

درس ۱۹:

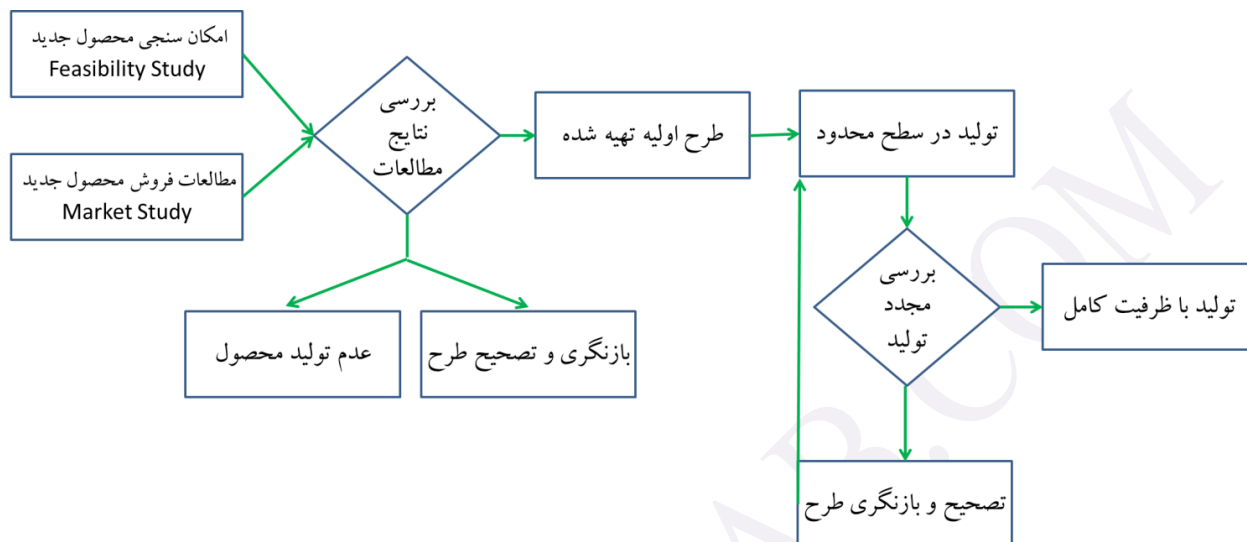
درخت تصمیم گیری

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

فرآیند تصمیم گیری در بسیاری از حالات متشکل از یک توالی از تصمیمات است که می توان به صورت نمودار زیر به طور خلاصه بیان کرد.



در تصمیمات غیر دنباله ای، تحلیل تصمیم می تواند براساس ماتریس پرداخت یا *Payoff Matrix* باشد. در تصمیمات دنباله ای (در آن به دنبال ارزیابی آلترناتیوها یا گزینه ها هستیم) که در آن تصمیم فعلی متأثر از تصمیمات گذشته بوده و تابعی از متغیرهای حالت و تصمیمات آینده است می توان از **درخت تصمیم گیری** یا *Decision Tree* استفاده کرد. ارزیابی آلترناتیوها بر اساس مفهوم ارزش پولی مورد انتظار یا *EMV* (*Expected Monetary Value*) استوار است که در ادامه توضیح داده می شود.

ارزش پولی مورد انتظار یا *EMV* یا (*Expected Monetary Value*)

در صورتی که ماتریس پرداخت میزان دریافتی به ازای حالات و آلترناتیوهای مختلف را در اختیار داشته باشیم و احتمال وقوع هر حالت نیز مشخص باشد، ارزش پولی مورد انتظار هر آلترناتیو نظیر a_j به صورت زیر محاسبه می شود.

$$EMV(a_j) = \sum_i P(\theta_i, a_j) \times p(\theta_i)$$

که در آن

$P(\theta_i, a_j)$: میزان دریافتی حالت θ_i برای گزینه a_j (ماتریس پرداخت)

$p(\theta_i)$: احتمال وقوع حالت θ_i

مثال: شرکت کاله می‌خواهد در مورد تولید یک نوع جدید پنیر پیتزا تصمیم گیری کند. جهت تولید این نوع پنیر، باید خط جدیدی ایجاد شود که این کار به صورت راه اندازی یک خط جدید (a_1) یا از تغییر و بهسازی یکی از خطوط غیر فعال فعلی انجام شود (a_2) یا می‌تواند اصلا این محصول را تولید نکند (a_3). ماتریس پرداخت این محصول به ازای آلترناتیوهای گفته شده به ازای این که آیا محصول جدید در بازار موفق می‌شود (θ_1) و یا موفق نمی‌شود (θ_2) در جدول زیر آمده است (مدیر فروش کاله احتمال موفقیت محصول جدید را ۶۵ درصد در نظر می‌گیرد).

	a_1	a_2	a_3
$0.65 \theta_1$	200	100	0
$0.35 \theta_2$	-180	-20	0
EMV	$\overbrace{67}^{200 \times 0.65 - 180 \times 0.35}$	$\overbrace{58}^{100 \times 0.65 - 20 \times 0.35}$	0

فرض کنید یک شرکت خدمات مشاوره‌ای، در ازای دریافت ۶۵ میلیون تومان حاضر است به ما بگوید که به طور قطع محصول موفق یا ناموفق خواهد بود. در این حالت محیط تصمیم‌گیری از حالت عدم قطعیت به قطعیت تبدیل می‌شود.

آیا شرکت، مشاوره قبول کند یا خیر؟ آیا این مشاوره ۶۵ میلیون تومان می‌ارزد؟ برای پاسخ به این سوال نیاز است که ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل محاسبه شود که در بخش بعد بیان می‌شود.

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا EVPI (Information Expected Value of Perfect)

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا EVPI عبارتست است از تخمین بازده مورد انتظار در صورت داشتن

اطلاعات کامل **منهای** ارزش مورد انتظار بدون اطلاعات کامل (EMV)

برای مثال کارخانه کاله، ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$EVPI = \sum_i \left[\left(\max_j P(\theta_i, a_j) \right) \times p(\theta_i) \right] - \max_j EMV(a_j)$$

$$= 0.65 \times 200 + 0.35 \times 0 - \underset{EMV}{67} = 63 < 65$$

لذا استفاده از این مشاوره توصیه نمی‌شود و در صورت پرداخت این هزینه، انتظار می‌رود دو میلیون

تومان شرکت ضرر خواهد کرد.

ارزش مورد انتظار میزان تاسف یا EOL (Expected Opportunity Loss)

منظور میزان تاسف در واقع همان ضرر یا تاسف ناشی از عدم انتخاب بهترین آلترناتیو است. برای تعیین

EOL ابتدا ماتریس تاسف را باید بسازیم. برای هر حالت، بیشترین عایدی را تعیین می‌کنیم و سپس میزان

تاسف برای یک گزینه مورد نظر برابر با اختلاف بین بیشترین عایدی و عایدی گزینه مورد نظر است. برای

مثال اگر ماتریس عایدی به صورت زیر باشد:

	a_1	a_2	a_3
θ_1	200 بیشترین عایدی	100	0
θ_2	-180	-20	0 بیشترین عایدی

با توجه به این که بیشترین مقدار عایدی برای حالت θ_1 برابر ۲۰۰ است لذا ماتریس تاسف به صورت

زیر محاسبه می‌شود.

	a_1	a_2	a_3
θ_1	0 $\underbrace{200-200}$	100 $\underbrace{200-100}$	200 $\underbrace{200-0}$
θ_2	180 $\underbrace{0-(-180)}$	20 $\underbrace{0-(-20)}$	0 $\underbrace{0-0}$

مقدار EOL با استفاده از جدول بالا با توجه این که احتمال وقوع حالت θ_1 و θ_2 به ترتیب برابر با ۰.۶۵ و ۰.۳۵ باشد، به صورت جدول زیر محاسبه می‌شود.

	a_1	a_2	a_3
0.65 θ_1	0	100	200
0.35 θ_2	180	20	0
EOL	63 $\underbrace{0 \times 0.65 + 180 \times 0.35}$	72 $\underbrace{100 \times 0.65 + 20 \times 0.35}$	130 $\underbrace{200 \times 0.65 + 0 \times 0.35}$

نکته: مقدار کمینه EOL برابر با مقدار ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا $EVPI$ خواهد بود.

در مثال زیر می‌توانید درستی نکته فوق را بررسی کنید.

مثال: جهت سرمایه گذاری سرمایه مالی، سه آلترناتیو را در نظر بگیرید. مقدار سود و زیاد در ماتریس پرداخت آورده شده است. گزینه a_3 همان گزینه عدم انجام کار و عدم سرمایه گذاری است. مشاوره ای حاضر است با دریافت ۱۵ میلیون تومان بگوید کدام حالت اتفاق می‌افتد. آیا این هزینه ارزش پرداخت دارد؟

	a_1	a_2	a_3
0.8 θ_1	40	-5	0
0.2 θ_2	-20	100	0
EMV	<u>28</u> $40 \times 0.8 - 20 \times 0.2$	<u>16</u> $-5 \times 0.8 + 100 \times 0.2$	<u>0</u> $0 \times 0.8 + 0 \times 0.2$

مقدار ارزش اطلاعات یا همان $EVPI$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$EVPI = [(0.8 \times 40) + (0.2 \times 100)] - 28 = 24$$

ماتریس تاسف به صورت زیر می‌شود:

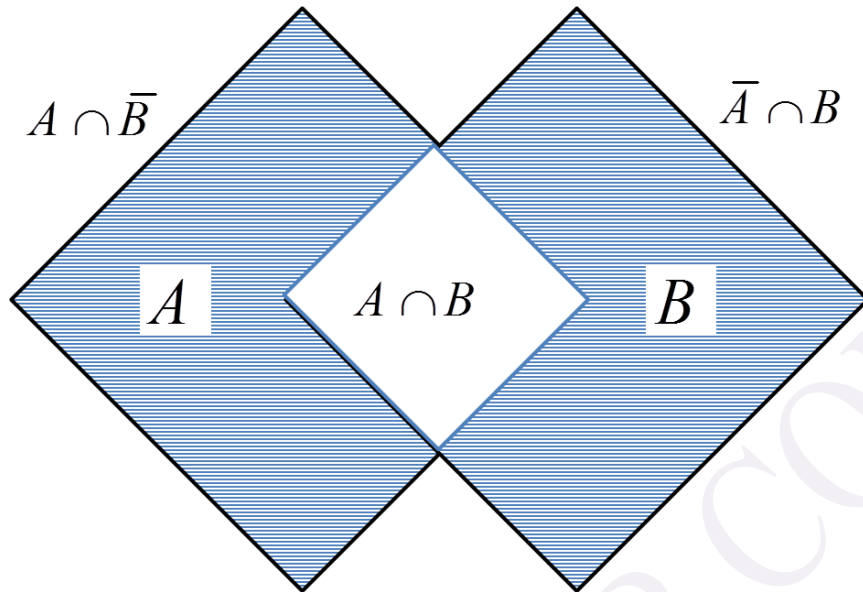
	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	45	40
θ_2	120	0	100
EOL	<u>24</u> $0 \times 0.8 + 120 \times 0.2$	<u>36</u> $45 \times 0.8 + 0 \times 0.2$	<u>52</u> $40 \times 0.8 + 100 \times 0.2$

همان طور که مشاهده می‌شود کمترین مقدار تاسف برابر با ارزش اطلاعات یا $EVPI$ است.

قضیه بیز یا Bayes Theorem

در درخت تصمیم‌گیری، محاسبه احتمال شرطی از طریق قضیه بیز انجام می‌شود. قضیه بیز به صورت

زیر انجام می‌شود:



$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A) \rightarrow p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)} \quad (I)$$

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B}) \quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B) \times p(B)}{p(A|B) \times p(B) + p(A|\bar{B}) \times p(\bar{B})}$$

مبانی درخت تصمیم گیری

در درخت تصمیم گیری از دو نوع گره زیر استفاده می کنیم.

گره تصمیم یا **Decision Node**: در این نوع گره، تصمیم گیرنده باید یکی از چند آلترناتو موجود را

انتخاب کنیم و با \square نمایش داده می شود.

گره شانس یا **Chance Node**: در این نوع گره طبیعت یکی از چند متغیر حالت را به صورت احتمالی انتخاب می‌کند که با \bigcirc نمایش داده می‌شود.

شاخه‌های وابسته به گره تصمیم، آلترناتیوهای موجود و شاخه‌های وابسته به گره شانس، حالات یا وقایع موجود هستند.

گام ۱: رسم درخت با توجه به تعریف مساله و نمادهای اشاره شده در بالا

گام ۲: تعیین احتمال وقوع مربوط به حالات وابسته به گره‌های شانس

گام ۳: تخمین بازده وابسته به هر یک از شاخه‌های انتهایی درخت

گام ۴: محاسبه *EMV* مربوط به گره‌های شانس از طریق فرایند بازگشتی **Backward Process**

(حرکت از سمت راست حرکت به سمت گره‌های ابتدایی)

گام ۵: تعیین بهترین شاخه‌ها با توجه به نتایج بدست آمده و تعیین استراتژی تصمیم

مثال: مدیر یک شرکت می‌خواهد تصمیم بگیرد که آیا محصول جدید را در معرض فروش بگذارد یا

خیر؟ پیش بینی می‌شود که پس از عرضه محصول سه حالت اتفاق می‌افتد.

✓ تقاضا زیاد باشد (*HI*)

✓ تقاضا متوسط باشد (*MED*)

✓ تقاضا کم باشد (*LOW*)

میزان سود یا زیان خالص مورد انتظار در هر یک از حالات به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰۰۰، ۲۰۰۰۰۰ و

۵۰۰۰۰۰- دلار و احتمال وقوع هر یک به ترتیب ۰.۲، ۰.۴ و ۰.۴ است.

همچنین یک شرکت مشاور نیز وجود دارد که در ازای دریافت ۲۰۰۰۰ دلار ادعا می‌کند که می‌تواند تعیین کند که محصول موفق خواهد بود (S) یا ناموفق است (F). جهت بررسی توانایی این شرکت اطلاعات زیر بدست آمده است که در آن احتمال نتیجه گزارش به شرط وقوع هر حالت داده شده است:

	S	F
HI	0.70	0.30
MED	0.60	0.40
LOW	0.30	0.70

با استفاده از درخت تصمیم، استراتژی تصمیم را مشخص کنید. همچنین ارزش خدمات شرکت و $EVPI$ تعیین نمایید.

حل:

برای انجام محاسبات درخت تصمیم ابتدا باید احتمالات شرطی را محاسبه کرد که نتایج محاسبات در جدول زیر آمده است.

	HI	MED	LOW
S	$\underbrace{0.28}_{p(HI F)}$	0.48	0.24
F	0.12	0.32	0.56

زیر محاسبات جدول فوق به صورت زیر می‌شود.

$$p(S) = p(S | HI)p(HI) + p(S | MED)p(MED) + p(S | LOW)p(LOW)$$

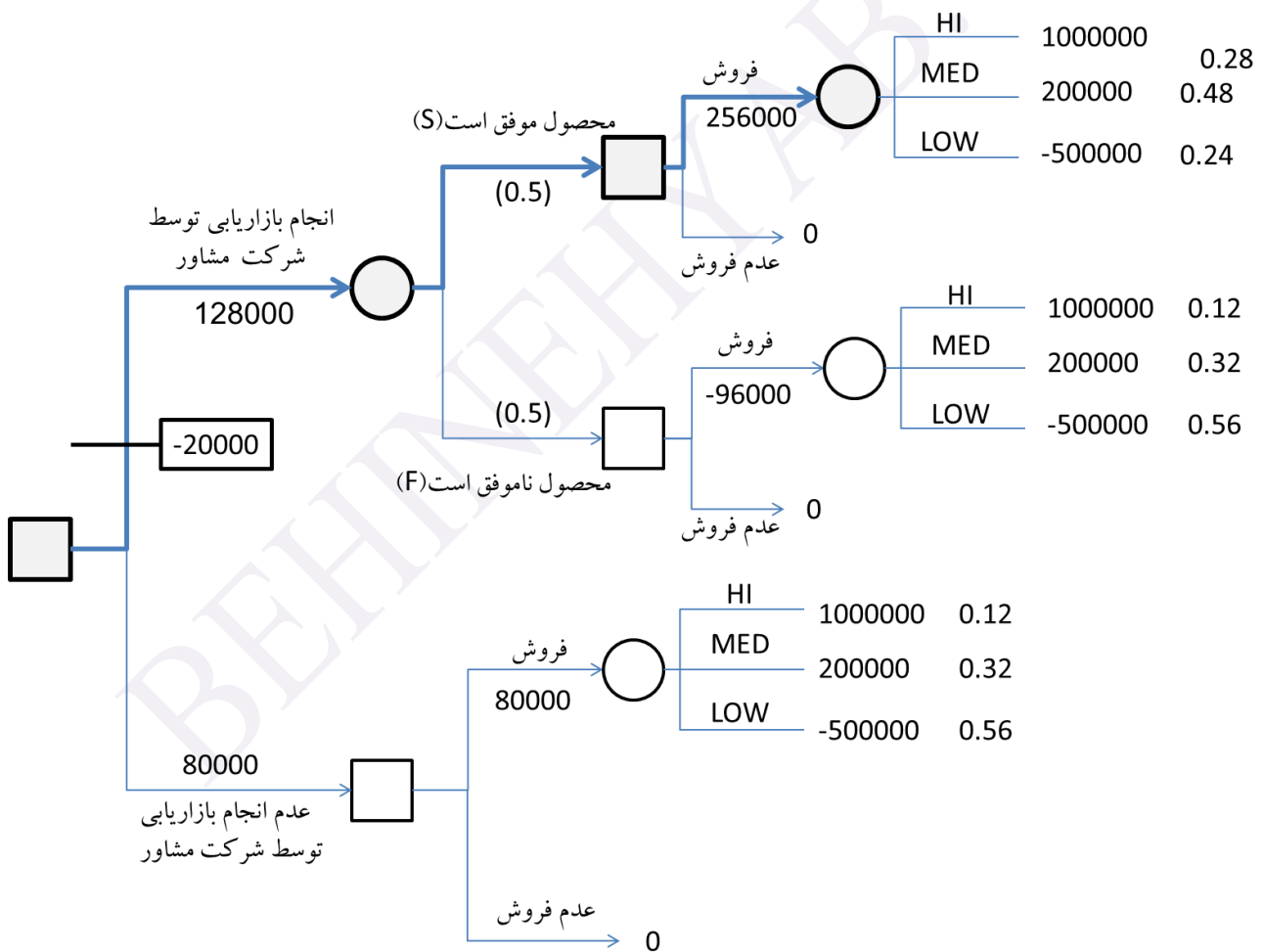
$$= 0.7 \times 0.2 + 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.5$$

$$p(F) = 1 - p(S) = 0.5$$

$$p(HI \cap S) = p(S | HI)p(HI) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

$$p(HI | S) = \frac{p(HI \cap S)}{p(S)} = \frac{0.14}{0.5} = 0.28$$

$$EMV = 0.28 \times 1000000 + 0.48 \times 200000 + 0.24 \times (-500000) = 256000$$



استراتژی تصمیم: از شرکت مشاوره ای می‌خواهیم بازاریابی را انجام دهد. سپس براساس

گزارش عمل می‌کنیم.

با توجه به انجام بازاریابی توسط شرکت مشاور، احتمالات دخیل در متغیرهای حالت به صورت زیر

تغییر می‌کند.

$$p(HI) = 0.2 \rightarrow 0.28$$

$$p(MED) = 0.4 \rightarrow 0.48$$

$$p(LOW) = 0.4 \rightarrow 0.24$$

همچنین استفاده از نظرات کارشناسی مقدار EMV را تغییر می‌کند. به این صورت که مقدار EMV بدون

کارشناسی برابر با ۸۰۰۰۰ و در صورت استفاده از کارشناسی، برابر با ۲۵۶۰۰۰ می‌شود.

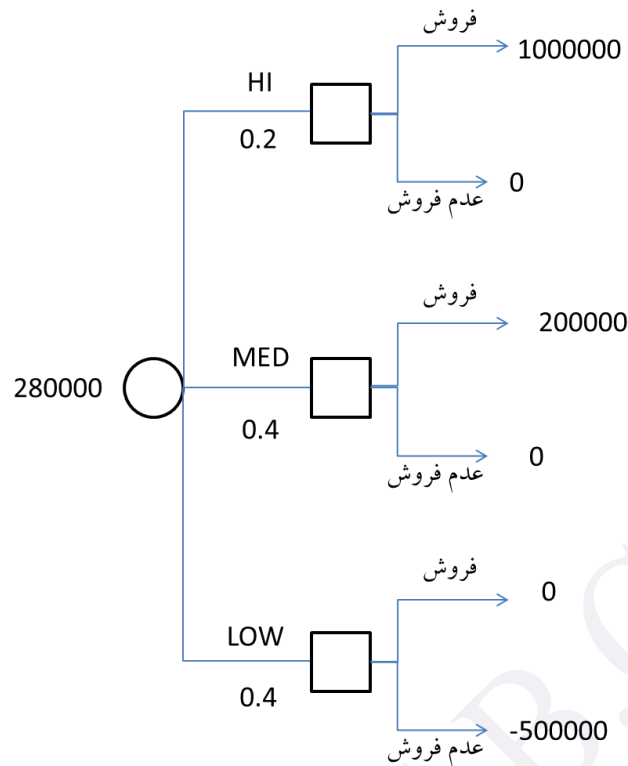
ارزش مورد انتظار اطلاعات نمونه، برابر با $EVSI$ یا $Expected Value of Sample Information$ برابر با

اختلاف EMV استفاده از اطلاعات مشاوره ای و عدم استفاده از اطلاعات مشاوره ای است. برای مثال در این

تمرین خواهیم داشت.

$$EVSI = 128000 - 80000 = 48000 \text{ (عدم استفاده از مشاوره شرکت) - (استفاده از مشاوره شرکت)}$$

برای محاسبه ارزش در اختیار داشتن اطلاعات کامل می‌توان از درخت زیر استفاده است.



$EVPI=280000$ (در صورت استفاده از اطلاعات کامل) - 80000 (در حالت عدم استفاده از اطلاعات) = 200000

نمودار یا دیاگرام تاثیر Influence Diagram

نمودار تاثیر بیان ترسیمی ما بین عناصر و عوامل دخیل در یک تصمیم در یک زمان مشخص است. در واقع نمودار تاثیر، شکل فشرده بیان مساله تصمیم گیری است که در آن عناصر یا عوامل شاخص به شکل ترسیمی نشان داده می شوند.

نکته: نمودار تاثیر یک مسئله ضرورتاً منحصر به فرد نیست.

نکته: نمودار تاثیر، یک گراف جهت دار است که از تعدادی گره و کمان که ما بین گره ها وصل می شود، تشکیل می گردد.

انواع گره ها در نمودار تاثیر به صورت زیر هستند:

گره تصمیم یا Decision node

گره تصمیم را با مربع □ نمایش داده می‌شود و مرتبط با تصمیماتی است که در مراحل مختلف مسئله باید اتخاذ کنیم.

گره شانس یا Chance node

گره شانس را با دایره ○ نمایش داده می‌شود و که بیانگر حالات و وقایع غیرقطعی در محیط تصمیم‌گیری است.

گره ارزش/محاسبه یا Value/calculation node

گره ارزش را با بیضی ○ نمایش داده می‌شود و که بیانگر محاسبات ریاضی یا تعیین مقادیر ارزش‌ها موجود در محیط تصمیم‌گیری است.

گره پیامد/نتیجه نهایی یا Final Consequence/Final Payoff node

گره پیامد یا نتیجه نهایی را با romb نمایش داده می‌شود که در واقع پیامد نهایی یا تصمیم نهایی مسئله مشخص می‌کند.

توجه: برای مطالعه ادامه این جزوه آموزشی شامل بیان ادامه مباحث درخت تصمیم و دیاگرام تاثیر و حل مثال‌های متعدد با حل تشریحی، جزوه این درس را از طریق وب سایت **بهینه یاب** به نشانی www.behinehyab.com تهیه فرمایید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**