درس۹: برنامه‌ریزی پویای قطعی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

BEHINEHYAB.COM

مقدمه

برنامه ریزی پویا نوعی تکنیک ریاضی است که قادر است مسائل بزرگ و پیچیده را به مسائل کوچک تر و ساده تر تقسیم کرده و با حل هر یک از آن ها، جواب بهینه مسئله اصلی را بدست آورد. این روش، در حقیقت برای یک سری تصمیم گیری های پی در پی و وابسته به کار می رود. به این مسایل که در آن ها یک سری تصمیمات مرتبط اتخاذ می شود، مسائل **تصمیم گیری متوالی** گفته می شود و چون این تصمیم گیری ها در چند مرحله انجام می پذیرد، لذا مسایل تصمیم گیری چند مرحله ای نامیده می شود. نوعی از مسایل تصمیم گیری چند مرحله، برنامه ریزی پویا است.

برنامه ریزی پویا در تلاش است که با تعیین ترکیبی از تصمیمات متوالی، حداکثر بهره وری را بدست آورد. بدین منظور و برخلاف روش هایی نظیر برنامه ریزی خطی و برنامه ریزی عدد صحیح که استاندارد و محدود هستند، روش برنامه ریزی پویا دارای چارچوب مشخص و استانداردی برای فرموله کردن مسایل نیست و در حقیقت، آن چیزی که برنامه ریزی پویا انجام می دهد، ارایه یک روش کلی برای حل مسایل است. با استفاده از برنامه ریزی پویا می توان طیف بسیاری زیادی از مسایل برنامه ریزی، اعم از برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی غیرخطی، شبکه، برنامه ریزی عدد صحیح و نظیر آن را حل کرد؛ هر چند استفاده از این روش در حل مسایل برنامه ریزی خطی به خصوص در مواردی که ابعاد مسئله بزرگ است چندان به صرفه نیست. به رغم چنین گستردگی و توانمندی در حل انواع مختلف مسایل، برای ان که بتوان تشخیص داد که چه نوع مسایل را می توان با برنامه ریزی پویا حل کرد و این که اساسا راه حل چنین مسایلی چگونه است، باید ساختار کلی مسئله برنامه ریزی پویا را شناخته و مراحل و حالت های مسئله را مشخص کنیم. برنامه ریزی پویا در حوزه های مختلفی همچون برنامه ریزی تولید و فروش، برنامه ریزی نیروی کار، کنترل تولید و موجودی، نگهداری و تعمیرات و مانند ان کاربرد دارد.

ویژگی های مسائل برنامه‌ریزی پویا به شرح ذیل است:

۱- اگر هر مسئله برنامه ریزی پویا را به چند مسئله کوچک تر تقسیم کنیم، هر یک از آن مسایل کوچکتر را یک **مرحله** یا *Stage* نامند. در هر مرحله باید تصمیمی اتخاذ شود که بر مراحل بعد اثر گذار است.

۲- در هر مرحله باید تعیین شود که در چه وضعیتی هستیم. بنابراین هر مرحله شامل یک یا چند وضعیت یا **حالت** (*State*) است که آن را به مراحل قبل و بعد مرتبط می سازد. حالت در هر مرحله توسط دو چیز تعیین می شود: یکی حالت قبلی و دیگری تصمیمی است که در مرحله قبل اتخاذ شده است. تصمیم گیری در هر مرحله با توجه به مشخص بودن وضعیت در ان مرحله انجام می شود. تعداد حالات می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳- در هر مرحله با اتخاذ یک **تصمیم**، حالت مرحله فعلی به حالتی که وابسته به مرحله بعدی باشد انتقال می‌یابد.

۴- با فرض معلوم بودن حالت در یک مرحله، **سیاست بهینه** در مورد مراحل باقی مانده، مستقل از سیاستی است که در مراحل قبلی اتخاذ شده است.

۵- داشتن حالت فعلی سیستم، حاوی کلیه اطلاعاتی است که برای تعیین سیاست بهینه مربوط به مراحل باقی مانده مورد نیاز است.

۶- روش حل این مسائل، با پیدا کردن جواب بهینه مربوط به کلیه حالت های مرحله آخر آغاز می‌شود.

۷- سیاست بهینه همه حالات های مرحله n را می‌توان با یک **رابطه برگشتی** و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت های مرحله $(n+1)$ مشخص ساخت. رابطه برگشتی به صورت زیر است.

$$f_n^*(s) = \underset{x_n}{Min}\left\{p(s,x_n) + f_{n+1}^*(x_n)\right\} = \underset{x_n}{Min}\left\{f_n(s,x_n)\right\}$$

که در رابطه فوق، سیستم در مرحله n و حالت s است و هدف یافتن x_n ای است که عبارت $f_n(s,x_n)$ یا $p(s,x_n)+f^*_{n+1}(x_n)$ کمینه شود.

۸- روش حل با **حرکت پس رو** (*Backward*) و به این صورت که حل از مرحله آخر به اول انجام می گیرد و با استفاده از رابطه برگشتی (*Recursive relationship*) از مرحله ای به مرحله قبل، بدست می‌آید.

۹- در مسایل برنامه ریزی پویا، دانستن حالت فعلی سیستم حاوی کلیه اطلاعاتی است که برای تعیین سیاست بهینه مربوط به مراحل باقیمانده مورد نیاز است. به این خاصیت، **اصل بهینگی** یا *Principle of Optimialty* گفته می شود.

۱۰- روش حل این مسایل، با پیدا کردن جواب بهینه مربوط به کلیه حالت های مرحله اخر آغاز می شود.

با توجه به این که در مسایل برنامه ریزی پویا یک ساختار واحد برای حل همه مسایل وجود ندارد، لذا این جا تلاش می شود مثال های مختلفی از حوزه های گوناگون حل شود تا مخاطبان با نحوه حل این گونه مسایل بهتر آشنا شوند.

مثال: سازمان جهانی بهداشت به منظور بهداشت و آموزش پزشکی در کشورهای جهان سوم در نظر دارد ۵ گروه پزشکی خود را به سه کشور اعزام کند. این سازمان باید مشخص کند به هر کشور چند گروه اختصاص یابد تا کارایی کل ۳ کشور بیشینه شود. معیار سنجش کارایی این گروه‌ها، افزایش طول عمر جمعیت است که بر حسب تعداد گروه‌های پزشکی به صورت جدول زیر است:

تعداد گروه های پزشکی	کشور 1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

حل:

x_n : معرف تعداد گروه‌های پزشکی که به کشور n-ام اختصاص یافته است.

حالت سیستم (s): تعداد گروه‌هایی که در مراحل قبلی هنوز تخصیص نیافته اند.

$p_i(x_i)$: معیار سنجش کارایی از تخصیص x_i گروه پزشکی به کشور i-ام است.

مدل برنامه‌ریزی ریاضی مسئله فوق به صورت زیر است:

$$Max \quad \sum_{i=1}^{3} p_i(x_i)$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_i \geq 0, \text{int}$$

با استفاده از قراردادهایی که در خصوص مسئله برنامه‌ریزی پویا داشتیم، $f_n(s,x_n)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f_n(s,x_n) = p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s-x_n)$$

با استفاده از موارد بالا می‌توان روند حل را از $n=3$ (مرحله آخر) آغاز کرد.

در مرحله ۳ که به دنبال یافتن تعداد گروه‌های پزشکی برای کشور 3-ام هستیم. s می‌توان از ۰ تا ۵ (اعداد صحیح) مقدار بگیرد. اگر $s=0$ باشد، یعنی هیچ گروهی برای کشور ۳ ام برای تخصیص باقی نمانده است و در مراحل قبل تخصیص انجام شده است، لذا در کشور ۳-ام با توجه به جدول اطلاعات اولیه نمی‌توان افزایش طول عمر داشت و لذا f^*_n برابر صفر می‌شود.

اگر $s=1$ باشد، یعنی یک گروه تخصیص نداده شده و می‌تواند برای کشور 3 ام تخصیص داده شود. با توجه به جدول، f^*_n برابر ۵۰ می‌شود. برای s از ۲ تا ۵ این روند تکرار می‌شود.

$n=3$

s	f^*_n	x^*_n
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

جدول برای مرحله دوم به صورت زیر می‌شود:

BEHINEHYAB.COM

$n=2$

$s \backslash x_n$	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+50	20+0	-	-	-	-	50	0
2	0+70	20+50	45+0	-	-	-	70	0 یا 1
3	0+80	20+70	45+50	75+0	-	-	95	2
4	0+100	20+80	45+70	75+50	110+0	-	125	3
5	0+130	20+100	45+80	75+70	110+50	0+150	160	4

برای تشریح نحوه محاسبه جدول فوق، چند سلول را با جزییات بیان می‌کنیم.

ستون $x_2=0$

در حالتی که $s=0$ است(یعنی تمامی گروه‌های پزشکی در کشور ۱-ام تخصیص داده شده است) برای دو کشور ۲ و۳ گروه پزشکی برای تخصیص باقی نمانده است و لذا مقدار $f_2^*(0)$ برابر صفر می‌شود.

در حالتی که $s=1$ می‌شود، یعنی ۱ گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که برای کشور ۲ و۳ تخصیص یابد. در این ستون $x_2=0$ است، یعنی برای کشور ۲-ام گروه تخصیص داده نشود و یک گروه باقی مانده است که به کشور ۳-ام تخصیص می‌یابد. حال به جدول $n=3$ باز می‌گردیم و مقدار بهینه برای $s=1$ را بدست می‌آوریم که برابر با ۵۰ است. لذا $f_2(x_2,s)$ برابر با ۰ (افزایش عمر برای کشور ۲-ام) +۵۰ (افزایش عمر برای کشور ۳-ام) می‌شود.

ستون $x_2=1$

همان طور که ملاحظه می‌شود برای $s=0$ ، خط تیره کشیده شده است چون اگر $s=0$ باشد، یعنی برای کشورهای ۲ و ۳ گروهی برای تخصیص باقی نمانده است و لذا تخصیص یک گروه برای کشور ۲-ام ($x_2=1$) معنا ندارد و لذا با خط تیره (-) این نکته بیان می‌شود.

اگر $s=1$ باشد، یعنی یک گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که می‌توان در کشورهای ۲ و ۳ (همان مراحل ۲ و ۳) تخصیص یابد. چون $x_2=1$ **است،** این گروه به کشور ۲-ام تخصیص می‌یابد و با توجه به جدول اولیه، افزایش طول عمرا برابر ۲۰ سال خواهد بود. چون تخصیص ۱ گروه پزشکی در کشور ۲-ام، برای کشور ۳-ام گروهی باقی نمی‌ماند، لذا افزایش طول عمر برای گشور ۳-ام برابر صفر است، بنابراین $f_2(x_2,s)$ برابر ۲۰+۰ می‌شود.

اگر $s=2$ باشد، یعنی ۲ گروه پزشکی می‌تواند در کشورهای ۲ و ۳ تخصیص یابد و چون $x_2=1$ است، یک گروه در کشور ۲-ام و یک گروه باقی مانده در کشور سوم باید تخصیص یابد که در این صورت $f_2(x_2,s)$ برابر ۲۰(افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۲-ام) + ۵۰ (افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۳-ام) می‌شود.

ستون $f_2^*(s)$ برابر بیشترین $f_2(x_2,s)$ به ازای تمامی x_2 است و x_2 متناظر با مقادیر بیشتر در x_2^* قرار می‌گیرد.

$n=1$

s \ x_n	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s)$	x_1^*
5	0+160	45+125	70+95	90+70	105+50	120+0	170	1

در جدول مرحله آخر ($n=1$)، چون هیچ تخصیصی صورت گرفته نشده است، لذا ۵ گروه پزشکی باقی مانده است که می‌توان به گروه‌های ۱، ۲ و ۳ تخصیص یابد. اگر $x_n=0$ باشد یعنی در کشور ۱-ام هیچ گروه پزشکی تخصیص داده نشود و ۵ گروه باقی مانده برای دو کشور ۲ و۳ استفاده شود که در این صورت مقدار بهینه برابر ۱۶۰ می‌شود. نحوه محاسبه سایر مقادیر مشابه جدول $n=2$ است. تخصیص گروه‌های پزشکی به صورت $x_1=1,x_2=3,x_3=1$ می‌شود که باعث ۱۷۰ سال افزایش عمر خواهد شد.

مثال: حجم کار کارگاهی در فصول مختلف نوسانات زیادی دارد. به دلیل هزینه گزاف آموزش و استخدام کارگران جدید، مدیر کارگاه تمایلی به اخراج کارگران اضافی ندارد از طرفی وی نمی‌خواهد در

فصول کم کاری تعداد زیادی کارگر استخدام داشته باشد. به دلیل تولید کالاهای سفارشی در این کارگاه، امکان تولید و ذخیره کالا هم میسر نمی‌باشد. با این شرایط مدیر کارخانه می‌خواهد سیاست استخدام کارگر در فصول مختلف را بداند. تعداد کارگران مورد نیاز هر فصل به صورت جدول زیر است.

فصل	بهار	تابستان	پاییز	زمستان	بهار
تعداد کارگر مورد نیاز	255	220	240	200	255

تعداد کارگران هر فصل نمی‌تواند از مقادیر فوق کمتر باشد. هر کارگر اضافی نیز باعث از دست رفتن حدود ۲۰۰۰ دلار در فصل می‌شود. به علاوه هزینه‌های استخدام و اخراج کارگران با حاصل ضرب ۲۰۰ دلار در مربع تفاوت سطح استخدام دو فصل متوالی برابر است. تعداد کارگران می‌تواند کسری باشد چون می‌توان استخدام نیمه وقت داشت. سطح استخدام در هر فصل به چه صورت باشد تا هزینه کمینه شود:

حل:

n : تعداد فصل ها

x_n : سطح استخدام در فصل n-ام

s: سطح استخدام کارگران

r_n: حداقل نیروی انسانی مورد نیاز در مرحله n ام

$$f_n(x_n,s)=200(x_n-s)^2+2000(x_n-r_n)+f^*_{n+1}(x_n)$$

در مرحله $n=4$ (فصل بهار) شروع می‌کنیم:

$n=4$

$s \backslash x_n$	$f_4(x_n,s)$	x_4^*	$f_4^*(s)$
$s\le 255$	$200(x_n-s)^2+2000(x_n-255)$	255	$200(255-s)^2$

در $n=4$ (فصل بهار) چون تعداد استخدام نمی‌تواند از ۲۵۵ بیشتر شود لذا بخش $2000(x_n-255)$ برابر صفر است.

برای مرحله $n=3$ (فصل زمستان)، $f_3(x_n,s)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f_3(x_n,s)=\underset{200\le x_3\le 255}{Min}\left\{200(x_3-s)^2+2000(x_3-200)+200(255-x_3)^2\right\}$$

تعداد کارگران این فصل (فصل زمستان) برابر x_3 است و چون در ابتدای این فصل s کارگر از فصل قبل امده است و لذا x_3-s کارگر باید استخدام یا اخراج شوند و هزینه استخدام و اخراج آن ها برابر با $200(x_3-s)^2$ خواهد بود. با توجه به این که تعداد کارگران مورد نیاز برابر ۲۰۰ است، اگر تعداد کارگران این فصل (x_3) از ۲۰۰ بیشتر شود، باید هزینه کارگر اضافی داد. هزینه مرحله ۴ به این صورت بدست می‌آید که چون تعداد کارگران این فصل x_3 است، در ابتدای فصل بهار سطح استخدامی‌برابر x_3 است و کل هزینه استخدام برابر با $200(255-x_3)^2$ می‌شود.

برای بدست آوردن کمینه تابع $f_3(x_n,s)$ ، باید این تابع را بر حسب x_3 مشتق جزیی گرفت و لذا داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}f_3(s,x_3)=400(x_3-s)+2000-400(255-x_3)=400(2x_3-s-250)=0$$

لذا داریم:

$$x_3^*=\frac{s+250}{2}$$

چون مشتق دوم مثبت است، لذا x_3^* کمینه است. چون $\frac{s+250}{2}$ در محدوده $(245,252.5)$ قرار دارد، لذا $\frac{s+250}{2}$ در فاصله موجه x_3 قرار دارد و مقدار $\frac{s+250}{2}$ کمینه است. پس از جایگزینی x_3 با $\frac{s+250}{2}$ در $f_3(x_3^*,s)$ خواهیم داشت:

$n=3$

s	x_3^*	$f_3^*(s)$
$240 \le s \le 255$	$\frac{s+250}{2}$	$50(250-s)^2+50(260-s)^2+1000(s-150)$

برای مرحله $n=2$ (پاییز) به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f_2(s,x_2) &= 200(x_2-s)^2+2000(x_2-240)+f_3^*(x_2) \\ &= 200(x_2-s)^2+2000(x_2-240)+50(250-x_2)^2 \\ &\quad +50(260-x_2)^2+1000(x_2-150) \end{aligned}$$

برای پیدا کردن x_2^* مدل زیر حل می‌شود:

$$f_2^*(s)=\underset{220\le x_2\le 255}{Min} f_2(s,x_2)$$

با مشتق گیری و قرار دادن مشتق برابر صفر، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s,x_2)=600x_2-400s-240*200=0$$

$$\rightarrow x_2^*=\frac{2s+240}{3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_2(s,x_2)=600>0$$

اگر $240 \le s \le 255$ باشد، لذا در محدوده مجاز x^* خواهد بود و $x^*=\frac{2s+240}{3}$ است ولی اگر $220 \le s \le 240$ باشد، $x^* \le 240$ خواهد شد و حداقل $f_2(s,x_2)$ در بازه $220 \le s \le 240$ در $x^*=240$ رخ می‌دهد. خلاصه نتایج برای $n=2$ در جدول زیر آمده است:

$n = 2$

s	x_2^*	$f_2^*(s)$
$220 \le s \le 240$	240	$200(240-s)^2+115000$
$240 \le s \le 255$	$\frac{2s+240}{3}$	$\frac{200}{9}(2(250-s)^2+(265-s)^2+30(3s-575))$

برای $n=1$ (تابستان) داریم:

$$f_1(s,x_1)=200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+f_2^*(x_1)$$

مقدار $f_2^*(x_1)$ در محدودهای $220 \le x_1 \le 240$ و $240 \le x_1 \le 255$ دارای دو مقدار متفاوت است، لذا $f_1(s,x_1)$ به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f_1(s,x_1)=\begin{cases} 200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+2000(240-x_1)^2+115000 & 220 \le x_1 \le 240 \\ 200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+ & \\ \frac{200}{9}\left[2(250-x_1)^2+(265-x_1)^2+30(3x_1-575)\right] & 240 \le x_1 \le 255 \end{cases}$$

برای یافتن مقدار بهینه $f_1(s,x_1)$، ابتدا فرض می‌کنیم $x_1 \le 240$، مشتق $f_1(s,x_1)$ بر حسب x_1 بـه صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f_1(s,x_1)=4400x_1-400s-958000)=0$$

با توجه به این که $s=255$ است، آنگاه $x_1^*=240.9$ لذا برای تمامی مقادیر $x_1 \le 240$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f_1(s,x_1)<0$$

لذا حداقل روی ناحیه $x_1 \le 240$ به ازای $x_1=240$ رخ می‌دهد.

اگر $240 \le x_1 \le 255$ باشد آنگاه :

BEHINEHYAB.COM

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = \tfrac{400}{3}(4x_1 - 3s - 225) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3s+225}{4}$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s,x_1) = \frac{1600}{3} > 0$$

چون در ایـن مرحلـه، $s = 255$ اسـت، پـس در ناحیـه $240 \le x_1 \le 255$ حـداقل $f_1(s,x_1)$ بـه ازای $x_1 = 247.5$ ایجاد می‌شود که از مقدار کمینه تابع هدف دربازه $220 \le x_1 \le 240$ کمتر است لذا داریم:

$$f_1^*(255) = f_1^*(255, 247.5) = 185000$$

خلاصه نتایج $n=1$ در جدول زیر آمده است:

$n=1$

s	x_1^*	$f_1^*(s)$
255	247.5	185000

لذا سیاست بهینه برابر با $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (247.5, 245, 247.5, 255)$ و هزینه کل ۱۸۵۰۰۰ است.

تمرین: برنامه‌ریزی خطی زیر را از روش برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad x_1 \le 4 \\
&\quad 2x_2 \le 12 \\
&\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

حل:

n برابر ۲ و تعداد متغیرهای تصمیم گیری است.

(R_1, R_2, R_3) بردار حالت است که R_i مقدار باقی مانده از منبع i است.

x_i مقدار متغیر i–ام است.

برای $n = 2$ داریم:

مقدار تابع $f_2(R_1, R_2, R_3, x_2)$ برابر $5x_2$ است که مقدارهای x_2 باید محـدودیت هـای $2x_2 \le R_2$ و $2x_2 \le R_3$ را برآورده کند. لذا برای محاسبه x_2^* مدل زیر را باید حل کرد:

$$
\begin{aligned}
f_2^*(R_1, R_2, R_3) = Max\ f_2(R_1, R_2, R_3, x_2) = Max\ &\{5x_2\} \\
2x_2 &\le R_2 \\
2x_2 &\le R_3 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$n = 2$

(R_1, R_2, R_3)	$f_2^*(R_1, R_2, R_3)$	x_2^*
$R_i \ge 0$ $i = 1, \dots, 3$	$5\min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$	$\min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$

برای $n=1$ داریم:

$$f_1^*(R_1,R_2,R_3)=Max\ f_1(R_1,R_2,R_3,x_1)=\underset{\substack{x_1\le R_1\\3x_1\le R_3\\x_1\ge 0}}{Max}\left\{3x_1+f_2^*(R_1-x_1,R_2,R_3-3x_1)\right\}$$

چون در مرحله اول از منابع استفاده نشده است، لذا $R_1=4$ و $R_2=12$ و $R_3=18$ است. لذا f_1^* به صورت زیر می‌شود.

$$f_1^*(4,12,18)=\underset{\substack{x_1\le 4\\3x_1\le 18\\x_1\ge 0}}{\max}\left\{3x_1+f_2^*(4-x_1,12,18-3x_1)\right\}$$
$$=\max_{0\le x_1\le 4}\left\{3x_1+5\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}\right\}$$

توجه داشته باشید که

$$\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}=\begin{cases}6 & 0\le x_1\le 2\\ 9-1.5x_1 & 2\le x_1\le 4\end{cases}$$

با جایگزینی دو عبارت فوق در هم داریم:

$$3x_1+5\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}=\begin{cases}3x_1+30 & 0\le x_1\le 2\\ 45-4.5x_1 & 2\le x_1\le 4\end{cases}$$

با توجه به این که در $x_1=2$ هر دو عبارت $3x_1+30$ و $45-4.5x_1$ بیشینه می‌شود، لذا $x_1^*=2$ می‌شود و خواهیم داشت: $(R_1,R_2,R_3)=(2,12,12)$ و $x_2^*=6$ و سود کل برابر با ۳۶ خواهد شد.

تمرین: صاحب یک فروشگاه زنجیره ای، ۵ جعبه توت فرنگی برای فروش در سه شعبه خود خریداری کرده است. مقدار فروش توت فرنگی در این سه شعبه متناوب است. لذا صاحب فروشگاه مایل است که این ۵ جعبه را طوری به سه شعبه تخصیص دهد که امید ریاضی کل سود حاصل حداکثر شود. همچنین مانعی

BEHINEHYAB.COM

نیست که یک فروشگاه توت فرنگی نداشته باشد. جدول زیر، امید ریاضی سود هر شعبه را با در نظر گـرفتن تعداد جعبه توت فرنگی که به آن شعبه اختصاص یابد نشان می‌دهد.

تعداد جعبه	1	2	3
	شماره شعبه		
0	0	0	0
1	5	6	4
2	9	11	9
3	14	15	13
4	17	19	18
5	21	22	20

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا چگونگی تخصیص این ۵ جعبه به سه شعبه را طوری تعیین کنید که امید ریاضی سود کل حداکثر شود.

حل:

x_n : تعداد جعبه‌های توت فرنگی به شعبه n تخصیص داده شده است.

$p_n(x_n)$: امید سود فروش از تخصیص x_n جعبه به شعبه n

s_n: تعداد جعبه‌های باقی مانده برای تخصیص به شعب

تعداد مراحل برابر ۳ است.

$$f_n^*(s_n) = \max_{0 \le x_n \le s_n} \left[p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

BEHINEHYAB.COM

$n=3$

s_3	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	4	1
2	9	2
3	13	3
4	18	4
5	20	5

$s_3=0$: در این صورت هیچ جعبه ای برای تخصیص به شعبه شماره ۳ باقی نمانده است و لذا سودی نمی‌توان انتظار داشت.

$s_3=1$: در این صورت ۱ جعبه باقی مانده است و از تخصیص این جعبه، سود ۴ واحدی عاید می‌شود.

$n=2$

s_2 \ x_n	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	4	6	–	–	–	–	6	1
2	9	10	11	–	–	–	11	2
3	13	15	15	15	–	–	15	1 or 2 or 3
4	18	19	20	19	19	–	20	2
5	20	24	24	24	23	22	24	1 or 2 or 3

BEHINEHYAB.COM

$s_2=0$ و $x_2=0$: در این صورت جعبه ای برای تخصیص به شعبه شماره ۲ باقی نمانده و لذا در این شعبه و شعبه ۳ سودی عاید صاحب شعب نمی‌شود.

$s_2=0$ و $x_2>0$: به دلیل این که هیچ جعبه ای باقی نمانده است، لذا امکان تخصیص جعبه به شعبه ۲ و۳ نیست و لذا با – نشان داده شده است.

$s_2=1$ و $x_2=1$: در این صورت یک جعبه برای تخصیص باقی مانده است که این جعبه به شعبه ۲ تخصیص می‌یابد و جعبه ای برای شعبه ۳ باقی نمی ماند و لذا سود حاصل برابر ۰+۶ می‌شود.

$s_2=3$ و $x_2=2$: در این صورت ۳ جعبه برای تخصیص باقی مانده است که دو جعبه برای شعبه ۲ و یک جعبه برای شعبه ۳ است لذا سود حاصل برابر با ۴+۱۱=۱۵ می‌شود.

$s_2=5$ و $x_2=3$: در این صورت ۵ جعبه برای تخصیص باقی مانده است که سه جعبه به شعبه ۲ و ۲ جعبه باقی مانده به شعبه ۳ تخصیص داده می‌شود. لذا سود حاصل برابر با ۱۵+۹=۲۴ می‌شود.

$n=1$

s_1 \ x_n	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
5	24	25	24	25	23	21	25	1 *or* 3

این مسئله دارای دو جواب بهینه به صورت زیر است:

جواب بهینه	x_1^*	x_2^*	x_3^*
1	1	2	2
2	3	2	0

تمرین: دانشجویی ۷ روز هفته وقت دارد تا برای ۴ امتحان اماده شود. برای آمادگی هر درس حداقل یک روز نیاز دارد. این دانشجو برای تمرکز بیشتر تصمیم گرفته است که در یک روز بیش از یک درس

BEHINEHYAB.COM

نخواند. بنابراین می‌تواند برای هر درس، یک، دو، سه، یا چهار روز وقت بگذارد. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا چطور می‌تواند خود را برای امتحان این ۴ درس آماده کند. نمره این دانشجو برای هر درس با توجه به تعداد روز هایی که مطالعه می‌نماید به صورت زیر پیش بینی شده است:

تعداد روز های مطالعه	برآورد نمره بدست آمده از درس شماره 1	2	3	4
1	1	5	4	4
2	3	6	6	4
3	6	8	7	5
4	8	8	9	8

حل:

x_n : برابر تعداد روز های مطالعه درس n –ام

$p_n(x_n)$: نمره اخذ شده پس از x_n روز مطالعه درس n–ام

s_n: تعداد روز های باقی مانده برای مطالعه

$$f_n^*(s_n) = \max_{1\le x_n \le \min(s_n,4)} \left[p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

تعداد مراحل برابر ۴ است.

$n = 4$

s_4	$f_4^*(s)$	x_4^*
1	4	1
2	4	2
3	5	3
4	8	4

$n = 3$

s_3 \ x_3	1	2	3	4	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
2	8	–	–	–	8	1
3	8	10	–	–	10	2
4	9	10	11	–	11	3
5	12	11	11	13	13	4

$s_3 = 2$ و $x_3 = 1$: در این حالت ۲ روز برای مطالعه باقی مانده است که یک روز ان به درس ۳ تخصیص می‌یابد و یک روز باقی مانده می‌تواند به درس ۴ تخصیص یابد که در این صورت میانگین نمـره وی ۴+۴=۸ می‌شود.

$s_3 = 3$ و $x_3 = 1$: در این حالت ۳ روز برای مطالعه باقی مانده است که یک روز بـرای مطالعـه درس ۳ استفاده می‌شود و دو روز باقی مانده به درس ۴ –ام تخصیص می‌یابـد. در ایـن صـورت میـانگین نمـره وی ۴+۴=۸ می‌شود.

$s_3 = 4$ و $x_3 = 2$: در این حالت ۴ روز برای مطالعه باقی مانده است که دو روز بـرای مطالعـه درس ۳ استفاده می‌شود و دو روز باقی مانده برای درس ۴-ام استفاده می‌شـود. در ایـن صـورت میـانگین نمـره وی ۶+۴=۱۰ می‌شود.

$s_3 = 5$ و $x_3 = 3$: در این حالت ۵ روز برای مطالعه بـاقی مانـده اسـت کـه سـه روز بـرای درس سـوم استفاده می‌شود و ۲ روز باقی مانده برای درس ۴. لذا نمره قابل انتظار وی برابر با ۷+۴=۱۱

$n = 2$

s_2 \ x_2	1	2	3	4	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
3	13	–	–	–	13	1
4	15	14	–	–	15	1
5	16	16	16	–	16	1 or 2 or 3
6	18	17	18	16	18	1 or 3

$s_2 = 3$ و $x_2 = 1$: در این حالت ۳ روز برای مطالعـه بـاقی مانـده اسـت کـه یـک روز بـرای درس دوم گذاشته می‌شود. در این صورت معدل وی برابر ۵+۸=۱۳ خواهد شد.

$s_2 = 4$ و $x_2 = 2$: در این حالت ۴ روز برای مطالعه باقی مانده است که دو روز برای درس دوم گذاشته می‌شود که در این صورت معدل وی برابر با ۶+۸=۱۴ می‌شود.

نکته: به دلیل این که دانشجو باید حداقل یک روز برای هر درس تخصیص دهد، تعداد روز هـای بـاقی برای درس ۲ نباید از سه روز کمتر باشد.

BEHINEHYAB.COM

$n = 1$

$s_1 \backslash x_1$	1	2	3	4	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
7	19	19	21	21	21	$3\ or\ 4$

با توجه به این که درس اول ابتدای هفته است، لذا ۷ روز برای مطالعه باقی مانده است.

$s_1 = 7$ و $x_1 = 3$: در این حالت۷ روز برای مطالعه باقی مانده است که ۳ روز برای درس اول، و مـابقی برای درس های بعدی استفاده می‌شود که لذا معدل وی برابر با ۱۵+۶=۲۱ می‌شـود. براسـاس جـدول بـالا، جواب بهینه به صورت جدول زیر است:

جواب بهینه	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
1	3	1	2	1
2	4	1	1	1

تمرین: مسئول منطقه یک حزب سیاسی مشغول برنامه‌ریزی تبلیغاتی انتخاباتی است. برای این منظور می‌تواند از خدمات ۵ نفر استفاده کند تا در ۴ حوزه فعالیت کنند. با توجه به این کـه اگـر یـک دسـتیار در بیش از یک حوزه فعالیت کند، بازدهی وی کاهش پیدا می‌کند، لذا هر دستیار به یک حوزه گماشته می‌شود. همچنین حوزه‌های می‌تواند بدون دستیار بماند. برآورد می‌شود که افزایش تعداد آرا کاندیدا در هر حـوزه بـا توجه به دستیارانی که برای حوزه گماشته شده است، به شرح جدول زیر است:

تعداد دستیار	حوزه 1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	6	5	3
2	7	8	9	7
3	9	10	11	12
4	12	11	10	14
5	15	12	9	16

حل:

x_n: تعداد دستیاران فعال در حوزه n-ام

$p_n(x_n)$: تعداد آرا وقتی x_n دستیار گماشته می‌شود.

s_n: تعداد دستیاران گماشته نشده تا مرحله n-ام.

$$f_n^*(s_n) = \max_{0 \le x_n \le s_n} \left[p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

تعداد حالات برابر ۴ فرض می‌شود:

BEHINEHYAB.COM

$n=4$

s_4	$f_4^*(s)$	x_4^*
0	0	0
1	3	1
2	7	2
3	12	3
4	14	4
5	16	5

$n=3$

s_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	3	5	–	–	–	–	5	1
2	7	8	9	–	–	–	9	2
3	12	12	12	11	–	–	12	0 or 1 or 2
4	14	17	16	14	10	–	17	1
5	16	19	21	18	13	9	21	2

اگر $s_3=1$ و $x_3=0$ باشد، در این صورت برای حوزه‌های ۳ و ۴ تنها یک دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ تعلق نمی‌گیرد و تنها به حوزه ۴ داده می‌شود و تعداد آرا برابر با ۰+۳=۳ می‌شود.

اگر $s_3=2$ و $x_3=1$ باشد، در این صورت برای حوزه‌های ۳ و ۴ دو دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ یک نفر تخصیص می‌یابد و یک نفر به حوزه ۴ تخصیص می‌یابد که در این صورت تعداد آرا برابر با ۳+۵=۸ می‌شود.

اگر $s_3 = 3$ و $x_3 = 3$ باشد، در این صورت سه نفر برای تخصیص به حوزه‌های ۳ و ۴ باقی مانده است که هر سه نفر به حوزه ۳ تخصیص می‌یابد و به حوزه ۴ فردی تخصیص داده نمی‌شود و لذا مقدار کل آرا برابر با ۱۱+۰=۱۱ می‌شود.

اگر $s_3 = 5$ و $x_3 = 2$ باشد، در این صورت ۵ نفر برای تخصیص به حوزه‌های ۳ و ۴ باقی مانده است که ۲ نفر به حوزه ۳ و ۳ نفر به حوزه ۴ تخصیص داده می‌شود، لذا تعداد آرا برابر با ۹+۱۲=۲۱ می‌شود.

$n = 2$

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	5	6	–	–	–	–	6	1
2	9	11	8	–	–	–	11	1
3	12	15	13	10	–	–	15	1
4	17	18	17	15	11	–	18	1
5	21	23	20	19	16	12	23	1

$n = 1$

$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
5	23	22	22	20	18	15	23	0

براساس جداول بالا، جواب بهینه به صورت زیر می‌شود:

جواب بهینه	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
1	0	1	1	3

تمرین: با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} &Max\ 15x_1+10x_2\\ &\quad x_1+\ 2x_2\le 6\\ &\quad 3x_1+\ \ x_2\le 8\\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

حل:

در نظر بگیرید $S=(R_1,R_2)$ که R_i کمبود محدودیت i-ام است.

$$n=2\rightarrow f_2(R_1,R_2,x_2)=10x_2, 0\le x_2\le \min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$$

$n=2$

s	x_2^*	$f_2^*(s)$
(R_1,R_2)	$Min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$	$10Min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$

$$n=1\rightarrow f_1(6,8,x_1)=15x_1+f_2^*(6-x_1,8-3x_1)$$

$$=15x_1+10\min_{0\le x_1\le\frac{8}{3}}\left\{\frac{6-x_1}{2},8-3x_1\right\}=\begin{cases}10x_1+30 & 0\le x_1\le 2\\ 80-15x_1 & 2\le x_1\le\frac{8}{3}\end{cases}$$

مقدار بیشینه $f_1(.)$ در $x_1=2$ رخ می‌دهد که مقدار $f_1^*=50$ می‌شود و لذا جواب بهینه $(x_1^*,x_2^*)=(2,2)$ و $z^*=50$ می‌شود.

تمرین: مسئله زیر که در آن هزینه اولیه منظور شده است را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$
\begin{aligned}
Max \quad z &= 3x_1 + 7x_2 + 6f(x_3) \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6 \\
x_1 + x_2 \quad &\le 5
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$f(x_3) = \begin{cases} 0 & x_3 = 0 \\ -1 + x_3 & x_3 > 0 \end{cases}$$

حل: در نظر بگیرید $s = (R_1, R_2)$ که R_i کمبود محدودیت i-ام است.

$$f_3(R_1, R_2, x_3) = \begin{cases} 0 & x_3 = 0 \\ -1 + x_3 & x_3 > 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
f_3^*(R_1, R_2) &= \max\left\{0, \max_{0 \le x_3 \le \frac{R_1}{2}} \{-1 + x_3\}\right\} \\
&= \max\left\{0, -1 + \frac{R_1}{2}\right\} \\
&= \begin{cases} -1 + \dfrac{R_1}{2} & 0 \le R_1 \le 2 \\ 0 & R_1 \ge 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\to x_3^* = \begin{cases} \dfrac{R_1}{2} & 0 \le R_1 \le 2 \\ 0 & R_1 \ge 2 \end{cases}$$

$n = 2$

$$f_2^*(R_1, R_2) = \max_{x_2 \le \frac{R_1}{3}; x_2 \le R_2} f_2(R_1, R_2, x_2) = \max_{x_2 \le \frac{R_1}{3}; x_2 \le R_2} 7x_2 + f_3^*(R_1 - 3x_2, R_2)$$

$$f_2^*(R_1, R_2) = \begin{cases} \dfrac{7R_1}{3} & \dfrac{R_1}{3} \le R_2 \\ 7R_2 & \dfrac{R_1 - 2}{3} \le R_2 \le \dfrac{R_1}{3} \\ \dfrac{17R_2}{2} - 1 + \dfrac{R_1}{2} & R_2 \le \dfrac{R_1 - 2}{3} \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \dfrac{R_1}{3} & \dfrac{R_1}{3} \le R_2 \\ R_2 & \dfrac{R_1 - 2}{3} \le R_2 \le \dfrac{R_1}{3} \\ R_2 & R_2 \le \dfrac{R_1 - 2}{3} \end{cases}$$

BEHINEHYAB.COM

$$n=1$$

$$f_1^*(6,5)=\max_{\substack{0\le x_1\le 5\\ 0\le x_1\le 6}}\left[3x_1+f_2^*(6-x_1,5-x_1)\right]$$

$$=\max\left\{\max_{0\le x_1\le 4.5}\left[3x_1+\frac{7(6-x_1)}{3}\right],\max_{4.5\le x_1\le 5}\left[3x_1+7(5-x_1)\right]\right\}$$

$$=\max\left\{\max_{0\le x_1\le 4.5}\left[\frac{2x_1}{3}+14\right],\max_{4.5\le x_1\le 5}\left[35-2x_1\right]\right\}=17$$

لذا جواب بهینه $(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=(4.5,0.5,0)$ و $z^*=17$ می‌شود.

تمرین: مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی و عدد صحیح زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\begin{aligned}&Max\quad Z=3x_1^2-x_1^3+5x_2^2-x_2^3\\&s.t.\\&\quad x_1+2x_2\le 4\\&\quad x_1,x_2\ge 0,\text{int}\end{aligned}$$

حل: حالت، مقدار باقی مانده از محدودیت است. تعداد حالت برابر با ۲ است.

$$n=2$$

s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	0
1	0	0
2	4	1
3	4	1
4	12	2

$n=1$

$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
4	12	6	8	0	-16	12	0

جواب بهینه $(x_1^*,x_2^*)=(0,2)$ و $z^*=12$ است.

مثال: مدل برنامه‌ریزی غیر خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید. مقدار بهینه را با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا محاسبه کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 32x_1-2x_1^2+30x_2+20x_3\\
&s.t.\\
&\qquad 3x_1+7x_2+5x_3\le 20\\
&\qquad x_1,x_2,x_3\ge 0,\text{int}
\end{aligned}
$$

حل: حالت، مقدار باقی مانده از محدودیت است و تعداد مراحل برابر ۳ است. هدف پیدا کردن مقدار $f_1^*(20)$:

$n=3$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
$0-4$	0	0
$5-9$	20	1
$10-14$	40	2
$15-19$	60	3
20	80	4

با توجه به این که برای تمامی‌اعداد بین ۰ تا ۴، مقدار بهینه $f_3^*(s_3)$ و x_3^* یکسان است لذا s_3 به صورت بازه ی $0-4$ نشان داده می‌شود تا در جدول اختصار شود. اگر s_3 از ۵ تا ۹ شود، لذا x_3 می‌توان یک باشد که در این صورت مقدار $f_3^*(s_3)$ برابر ۲۰ است.

$n=2$

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$0-4$	0	–	–	0	0
$5-6$	20	–	–	20	0
$7-9$	20	30	–	30	1
$10-11$	40	30	–	40	0
$12-13$	40	50	–	50	1
14	40	50	60	60	2
$15-16$	60	50	60	60	$0\ or\ 2$
$17-18$	60	70	60	70	1
19	60	70	80	80	2
20	80	70	80	80	$0\ or\ 2$

مشابه جدول $n=3$ ، برای راحتی s_2 به صورت بازه ای نشان داده می‌شود.

فرض کنید $s_2=5-6$ باشد و $x_2=0$ باشد، در این صورت x_3 می‌تواند ۱ باشد که مقدار تابع هدف برابر با ۲۰+۰=۲۰ می‌شود.

فرض کنید $s_2=10-11$ باشد و $x_2=1$ باشد، در این صورت $5x_3\le 3-4$ می‌شود و که در این صورت $x_3=0$ است و لذا مقدار تابع هدف برابر با ۳۰+۰=۳۰ است.

فرض کنید $s_2=17-18$ باشد و $x_2=2$ باشد، در این صورت $s_3=3-4$ می‌شود که $x_3=0$ می‌شود و لذا تابع هدف برابر با ۶+۰=۶ می‌شود.

BEHINEHYAB.COM

$n=1$

$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	6	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
20	80	100	116	118	126	130	120	130	5

جواب بهینه $(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=(5,0,1)$ و $z^*=130$ است.

تمرین: مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 2x_1^2+2x_2+4x_3-x_3^2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1+x_2+x_3\le 4\\
&\qquad x_1,x_2,x_3\ge 0,\text{int}
\end{aligned}
$$

حل: s_n ، میزان باقی ماده از منبع در مرحله n-ام است.

$n=3$

$$\max_{0\le x_3\le s_3} 4x_3-x_3^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(4x_3-x_3^2)=4-2x_3=0\rightarrow x_3^*=2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(4x_3-x_3^2)=-2<0$$

لذا $x_3^*=2$ یک نقطه بیشینه یا *Max* است.

$n=3$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
$0\le s_3\le 2$	$4s_3-s_3^2$	s_3
$2\le s_3\le 4$	4	2

BEHINEHYAB.COM

$n=2$

$\max\limits_{0\le x_2\le s_2} \left[2x_2+f_3^*(s_2-x_2)\right]$

$if\ \ 0\le s_2-x_2\le 2:\ \max\limits_{0\le x_2\le s_2}\left[2x_2+4(s_2-x_2)-(s_2-x_2)^2\right]$

$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[2x_2+4(s_2-x_2)-(s_2-x_2)^2\right]=-2+2s_2-2x_2=0$

$\to x_2^*=s_2-1; f_2^*(s_2)=2s_2+1$

$if\ \ 2\le s_2-x_2\le 4:\ \max\limits_{0\le x_2\le s_2}(2x_2+4)$

$\to x_2^*=s_2-2; f_2^*(s_2)=2s_2\le 2s_2+1$

$n=2$

s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$0\le s_2\le 1$	$4s_2-s_2^2$	0
$1\le s_2\le 4$	$2s_2+1$	s_2-1

$n=1$

$\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[2x_1^2+f_2^*(4-2x_1)\right]$

$if\ \ 0\le 4-2x_1\le 1\to \max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[2x_1^2+4(4-2x_1)-(4-2x_1)^2\right]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[-2x_1^2+8x_1\right]$

$\frac{\partial}{\partial x_1}(-2x_1^2+8x_1)=-4x_1+8=0\to x_1^*=2$

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(-2x_1^2+8x_1)=-4<0$

با توجه به موارد بالا، $x_1^*=2$ یک نقطه بیشینه یا *max* است و داریم: $f_1^*(4,2)=8$

$if\ \ 1\le 4-2x_1\le 4\to \max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[2x_1^2+2(4-2x_1)+1\right]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\left[2x_1^2-4x_1+9\right]$

$\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1^2-4x_1+9)=4x_1-4=0\to x_1^*=1$

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(2x_1^2-4x_1+9)=4>0$

با توجه به موارد بالا، $x_1^* = 1$ یک نقطه کمینه یا *Min* است.

برای یافتن جواب بیشینه، باید نقاط گوشه را چک کرد:

$$1 = 4 - 2x_1 \to x_1 = 1.5, f_1(4,1.5) = 7.5$$
$$4 = 4 - 2x_1 \to x_1 = 0, f_1(4,0) = 9 \to \max$$

با توجه به موارد بالا، جواب بهینه $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0,3,1)$ و $f_1^*(4) = 9$ است.

BEHINEHYAB.COM

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**

BEHINEHYAB.COM