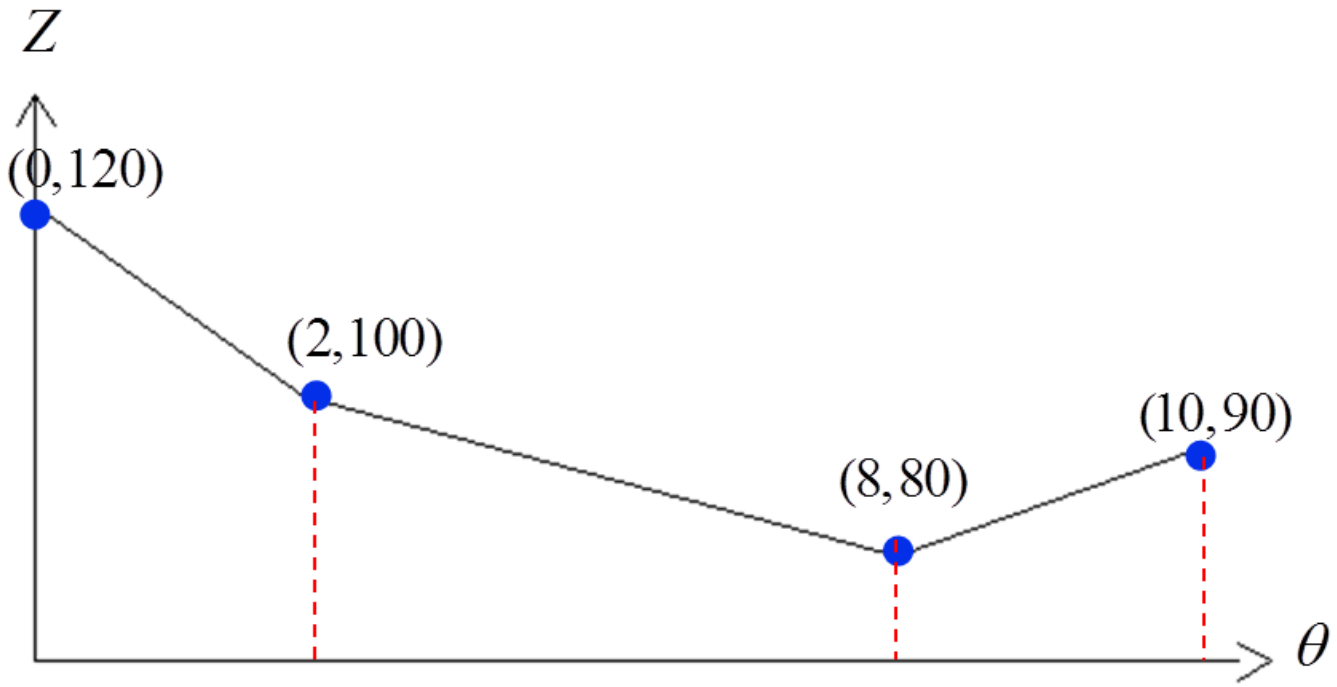
| تکرار | متغیر اساسی | شماره معادله | Z | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | طرف سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Z | 0 | 1 | $-8-\theta$ | $-24+2\theta$ | 0 | 0 | 0 |
| | $X_3$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 10 |
| | $X_4$ | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 10 |
| 1 | Z | 0 | 1 | $4-2\theta$ | 0 | $12-\theta$ | 0 | $120-10\theta$ |
| | $X_2$ | 1 | 0 | 0.5 | 1 | 0.5 | 0 | 5 |
| | $X_4$ | 2 | 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 1 | 5 |
| 2 | Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{40-5\theta}{3}$ | $\frac{8-4\theta}{3}$ | $\frac{320-10\theta}{3}$ |
| | $X_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0.66 | -0.33 | 3.33 |
| | $X_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -0.33 | 0.66 | 3.33 |
| 4 | Z | 0 | 1 | 0 | $\frac{-40+5\theta}{2}$ | 0 | $\frac{8+\theta}{2}$ | $40+5\theta$ |
| | $X_3$ | 1 | 0 | 0 | 1.5 | 1 | -0.5 | 5 |
| | $X_1$ | 2 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | 0.5 | 5 |

# تمرین ها

جدول زیر جواب بهینه مدل را به ازای کلیه مقادیر $0 \le \theta \le 10$ نشان می دهد.

| $\theta$ | $(x_1^*, x_2^*)$ | $Z^*(\theta)$ |
|---|---|---|
| $0 \le \theta \le 2$ | $(0,5)$ | $120-10\theta$ |
| $2 \le \theta \le 8$ | $(3.33,3.33)$ | $\frac{(320-10\theta)}{2}$ |
| $8 \le \theta \le 10$ | $(5,0)$ | $40+5\theta$ |

# تمرین ها




ب) با توجه به گراف بالا می توان فهمید که به ازای $\theta = 0$ بهترین جواب مدل را خواهیم داشت. با توجه به اینکه $Z(\theta)$ یک تابع محدب بر حسب $\theta$ است، مقدار ماکزیمم در حدود اتفاق می افتد و لذا کافی است که برنامه ریزی خطی برای مقادیر $\theta = 0$ و $\theta = 10$ را حل نماییم.

# تمرین ها

**تمرین: با استفاده از برنامه ریزی خطی پارامتری مقدار بهینه مدل زیر را برای $0 \le \theta \le 20$ بدست آورید.**

$$Max \quad Z(\theta) = (20+4\theta)x_1 + (30-3\theta)x_2 + 5x_3$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10$$

$$(2) \qquad 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 25$$

$$(3) \qquad 6x_1 + x_2 + x_3 \le 15$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3.$$

# تمرین ها

بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

حل:الف)

| متغیر اساسی | شماره معادله | Z | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | طرف سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | $-20-4\theta$ | $-30+3\theta$ | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $X_4$ | 1 | 0 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $X_5$ | 2 | 0 | 8 | 6 | 4 | 0 | 1 | 0 | 25 |
| $X_6$ | 3 | 0 | 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 15 |
| Z | 0 | 1 | $10-7\theta$ | 0 | $5-\theta$ | $10-\theta$ | 0 | 0 | $100-10\theta$ |
| $X_2$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0.33 | 0.33 | 0 | 0 | 3.33 |
| $X_5$ | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | -2 | 1 | 0 | 5 |
| $X_6$ | 3 | 0 | 5 | 0 | 0.66 | -0.33 | 0 | 1 | 11.66 |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{55-\theta}{15}$ | $\frac{160-22\theta}{15}$ | 0 | $\frac{-10+7\theta}{5}$ | $\frac{230+19\theta}{3}$ |
| $X_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0.2 | 0.4 | 0 | -0.2 | 1 |
| $X_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 26/15 | -28/15 | 1 | -0.4 | 0.33 |
| $X_1$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 2/15 | -1/15 | 0 | 1/5 | 2.33 |
| Z | 0 | 1 | 0 | $\frac{-80+11\theta}{3}$ | $\frac{-5+2\theta}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{10+2\theta}{3}$ | $50+10\theta$ |
| $X_4$ | 1 | 0 | 0 | 2.5 | 0.5 | 1 | 0 | -0.5 | 2.5 |
| $X_5$ | 2 | 0 | 0 | 14/3 | 8/3 | 0 | 1 | -4/3 | 5 |
| $X_1$ | 3 | 0 | 1 | 1/6 | 1/6 | 0 | 0 | 1/6 | 2.5 |

# تمرین ها

مقدار بهینه تابع هدف به ازای مقادیر مختلف $\theta$ به صورت زیر است.

| $\theta$ | $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ | $Z^*(\theta)$ |
|---|---|---|
| $0 \le \theta \le \frac{10}{7}$ | $(0, \frac{10}{3}, 0)$ | $100 - 10\theta$ |
| $\frac{10}{7} \le \theta \le \frac{80}{11}$ | $(3.33, 1, 0)$ | $\frac{(230 + 19\theta)}{3}$ |
| $\frac{80}{11} \le \theta$ | $(2.5, 0, 0)$ | $50 + 10\theta$ |

# تمرین ها

**تمرین: از روش برنامه ریزی خطی پارامتری برای انجام تغییرات استفاده کنید و جواب بهینه مسئله زیر را به صورت تابعی از $\theta$ به ازای $0 \le \theta \le 30$ بدست آورید.**

$$Max \quad Z(\theta) = 5x_1 + 42x_2 + 28x_3 + 49x_4$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 135 - 2\theta$$

$$(2) \qquad 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \le 78 - \theta$$

$$(3) \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30 + \theta$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,..,4.$$

# تمرین ها

**حل:**

| متغیر اساسی | شماره معادله | Z | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | طرف سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -5 | -42 | -28 | -49 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $X_5$ | 1 | 0 | 3 | -2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | $135-2\theta$ |
| $X_6$ | 2 | 0 | 2 | 4 | -1 | 2 | 0 | 1 | 0 | $78-\theta$ |
| $X_7$ | 3 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | $30+\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 19.5 | 7 | -3.5 | 0 | 0 | 0 | 24.5 | $735+24.5\theta$ |
| $X_5$ | 1 | 0 | 1.5 | -5 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | -1.5 | $90-3.5\theta$ |
| $X_6$ | 2 | 0 | 1 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | -1 | $48-2\theta$ |
| $X_4$ | 3 | 0 | 0.5 | 1 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | $15+0.5\theta$ |
| Z | 0 | 1 | 24 | 14 | 0 | 7 | 0 | 0 | 28 | $840+28\theta$ |
| $X_5$ | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | $105-3\theta$ |
| $X_6$ | 2 | 0 | 3 | 6 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0.5 | 108 |
| $X_3$ | 3 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | $30+\theta$ |

برای $\theta \le 30$ جواب بهینه $840+28\theta$ و $(0,0,30+\theta,0,105-3\theta,108)$ خواهد بود.

بهینه یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com