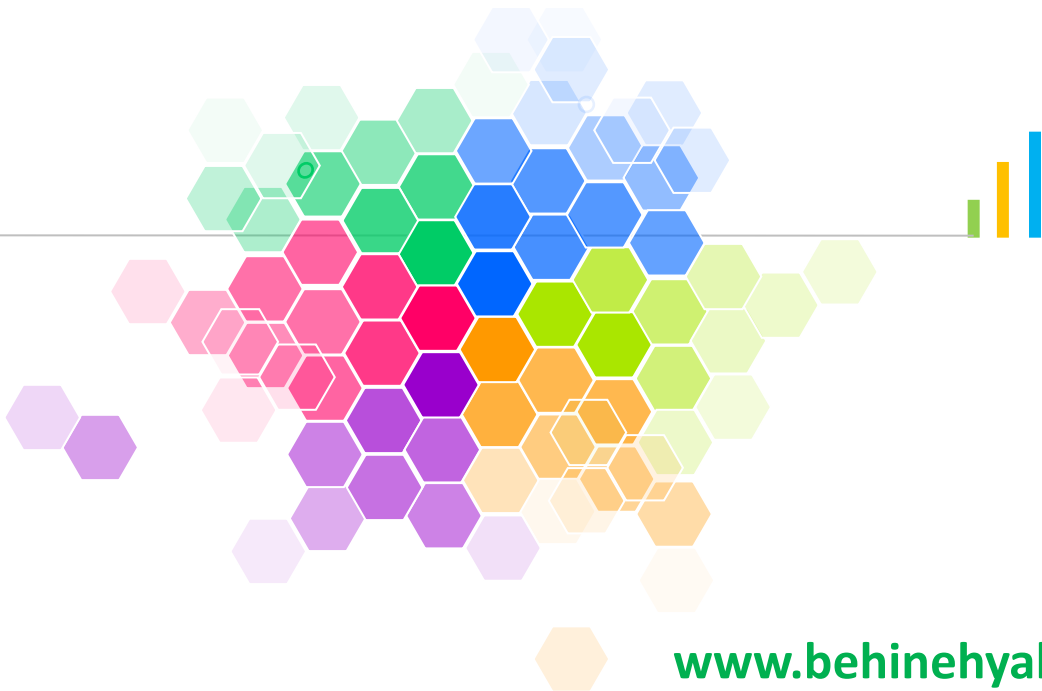


به نام خدا



# درس ۱۹: درخت تصمیم گیری



# فهرست مطالب



مقدمه

۱

تصمیمات غیردنباله ای

۲

قضیه بیز

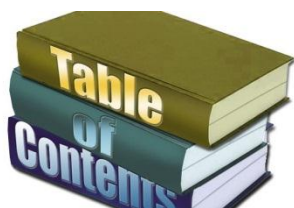
۳

درخت تصمیم گیری

۴

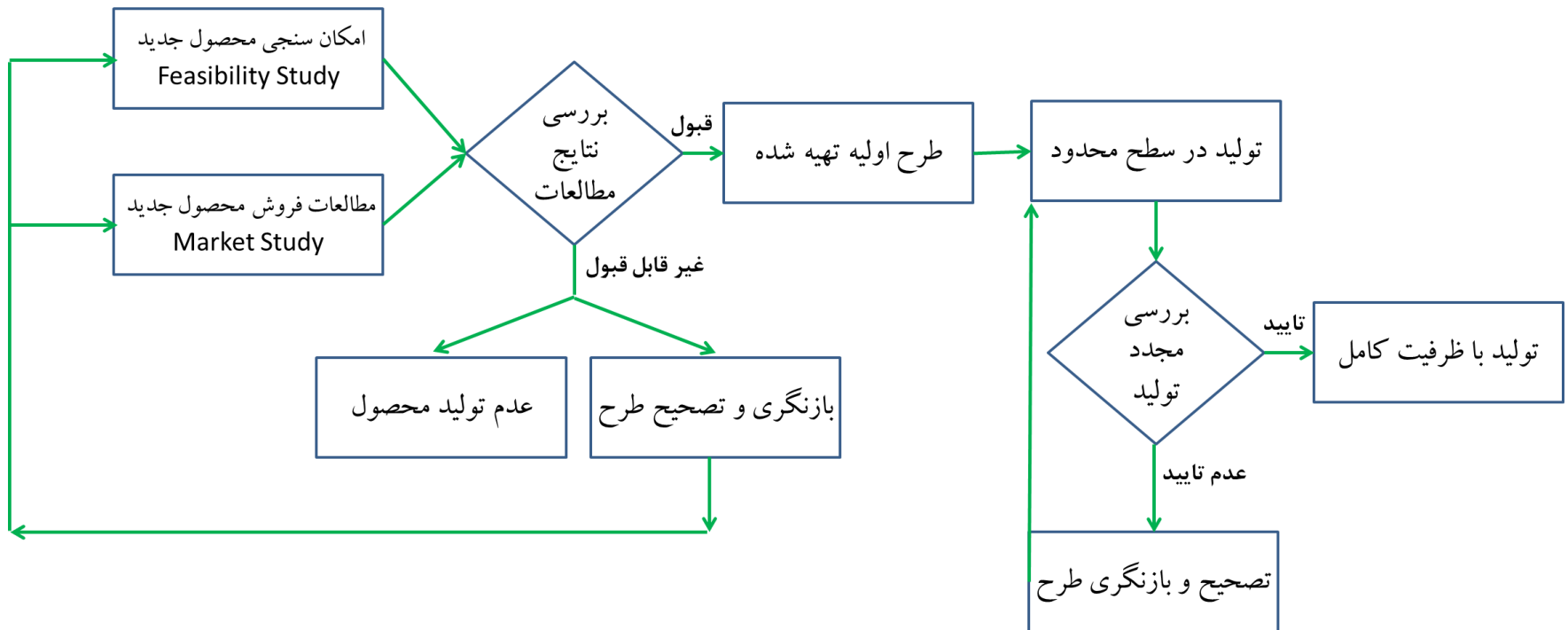
نمودار تاثیر

۵



فرآیند تصمیم‌گیری در بسیاری از حالات متشکل از یک توالی از تصمیمات است که می‌توان به

صورت نمودار زیر به طور خلاصه بیان کرد.



## مقدمه

در تصمیمات غیر دنباله‌ای، تحلیل تصمیم می‌تواند براساس ماتریس پرداخت یا *Payoff Matrix* باشد. در تصمیمات دنباله‌ای که در آن تصمیم فعلی متاثر از تصمیمات گذشته بوده و تابعی از متغیرهای حالت و تصمیمات آینده است می‌توان از **درخت تصمیم‌گیری** یا **Decision Tree** استفاده کرد.

## تصمیمات غیردنباله

ارزش پولی مورد انتظار یا EMV یا (Expected Monetary Value)

در صورتی که ماتریس پرداخت میزان دریافتی به ازای حالات و آلترناتیوهای مختلف را در اختیار داشته باشیم و احتمال وقوع هر حالت نیز مشخص باشد، ارزش پولی مورد انتظار هر آلترناتیو نظیر  $a_j$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$EMV(a_j) = \sum_i P(\theta_i, a_j) \times p(\theta_i)$$

$P(\theta_i, a_j)$ : میزان دریافتی حالت  $\theta_i$  برای گزینه  $a_j$  (ماتریس پرداخت)

$p(\theta_i)$ : احتمال وقوع حالت  $\theta_i$

## تصمیمات غیردنباله

**مثال:** شرکت کاله می خواهد در مورد تولید یک نوع جدید پنیر پیتزا تصمیم گیری کند. جهت

تولید این نوع پنیر، باید خط جدیدی ایجاد شود که این کار به صورت راه اندازی یک خط جدید

$(a_1)$  یا از تغییر و بهسازی یکی از خطوط غیر فعال فعلی انجام شود  $(a_2)$  یا می تواند اصلا این

محصول را تولید نکند  $(a_3)$ . ماتریس پرداخت این محصول برای آلترناتیوهای گفته شده به ازای این

که آیا محصول جدید در بازار موفق می شود  $(\theta_1)$  و یا موفق نمی شود  $(\theta_2)$  در جدول اسلاید بعدی آمده

است (مدیر فروش کاله احتمال موفقیت محصول جدید را ۶۵ درصد در نظر می گیرد).

## تصمیمات غیردنباله

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$0.65 \theta_1$	200	100	0
$0.35 \theta_2$	-180	-20	0
EMV	$\underbrace{67}_{200 \times 0.65 - 180 \times 0.35}$	$\underbrace{58}_{100 \times 0.65 - 20 \times 0.35}$	0

فرض کنید یک شرکت خدمات مشاوره‌ای، در ازای دریافت ۶۵ میلیون تومان حاضر است به ما بگوید که به طور قطع محصول موفق یا ناموفق خواهد بود. در این حالت محیط تصمیم‌گیری از حالت عدم قطعیت به قطعیت تبدیل می‌شود.

# تصمیمات غیردنباله

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا  $EVPI$  (Information Expected Value of Perfect)

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا  $EVPI$  عبارت است از تخمین بازده مورد انتظار در صورت

داشتن اطلاعات کامل **منهای** ارزش مورد انتظار بدون اطلاعات کامل ( $EMV$ )

برای مثال کارخانه کاله، ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$EVPI = \sum_i \left[ \left( \max_j P(\theta_i, a_j) \right) \times p(\theta_i) \right] - \max_j EMV(a_j)$$

$$= 0.65 \times 200 + 0.35 \times 0 - \underset{EMV}{67} = 63 < 65$$



# تصمیمات غیردنباله

ارزش مورد انتظار میزان تاسف یا EOL (Expected Opportunity Loss)

منظور میزان **تاسف** در واقع همان ضرر یا تاسف ناشی از عدم انتخاب بهترین آلترناتیو است.

برای تعیین EOL ابتدا **ماتریس تاسف** را باید بسازیم.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\theta_1$	<b>200</b> بیشترین عایدی	100	0
$\theta_2$	-180	-20	<b>0</b> بیشترین عایدی

# تصمیمات غیردنباله



	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\theta_1$	$\underbrace{0}_{200-200}$	$\underbrace{100}_{200-100}$	$\underbrace{200}_{200-0}$
$\theta_2$	$\underbrace{180}_{0-(-180)}$	$\underbrace{20}_{0-(-20)}$	$\underbrace{0}_{0-0}$

بیشترین عایدی  $\theta_1$  برابر ۲۰۰

بیشترین عایدی  $\theta_2$  برابر صفر

## تصمیمات غیردنباله

مقدار  $EOL$  با استفاده از جدول بالا با توجه این که احتمال وقوع حالت  $\theta_1$  و  $\theta_2$  به ترتیب برابر

با  $0.65$  و  $0.35$  باشد، به صورت جدول زیر محاسبه می شود.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$0.65 \theta_1$	0	100	200
$0.35 \theta_2$	180	20	0
$EOL$	$\underbrace{63}$ $0 \times 0.65 + 180 \times 0.35$	$\underbrace{72}$ $100 \times 0.65 + 20 \times 0.35$	$\underbrace{130}$ $200 \times 0.65 + 0 \times 0.35$

**نکته:** مقدار کمینه  $EOL$  برابر با مقدار ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل یا  $EVPI$  خواهد بود.

## تصمیمات غیردنباله

**مثال:** جهت سرمایه گذاری سرمایه مالی، سه آلترناتیو را در نظر بگیرید. مقدار سود و زیاد در

ماتریس پرداخت آورده شده است. گزینه  $a_3$  همان گزینه عدم انجام کار و عدم سرمایه گذاری

است. مشاوره ای حاضر است با دریافت ۱۵ میلیون تومان بگوید کدام حالت اتفاق می افتد.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
0.8 $\theta_1$	40	-5	0
0.2 $\theta_2$	-20	100	0
$EMV$	$\underbrace{28}_{40 \times 0.8 - 20 \times 0.2}$	$\underbrace{16}_{-5 \times 0.8 + 100 \times 0.2}$	$\underbrace{0}_{0 \times 0.8 + 0 \times 0.2}$

## تصمیمات غیردنباله

مقدار ارزش اطلاعات یا همان  $EVPI$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$EVPI = [(0.8 \times 40) + (0.2 \times 100)] - 28 = 24$$

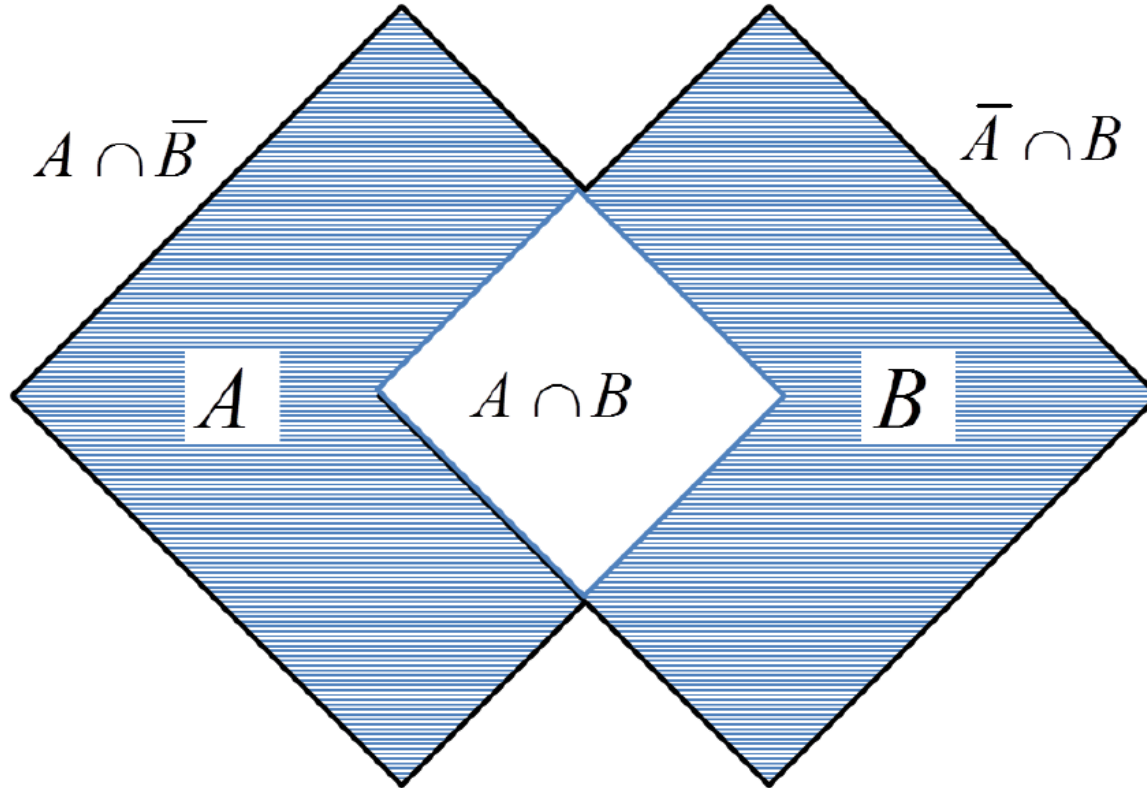
ماتریس تاسف به صورت زیر می شود:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\theta_1$	0	45	40
$\theta_2$	120	0	100
$EOL$	$\underline{24}$ $0 \times 0.8 + 120 \times 0.2$	$\underline{36}$ $45 \times 0.8 + 0 \times 0.2$	$\underline{52}$ $40 \times 0.8 + 100 \times 0.2$

## قضیه بیز

در درخت تصمیم‌گیری، محاسبه احتمال شرطی از طریق **قضیه بیز** انجام می‌شود. قضیه بیز به

صورت زیر انجام می‌شود:



$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p(A \cap B) = p(A | B)p(B) = p(B | A)p(A) \rightarrow p(B | A) = \frac{p(A | B)p(B)}{p(A)} \quad (I)$$

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A | B)p(B) + p(A | \bar{B})p(\bar{B}) \quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$p(B | A) = \frac{p(A | B) \times p(B)}{p(A | B) \times p(B) + p(A | \bar{B}) \times p(\bar{B})}$$

# درخت تصمیم گیری

## مبانی درخت تصمیم گیری

در درخت تصمیم گیری از دو نوع گره زیر استفاده می‌کنیم.

گره تصمیم یا **Decision Node**: در این نوع گره، تصمیم گیرنده باید یکی از چند آلترناتو

موجود را انتخاب کنیم و با  $\square$  نمایش داده می‌شود.

گره شانس یا **Chance Node**: در این نوع گره طبیعت یکی از چند متغیر حالت را به صورت

احتمالی انتخاب می‌کند که با  $\circ$  نمایش داده می‌شود.

**نکته:** شاخه‌های وابسته به گره تصمیم، آلترناتیوهای موجود و شاخه‌های وابسته به گره شانس،

حالات یا وقایع موجود هستند.



# درخت تصمیم گیری

گام های تحلیل با استفاده از درخت تصمیم به صورت زیر است:

**گام ۱:** رسم درخت با توجه به تعریف مساله و نمادهای اشاره شده در اسلاید قبلی

**گام ۲:** تعیین احتمال وقوع مربوط به حالات وابسته به گره های شانس

**گام ۳:** تخمین بازده وابسته به هر یک از شاخه های انتهایی درخت

**گام ۴:** محاسبه *EMV* مربوط به گره های شانس از طریق فرایند بازگشتی *Backward Process*

(حرکت از سمت راست حرکت به سمت گره های ابتدایی)

**گام ۵:** تعیین بهترین شاخه ها با توجه به نتایج بدست آمده و تعیین استراتژی تصمیم

## درخت تصمیم‌گیری

**مثال:** مدیر یک شرکت می‌خواهد تصمیم بگیرد که آیا محصول جدید را در معرض فروش بگذارد یا خیر؟ پیش‌بینی می‌شود که پس از عرضه محصول سه حالت اتفاق می‌افتد.

✓ تقاضا زیاد باشد (*HI*)

✓ تقاضا متوسط باشد (*MED*)

✓ تقاضا کم باشد (*LOW*)

میزان سود یا زیان خالص مورد انتظار در هر یک از حالات به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰۰۰،

۲۰۰۰۰۰ و ۵۰۰۰۰۰- دلار و احتمال وقوع هر یک به ترتیب ۰.۲، ۰.۴ و ۰.۴ است.

## درخت تصمیم گیری

همچنین یک شرکت مشاور نیز وجود دارد که در ازای دریافت ۲۰۰۰۰ دلار ادعا می‌کند که می‌تواند تعیین کند که محصول موفق خواهد بود ( $S$ ) یا ناموفق است ( $F$ ). جهت بررسی توانایی این شرکت اطلاعات زیر بدست آمده است که در آن احتمال نتیجه گزارش به شرط وقوع هر حالت

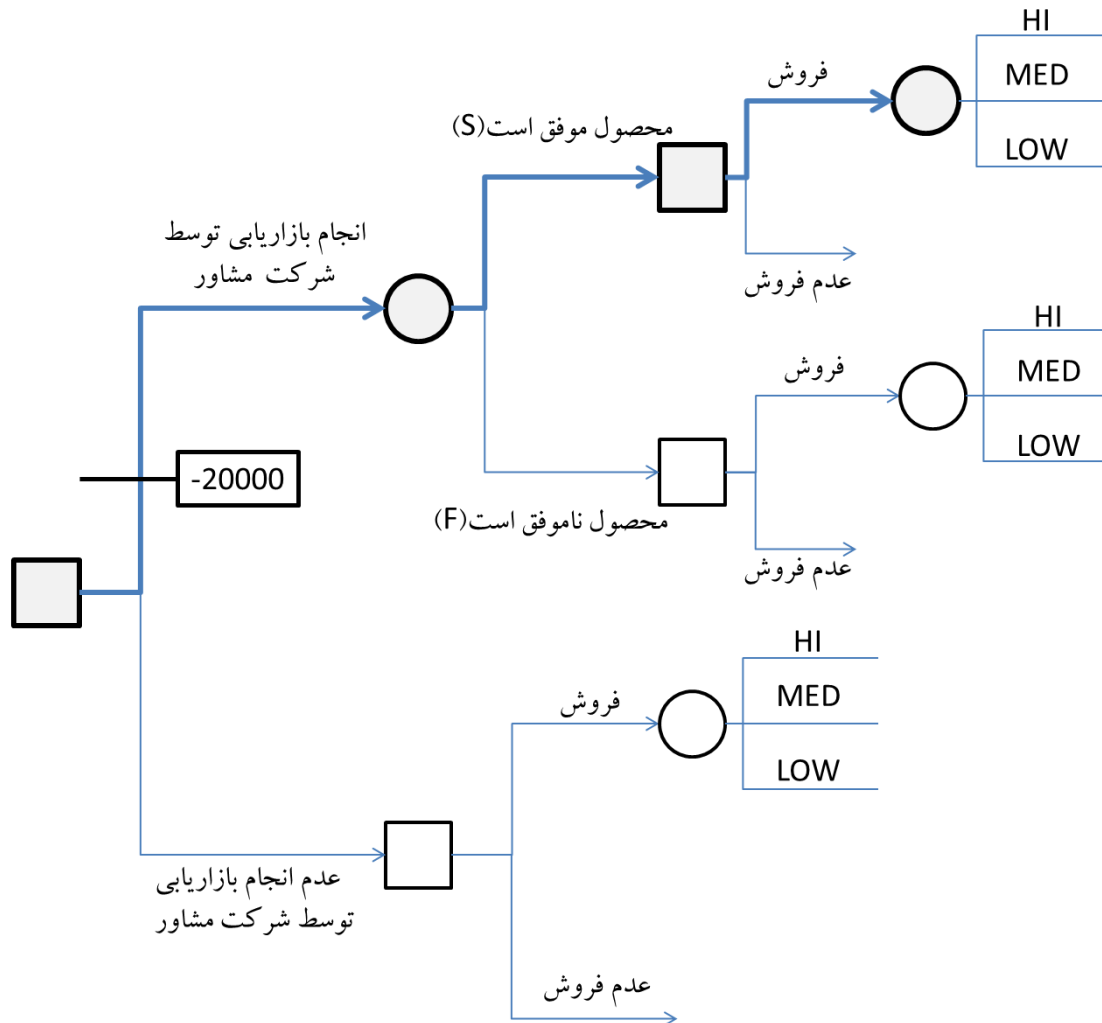
داده شده است:

	$S$	$F$
$HI$	0.70	0.30
$MED$	0.60	0.40
$LOW$	0.30	0.70

با استفاده از درخت تصمیم، استراتژی تصمیم را مشخص کنید. همچنین ارزش خدمات شرکت

و  $EVPI$  تعیین نمایید.

# درخت تصمیم گیری



حل:

# درخت تصمیم گیری



برای انجام محاسبات درخت تصمیم ابتدا باید احتمالات شرطی را محاسبه کرد:

	<i>HI</i>	<i>MED</i>	<i>LOW</i>
<i>S</i>	$\underbrace{0.28}_{p(HI S)}$	0.48	0.24
<i>F</i>	0.12	0.32	0.56

# درخت تصمیم گیری



$$p(S) = p(S | HI)p(HI) + p(S | MED)p(MED) + p(S | LOW)p(LOW)$$

$$= 0.7 \times 0.2 + 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.5$$

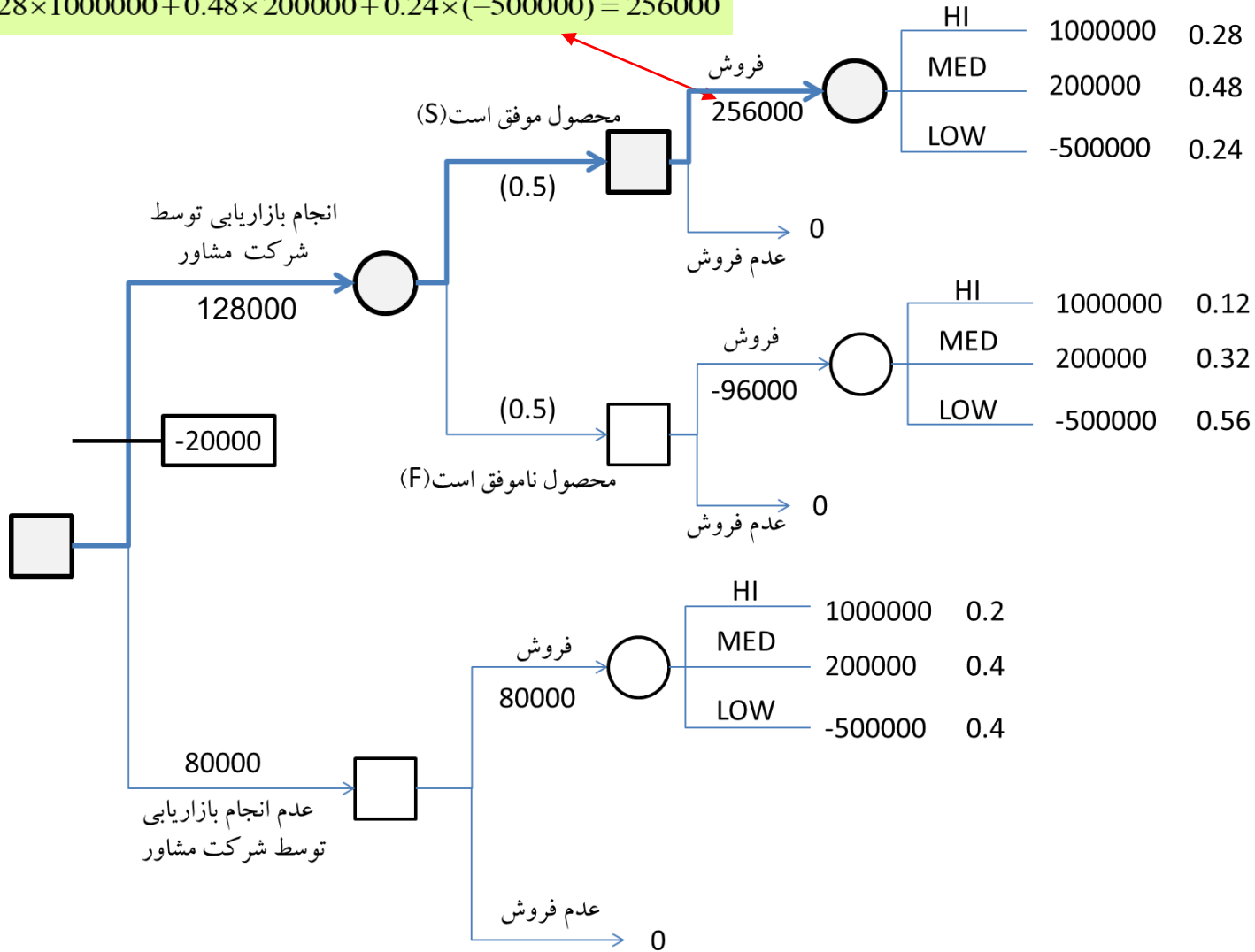
$$p(F) = 1 - p(S) = 0.5$$

$$p(HI \cap S) = p(S | HI)p(HI) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

$$p(HI | S) = \frac{p(HI \cap S)}{p(S)} = \frac{0.14}{0.5} = 0.28$$

# درخت تصمیم گیری

$$EMV = 0.28 \times 1000000 + 0.48 \times 200000 + 0.24 \times (-500000) = 256000$$



## درخت تصمیم گیری

**استراتژی تصمیم:** از شرکت مشاوره ای می خواهیم بازاریابی را انجام دهد. سپس براساس گزارش عمل می کنیم.

با توجه به انجام بازاریابی توسط شرکت مشاور، احتمالات دخیل در متغیرهای حالت به صورت زیر تغییر می کند.

$$p(HI) = 0.2 \rightarrow 0.28$$

$$p(MED) = 0.4 \rightarrow 0.48$$

$$p(LOW) = 0.4 \rightarrow 0.24$$

همچنین استفاده از نظرات کارشناسی مقدار  $EMV$  را تغییر می کند. به این صورت که مقدار

$EMV$  بدون کارشناسی برابر با ۸۰۰۰۰ و در صورت استفاده از کارشناسی، برابر با ۱۲۸۰۰۰

می شود.



## درخت تصمیم‌گیری

ارزش مورد انتظار اطلاعات نمونه، برابر با **EVSI** یا *Expected Value of Sample Information*

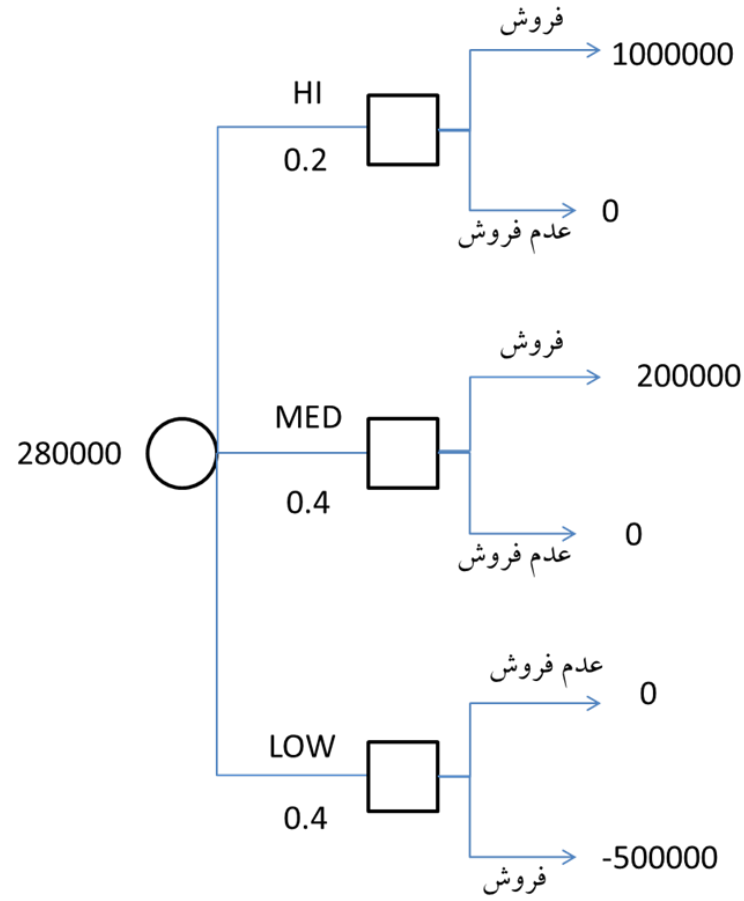
برابر با اختلاف *EMV* استفاده از اطلاعات مشاوره‌ای و عدم استفاده از اطلاعات مشاوره‌ای است.

عدم استفاده از مشاوره ( ۸۰۰۰۰ - ) استفاده از مشاوره شرکت) =  $EVSI = 128000$

۴۸۰۰۰ = (شرکت)

برای محاسبه ارزش در اختیار داشتن اطلاعات کامل می‌توان از درخت زیر استفاده است.

# درخت تصمیم گیری



$EVPI = 280000 - 80000 = 200000$  (در حالت عدم استفاده از اطلاعات) - (در صورت استفاده از اطلاعات کامل)

## درخت تصمیم گیری

**مثال:** یک شرکت سازنده چیپ های حافظه کامپیوتری (Computer Memory Chips) آن ها را در بسته های ده تایی به صورت بسته ای تولید می کند. مشخص شده است که ۸۰ درصد بسته ها حاوی یک چیپ خراب بوده و به عنوان **بسته های خوب** شناخته شده و ۲۰ درصد آن ها حاوی ۵ چیپ خراب بوده و به **بسته های بد** معروف اند. اگر بسته های خوب به مرحله ی بعدی ارسال شود، هزینه ۱۰۰۰ دلار ولی در مورد بسته بد این هزینه ۴۰۰۰ دلار است، البته می توان یک بسته را با هزینه ۲۰۰۰ دلار مورد بازرسی قرار داد و تمام ۱۰ چیپ را بررسی نمود. در این صورت آن را جز بسته های خوب قرار می دهیم. البته با هزینه ۱۰۰ دلار می توان فقط یک چیپ از هر بسته را به صورت تصادفی بازبینی کرد. استراتژی تصمیم، *EVSI*، و *EVPI* را محاسبه کنید.

# درخت تصمیم گیری



$G = \text{Batch is good} : p(G) = 0.8$

$B = \text{Batch is bad} : p(B) = 0.2$

$D = \text{Defective Chip is observed.}$

$ND = \text{Non-defective chip is observed.}$

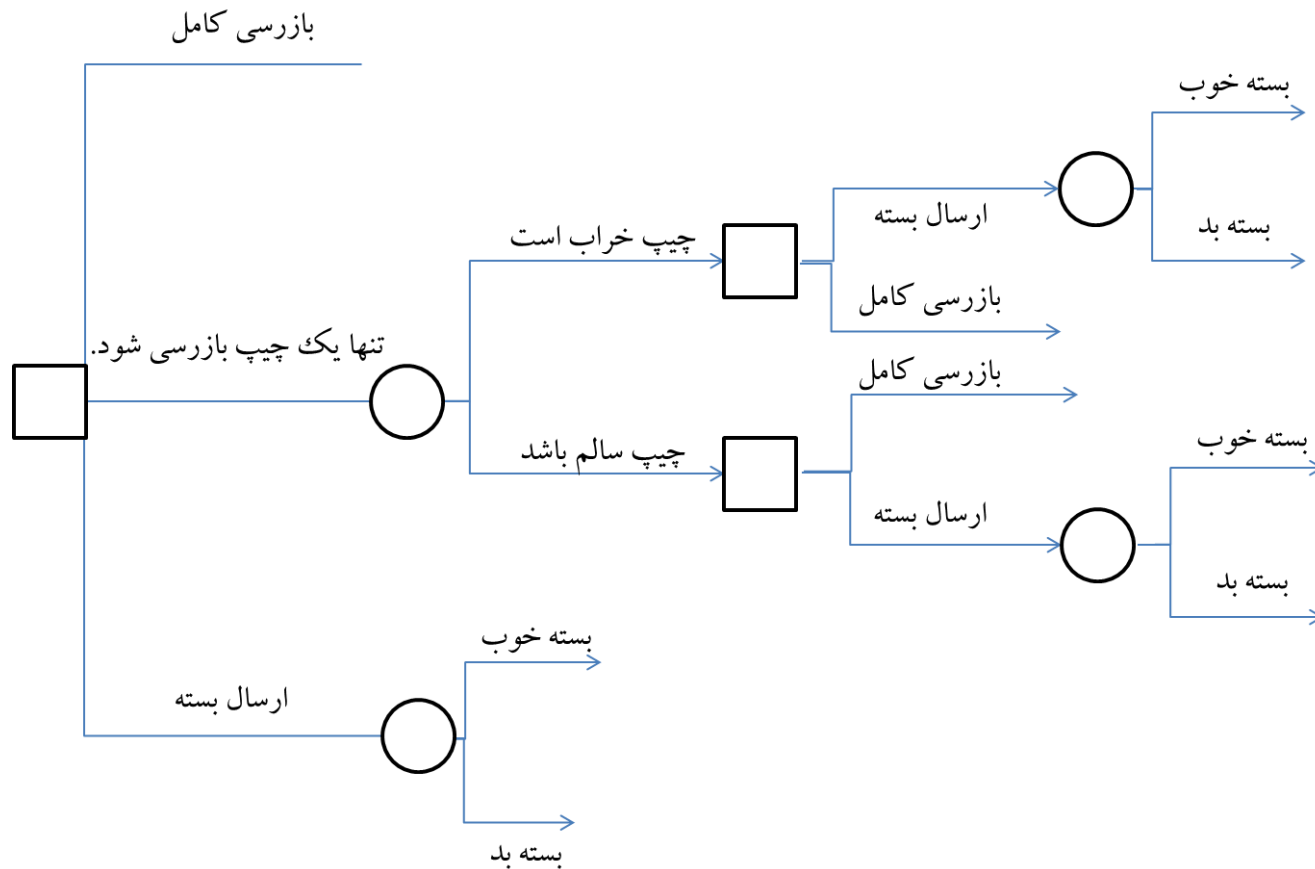
$$p(D | G) = 0.1$$

$$p(ND | G) = 0.9$$

$$p(D | B) = 0.5$$

$$p(ND | B) = 0.5$$

# درخت تصمیم گیری



## درخت تصمیم گیری



$$p(D \cap G) = p(D | G)p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{8}{10} = 0.08$$

$$p(D \cap B) = p(D | B)p(B) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = 0.1$$

$$p(ND \cap G) = p(ND | G)p(G) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = 0.72$$

$$p(ND \cap B) = p(ND | B)p(B) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = 0.1$$

$$p(D) = p(D \cap B) + p(D \cap G) = 0.1 + 0.08 = 0.18$$

# درخت تصمیم گیری



$$p(ND) = 1 - p(D) = 1 - 0.18 = 0.82$$

$$p(B | D) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{0.1}{0.18} = \frac{5}{9}$$

$$p(G | D) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0.08}{0.18} = \frac{4}{9}$$

$$p(B | ND) = \frac{p(B \cap ND)}{p(ND)} = \frac{0.1}{0.82} = \frac{10}{82}$$

$$p(G | ND) = \frac{p(G \cap ND)}{p(ND)} = 1 - \frac{10}{82} = \frac{72}{82}$$



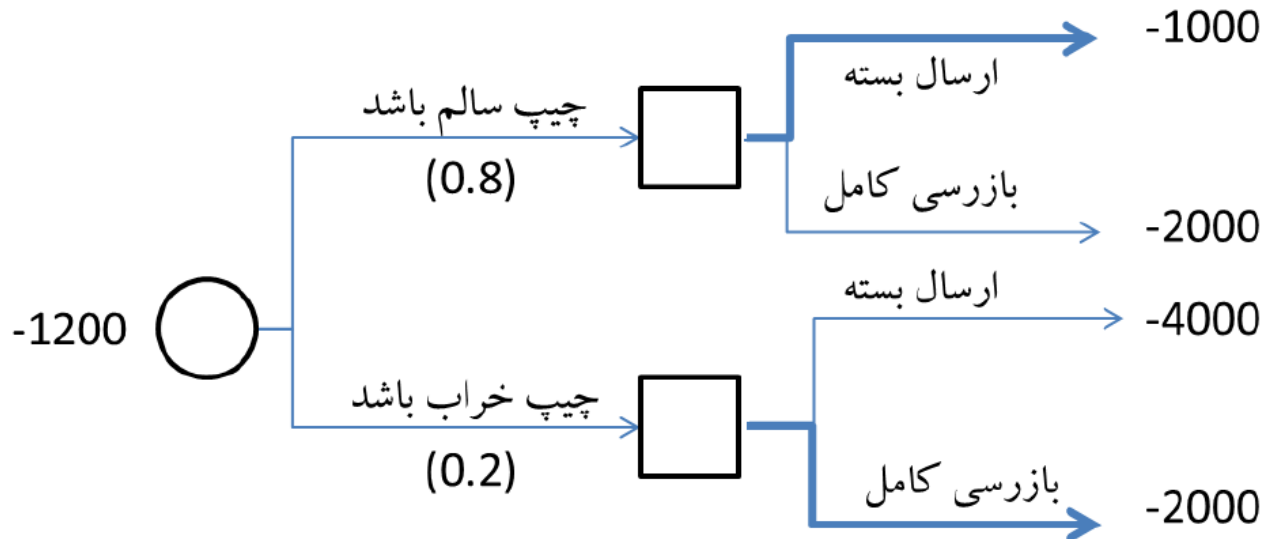


# درخت تصمیم گیری

استراتژی تصمیم: تست یک چیپ، اگر خراب بود بازرسی کامل و اگر سالم باشد،

ارسال بسته.

$$EVSI = -1480 - (-1600) = 120$$



$$EVPI = -1200 - (-1600) = 400$$

## نمودار یا دیاگرام تاثیر **Influence Diagram**

**نمودار تاثیر** بیان ترسیمی مابین عناصر و عوامل دخیل در یک تصمیم در یک زمان مشخص است. در واقع نمودار تاثیر، شکل فشرده بیان مساله تصمیم گیری است که در آن عناصر یا عوامل شاخص به شکل ترسیمی نشان داده می‌شوند.

**نکته:** نمودار تاثیر یک مسئله ضرورتاً منحصر به فرد نیست.

**نکته:** نمودار تاثیر، یک گراف جهت دار است که از تعدادی گره و کمان که ما بین گره‌ها وصل می‌شود، تشکیل می‌گردد.

## نمودار تاثیر

انواع گره ها در نمودار تاثیر به صورت زیر هستند:

### گره تصمیم یا Decision node

گره تصمیم را با مربع  $\square$  نمایش داده می‌شود و مرتبط با تصمیماتی است که در مراحل مختلف مسئله باید اتخاذ کنیم.

### گره شانس یا Chance node

گره شانس را با  $\bigcirc$  نمایش داده می‌شود و که بیانگر حالات و وقایع غیرقطعی در محیط تصمیم‌گیری است.

## گره ارزش / محاسبه یا Value/calculation node

گره ارزش را با  $\circ$  بیضی نمایش داده می شود و که بیانگر محاسبات ریاضی یا تعیین مقادیر ارزش ها موجود در محیط تصمیم گیری است.

## گره پیامد / نتیجه نهایی یا Final Consequence/Final Payoff node

گره پیامد یا نتیجه نهایی را با  $\diamond$  نمایش داده می شود که در واقع پیامد نهایی یا تصمیم نهایی مسئله مشخص می کند.

## کمان های نمودار تاثیر

کلیه کمان ها در نمودار تاثیر به صورت  $\rightarrow$  نمایش داده می‌شود. هنگام اتصال دو گره با یک کمان، گره موجود در ابتدای کمان **گره مقدم** و گره موجود در انتهای کمان را **گره موخر** می‌گویند. در شکل زیر، گره  $n_1$  گره مقدم و گره  $n_2$  گره موخر است.



## کمان رابطه ای

کمان هایی که به گره شانس وصل می شوند از نوع **رابطه ای** هستند. بدین معنا که می گویند گره های مقدم بر گره شانس در تعیین احتمال موجود در گره شانس، دخیل است.

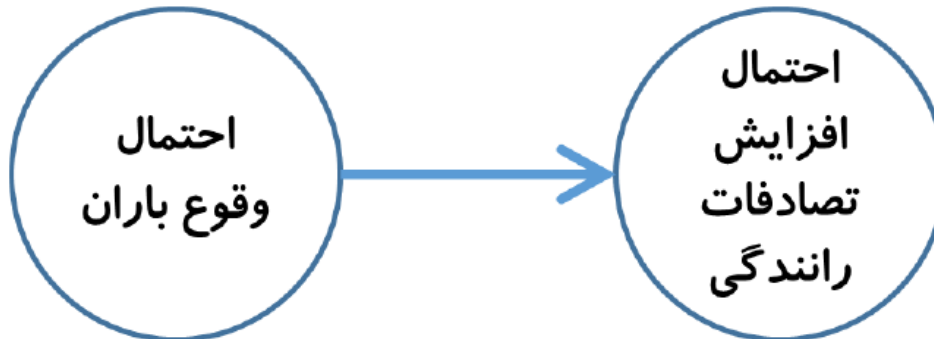
## نمودار تاثیر

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید.



در احتمال مربوط به گره شانس  $C$ ، احتمال وقوع گره شانس  $A$  دخیل است. در واقع متغیر تصادفی  $C$

به متغیرهای تصادفی  $A$ ، وابسته هستند. مانند مثال زیر

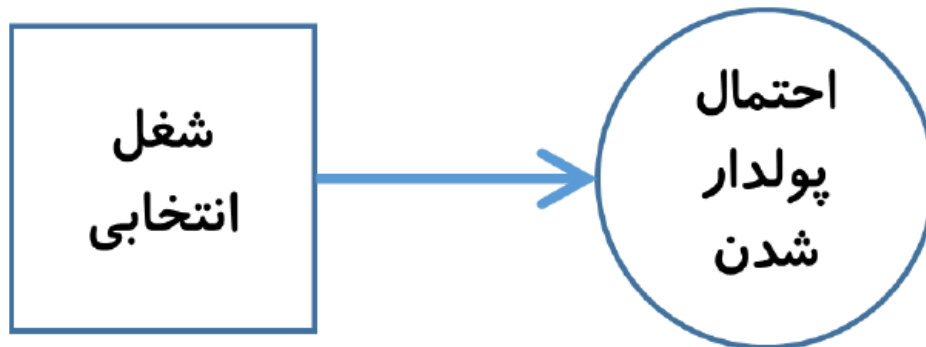


## نمودار تاثیر

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید.



تصمیم گرفته شده در گره  $B$  بر احتمال وقوع گره  $D$  موثر است. مانند مثال زیر:

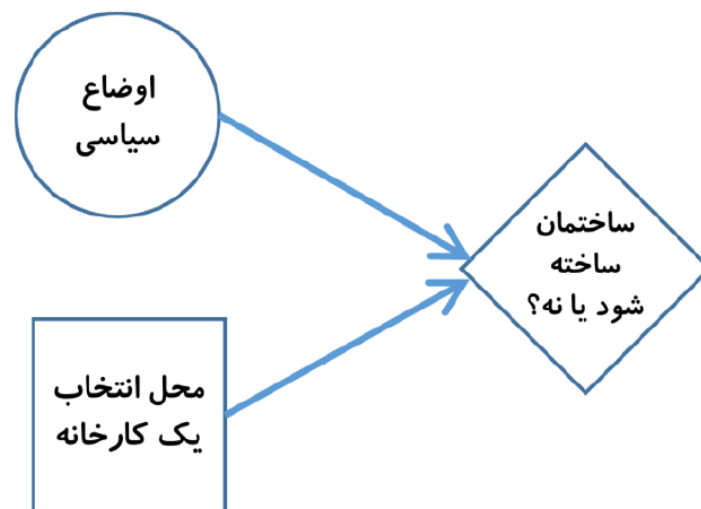
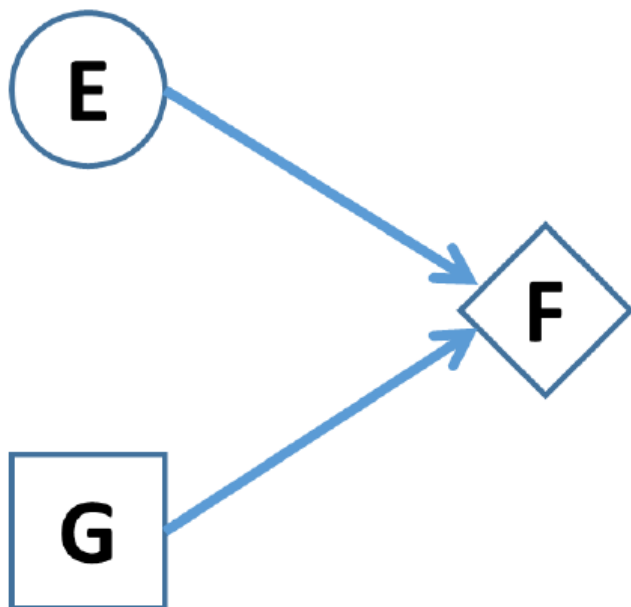




# نمودار تاثیر

کمان هایی که به گره های محاسباتی / ارزش یا گره های پیامد نهایی وارد می شوند از نوع رابطه

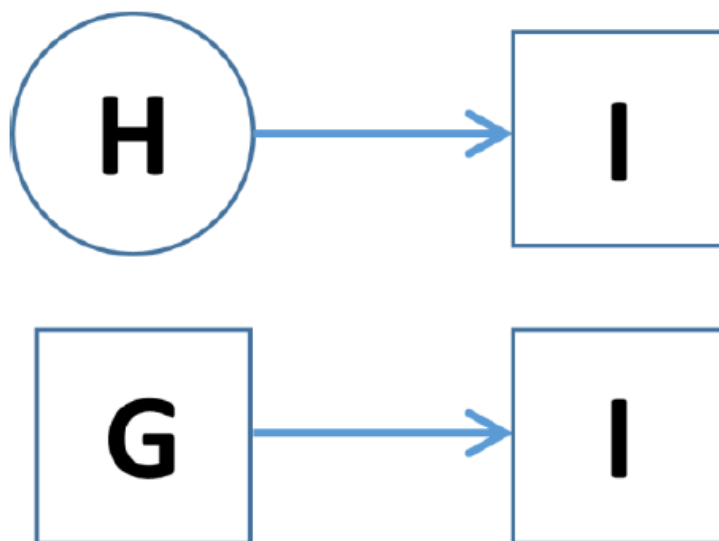
ای هستند. برای مثال:



## کمان های توالی

کمان های واصل به گره تصمیم از نوع توالی است و فرض می شود تصمیم موجود در گره موخر هنگامی اخذ می شود که نتیجه گره های مقدم مشخص شده باشند. یعنی یا تصمیم مشخص شده باشد یا عدم قطعیت آن از بین رفته باشد.

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید.



در شکل فوق فرض می شود که زمانی تصمیم / گرفته می شود که نتیجه یا احتمالات موجود در

گره  $H$  و  $G$  تعیین شده باشد.

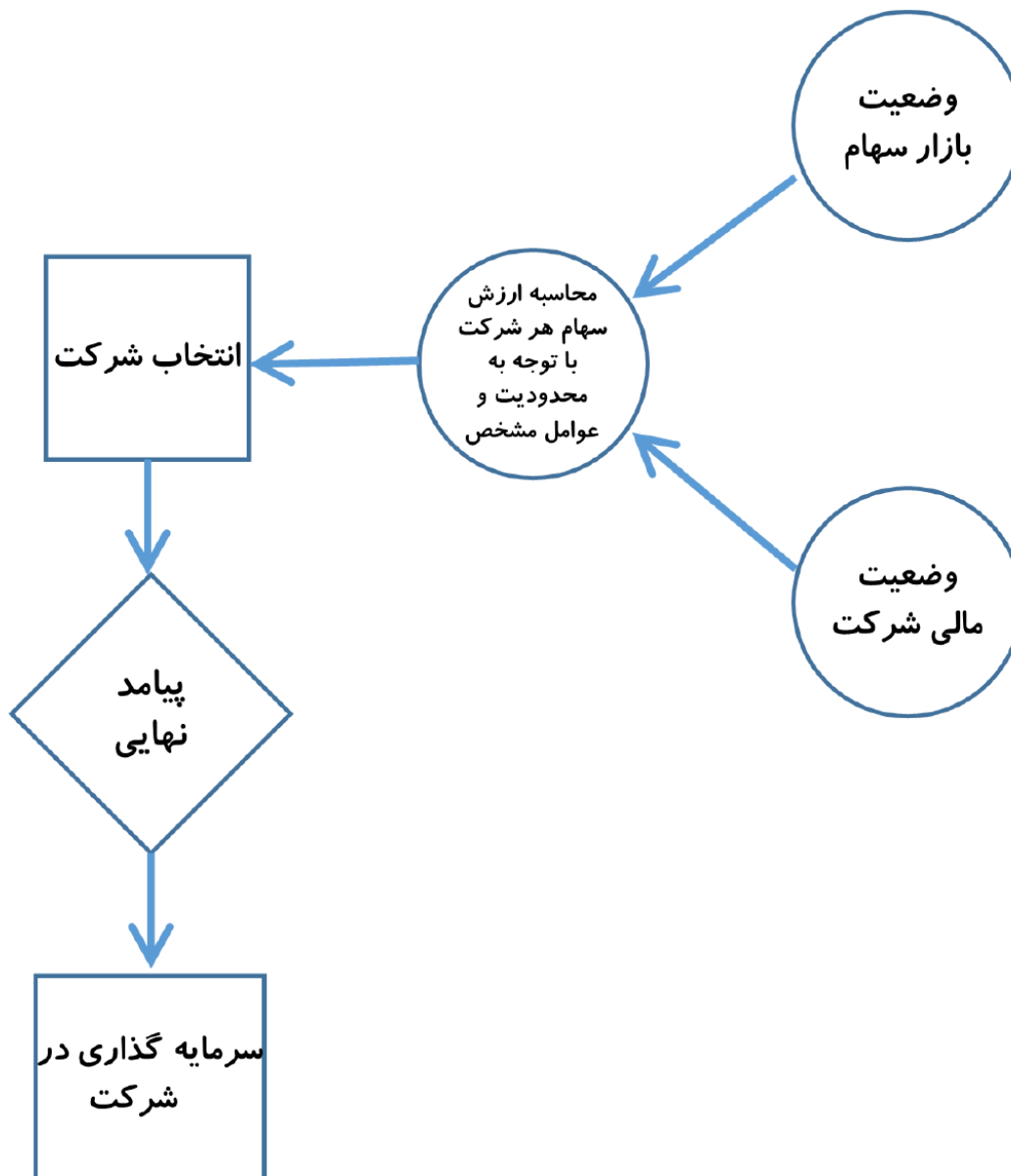
کلیه کمان‌های وارده به گره‌های شانس/نتیجه نهایی/ارزش از نوع رابطه‌ای هستند و فقط کمان‌های وابسته به گره تصمیم از نوع توالی است.

**نکته:** سعی می‌شود در نمودار تاثیر فقط یک گره نتیجه نهایی داشته باشیم.

**نکته:** نمودار تاثیر، یک گراف بدون دور است.

# نمودار تاثیر

مثال:



برای حل تمرین های تکمیلی در خصوص  
مباحث مطروحه، به جزوه این درس  
مراجعه کنید.

# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com)

[behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com)