درس ۲: روش سیمپلکس اولیه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

روش سیمپلکس اولیه، الگوریتمی فرایندی است که در آن یک رویه نظام گرا (*systematic*) آنقدر تکرار می‌گردد تا سرانجام به جواب مطلوب یا بهینه برسد. مجموعه قدم‌هایی که در چنین فرآیندی هر دفعه تجدید می‌شود را یک تکرار (*Iteration*) می نامند. به این‌ترتیب، الگوریتم یک مسئله دشوار را به مجموعه از مسائل آسان‌تر جایگزین می نماید.

مقدمات روش سیمپلکس اولیه

در یک دستورالعمل جبری کار با معادلات تساوی به مراتب ساده از نامعادلات است. از این رو نخستین قدم روش سیمپلکس تبدیل محدودیت‌های کارکردی از شکل نامعادله به معادله است. محدودیت‌های نامنفی بودن را می‌توان به صورت نامعادلات باقی گذاشت زیرا به طور مستقیم در فرایند حل وارد نمی‌شوند. تبدل نامعادله به معادله با معرفی متغیرهای لنگی (*slack variable*) انجام می‌شود. در ادامه مدل زیر را با استفاده از سیمپلکس حل می‌کنیم تا با قسمت‌های مختلف این الگوریتم در قالب یک مثال آشنا شویم. مدل به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&(P1)\ \ Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad x_1 \qquad\quad \le 4 \\
&\quad (2)\qquad\quad 2x_2 \le 12 \\
&\quad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

اکنون محدودیت‌های کارکردی (۱) را در نظر بگیرید. متغیر لنگی این محدودیت به صورت $x_3 = 4 - x_1$ تعریف می‌شود و در واقع مقدارکمبود سمت چپ محدودیت ۱ از مقدار سمت راست محدودیت ۱ است، لذا می‌توان محدودیت ۱ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_1 + x_3 = 4$$

معادله فوق زمانی با محدودیت ۱ برابر است که $x_3 \ge 0$ باشد. از این رو محدودیت ۱ با مجموعه محدودیت‌های زیر معادل است:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_3=4 \\ x_3\geq 0 \end{array}\right\}\equiv x_1\leq 4$$

برای روشن شدن موضوع یک مثال ساده می زنیم. محدودیت $x_1\leq 4$ را در نظر بگیرید. اگر $x_1=1$ باشد در این صورت $1<4$ خواهد شد و مقدار متغیر لنگی این محدودیت برابر با $x_3=3$ می‌شود. در این صورت شکل معادله رابطه $x_1\leq 4$ به صورت $x_1+x_3=4$ می‌شود که در این فرم معادله $x_1=1$ و $x_3=3$ است.

به صورت مشابه برای سایر نامعادلات می‌توان مدل $(P1)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{array}{lllllll} (P1-1) & Max\ \ Z=3x_1+5x_2 \\ s.t. \\ & (1) & x_1 & & +x_3 & & =4 \\ & (2) & & 2x_2 & & +x_4 & =12 \\ & (3) & 3x_1+2x_2 & & & +x_5 & =18 \\ & & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{array}$$

مدل $(P1\text{-}1)$ کاملا معادل مدل $(P1)$ ولی این شکل جدید برای عملیات جبری به مراتب ساده تر است. در مدل $(P1\text{-}1)$ تعداد متغیرهای برابر ۵ و تعداد معادلات برابر ۳ است که در این حالت با دستگاه معادلات با دو درجه آزادی مواجه هستیم. در این صورت می‌توان در هر مرحله برای دو متغیر مقدار دلخواهی قرار داد و دستگاه سه معادله، سه مجهول را حل کرد. در روش سیمپلکس (*simplex*) این دو متغیر اضافی برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهایی که برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند، متغیرهای غیر اساسی (*non-Basic variables*) و سایر آن‌ها متغیرهای اساسی (*Basic variables*) نامیده می‌شوند. به جوابی که تمامی متغیرهای غیراساسی برابر صفر باشند، جواب اساسی (*Basic solution*) و جواب اساسی که در آن متغیرهای اساسی نامنفی هستند را جواب اساسی موجه (*Basic feasible solution*) می نامند.

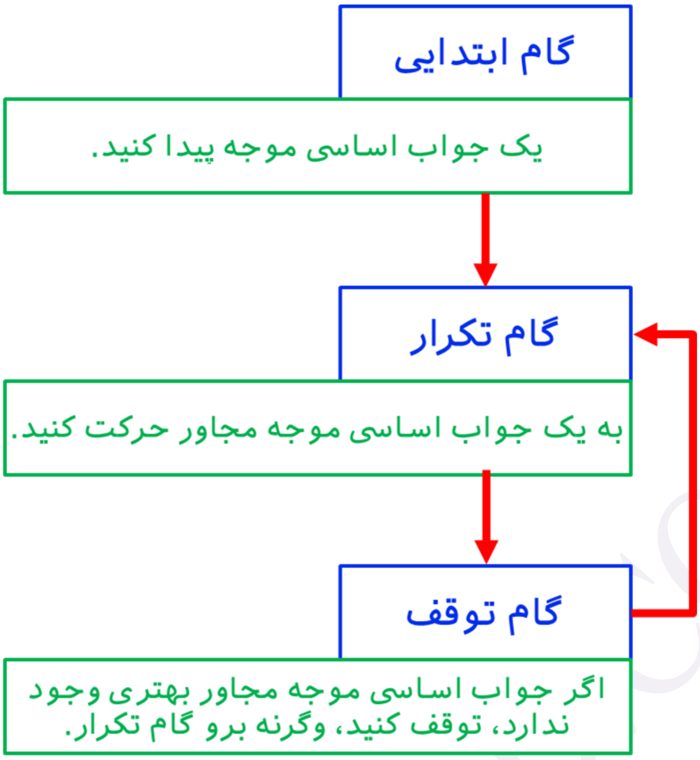
ساده تر است که تابع هدف نیز همزمان و همردیف با سایر محدودیت‌ها برخورد شود. بنابراین، قبل از شروع ارایه روش سیمپلکس، مسئله $(P1\text{-}1)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&(P1-2)\quad Max\ Z\\
&s.t.\\
&\quad (0)\ Z-3x_1-5x_2 &&=0\\
&\quad (1)\quad x_1+x_3 &&=4\\
&\quad (2)\quad 2x_2+x_4 &&=12\\
&\quad (3)\quad 3x_1+2x_2+x_5 &&=18\\
&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

در مدل (P۱-۲) ، معادله صفر که همان تابع هدف است و جز محدودیت‌ها مـدل محسـوب مـی‌شـود و چون معادله صفر به صورت تساوی است، دیگر نیاز به اضافه کردن متغیر لنگی نمی باشد.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

در این بخش به ارایه روش سیمپلکس می پردازیم. به صورت خلاصه، روش سیمپلکس در هر مرحله به دنبال یافتن جواب‌های اساسی موجه است که هر جواب از جواب قبلی بدتر نباشد تـا سـرانجام یـک جـواب اساسی موجه بهینه یافته شود. برای تبدیل از یک جواب اساسی موجه به جواب اساسی موجه دیگـر، کـافی است یک متغیر اساسی به متغیر غیر اساسی (متغیر اساسی خروجی) و در مقابل یک متغیر غیراساسـی بـه متغیر اساسی (متغیر اساسی ورودی) تبدیل شود. با این تغییرات جواب اساسی موجه فعلی به جواب اساسی موجه مجاور حرکت می کند. اگر یک جواب اساسی موجه از تمام جواب‌های اساسی موجه مجاور بهتر بـود، آن جواب، جواب بهینه است و الگوریتم در این مرحله به پایان می رسد. در شکل زیر خلاصـه مراحـل روش سیمپلکس به صورت کلی آورده شده است.



هر یک از قسمت‌های الگوریتم سیمپلکس را در قالب یک مثال بیان می‌کنیم.

گام ابتدایی: متغیرهای لنگی (x_3,x_4,x_5) را متغیرهای اساسی بنامید و متغیرهای (x_1,x_2) را به عنوان متغیرهای غیراساسی برابر با صفر قرار دهید. برای سادگی در انجام محاسبات، ضرایب متغیرهای و اعداد سمت راست را در جدولی به عنوان جدول سیمپلکس (*simplex tableau*) ثبت می‌شود. جدول سیمپلکس مثال (*P*۱-۲) به صورت جدول زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18

چون هر معادله شامل یک متغیر اساسی با ضریب ۱+ است، لذا مقدار هر متغیر اساسی برابر با عدد ثابت سمت راست معادله خواهد بود. جواب موجه اساسی جدول فوق برابر (

$(x_1=0, x_2=0, x_3=4, x_4=12, x_5=18)$ است که از این به بعد به صورت $(0,0,4,12,18)$ نمایش داده می‌شود.

گام توقف: اگر و فقط اگر تمام ضرایب معادل صفر مقادیر غیرمنفی (≥ 0) باشد، آن وقت جواب اساسی موجه فعلی، جواب بهینه است و در این صورت توقف کنید. در غیر این صورت برای پیدا کردن جواب اساسی موجه مجاور به گام تکراری بروید.

گام تکراری:

۱- متغیری که دارای بزرگترین ضریب منفی در معادله صفر است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب کنید. افزایش مقدار این متغیر غیراساسی منجر به تندترین اهنگ رشد مقدار تابع هدف می‌شود. مستطیلی به دور ستونی که زیر این متغیر بکشید و آن را ستون لولا (*pivot column*) بنامید. در این مثال، بزرگترین ضریب منفی (۵-) بوده و مربوط به متغیر x_2 است و لذا x_2 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌شود.

۲- متغیر اساسی خروجی به صورت زیر تعیین می‌شود.

الف) ضرایب مثبت ستون لولا را در نظر بگیرید

ب) اعداد سمت راست را به این ضرایب تقسیم کنید

پ) سطری را انتخاب کنید که نسبتی که برای آن در قسمت (ب) بدست آمده است، کوچکترین باشد.

ت) متغیر اساسی این معادله، متغیر اساسی خروجی است.

مستطیلی به دور این معادله بکشید و آن را سطر لولا (*pivot row*) بنامید. عددی که در هر دو مستطیلی قرار می‌گیرد را عدد لولا (*pivot number*) می نامیم.

نتایج عملیات بالا در جدول زیر آمده است.

متغیر ورودی

متغیر اساسی (0)	شماره معادله (1)	Z (2)	X_1 (3)	X_2 (4)	X_3 (5)	X_4 (6)	X_5 (7)	طرف سمت راست (8)	آزمون نسبت
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	6=12/2 کمینه
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	9=18/2
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	

متغیر خروجی

سطر لولا

ستون لولا

عدد لولا

در جدول فوق متغیر x_2 ، متغیر اساسی ورودی و x_4 متغیر اساسی خروجی است.

۳- جواب اساسی جدید را به کمک یک جدول سیمپلکس جدید بدست آورید. مراحل به دست آوردن جدول جدید به صورت زیر است.

الف) در ستون (۰)، متغیر x_4 را حذف و به جای آن متغیر x_2 را قرار دهید.

ب) برای تبدیل ضریب متغیر x_2 به یک، تمام سطر لولا را بر عدد لولا تقسیم نمایید.

پ) برای اینکه متغیر اساسی x_2 از سایر معادلات حذف شود، هر سطر (شامل سطر مربوط به معادله صفر) به استثنای سطر لولا به صورت زیر تغییر نماید.

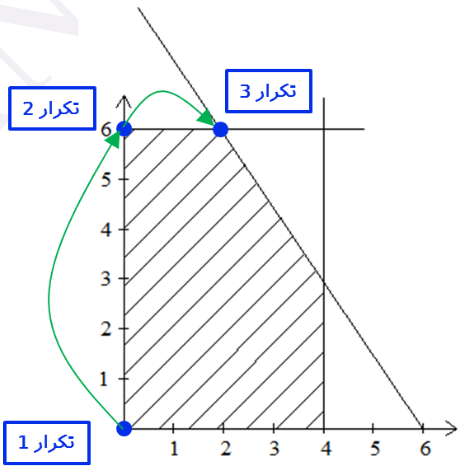
سطر جدید(به جز سطر لولا) = سطر قدیم – سطر لولای جدید × ضریب ستون لولا

پس از ایجاد جدول سیمپلکس جدید، به گام توقف می رویم. در صورت این که شرط توقف برقرار باشد الگوریتم متوقف می‌شود و در غیر این صورت به گام تکرار می رویم. این روند تا برآورده شدن شرط توقف ادامه می‌دهیم. جدول کامل سمپلکس برای (P۲-۱) به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2 کمینه
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	9=18/2
Z	0	1	-3	0	0	2.5	0	30	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_5	3	0	3	0	0	-1	1	6	2=6/3 کمینه
Z	0	1	0	0	0	1.5	1	36	
X_3	1	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_1	3	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	

در جدول فوق، جواب اساسی موجه $(2,6,2,0,0)$ با $Z=36$ شرط توقف را برآورده می سازد و لذا این جواب بهینه است.

نکته: در هر گام از گام تکرار الگوریتم سیمپلکس، یکی از نقاط گوشه محدوده امکان پذیر را مورد آزمون قرار می‌دهد. با توجه به کوچکی اندازه مدل، می‌توان نمایش حرکت بر روی گوشه‌های ناحیه امکان پذیر را در نمایش هندسی مدل ($P1$) ملاحظه کرد که در زیر آمده است.



اگر در روش سیمپلکس به جای انتخاب بزرگترین ضریب منفی از نظر قدرمطلق را انتخاب نمی کردیم، از سمت راست به جواب بهینه نزدیک می شدیم که یک جواب اساسی موجه دیگر مورد بررسی قرار می‌گرفت.

قیمت‌های سایه (*shadow prices*): روش سمپلکس علاوه بر جواب بهینه اطلاعات با ارزش دیگری تولید می نماید. قیمت سایه منبع *i* (که با y_i^* نشان داده می‌شود) ارزش نهایی (*Marginal value*) این منبع را می سنجند که مبین آهنگ افزایش *Z* در اثر افزایش ملایم مقدار موجود این منبع (b_i) است. توجه شود که میزان افزایش در b_i باید به قدری کافی کوچک باشد که مجموعه متغیرهای فعلی همچنان بهینه باقی بماند زیرا به مجرد اینکه مجموعه متغیرهای اساسی تغییر کند، ارزش نهایی نیز تغییر می کند. روش سیمپلکس قیمت سایه را با y_i^* که معرف ضریب متغیر لنگی *i*-ام در معادله صفر جدول نهایی سیمپلکس است، مشخص می سازد.

برای نمونه در مثال (*P*۱)، قیمت سایه منبع ۱ برابر ضریب متغیر x_3 معادله صفر (برابر با صفر)، قیمت سایه منبع ۲ برابر ضریب متغیر x_4 در معادله صفر (برابر ۱.۵) و قیمت سایه منبع ۳ برابر ضریب متغیر x_5 در معادله صفر(برابر ۱) است. تعبیر دیگر قیمت سایه منبع ۱ این است که حداکثر قیمتی که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از این منبع مقرون به صرفه است. به تعبیر دیگر، حداکثر منبعی که برای افزایش یک واحد از منبع i می‌توان پرداخت کرد.

تمرین: کارخانه‌ای تولید یکی از محصولات غیرسودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است که در این صورت ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه‌ای آزاد کرده است. از این ظرفیت ایجاد شده برای تولید سه محصول ۱،۲، و ۳ استفاده می‌شود. ظرفیت آزاد ماشین الات مورد نیاز این سه محصول به صورت زیر است.

نوع ماشین	زمان موجود (ماشین ساعت در هفته)
فرز	500
تراش	350
سنگ	150

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید سه محصول به صورت زیر است:

نوع ماشین	محصول 1	محصول 2	محصول 3
فرز	9	3	5
تراش	5	4	0
سنگ	3	0	2

دپارتمان فروش با مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که تولید محصولات ۱ و ۲ به هر میزان در بازار خواهان دارد ولی روش محصول ۳ در هر هفته بیش از ۲۰ واحد مسیر نیست. سود محصول‌های ۱، ۲، و ۳ به ترتیب برابر با ۵۰، ۲۰، و ۲۵ است.

الف) مدل برنامه‌ریزی خطی فوق را با هدف حداکثر کردن سود فرمول بندی کنید.

ب)مسئله را با روش سیمپلکس حل نمایید.

حل: x_i را تعداد محصول نوع i در هر هفته در نظر بگیرید($i=1,2,3$).

مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله به صورت زیر می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 500 \\
&\quad (2)\quad 5x_1 + 4x_2 \le 300 \\
&\quad (3)\quad 3x_1 + 2x_3 \le 150 \\
&\quad (4)\quad x_3 \le 20 \\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,3.
\end{aligned}
$$

محدودیت ۱ همان محدودیت ظرفیت فرز، محدودیت۲ همان محـدودیت تـراش، محـدودیت ۳ همـان محدودیت سنگ، محدودیت ۴ همان محدودیت کشش بازار است.

ب) برای حل مدل فوق، ابتدا مدل را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 500 \\
&\quad (2)\quad 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 300 \\
&\quad (3)\quad 3x_1 + 2x_3 + x_6 = 150 \\
&\quad (4)\quad x_3 + x_7 = 20 \\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,7.
\end{aligned}
$$

حل مدل فوق با استفاده روش سیمپلکس اولیه به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	1	-50	-20	-25	0	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	9	3	0	1	0	0	0	500	500/9
X_5	2	0	5	4	0	0	1	0	0	350	350/5
X_6	3	0	3	0	2	0	0	1	0	150	150/3 کمینه
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	-20	-8.33	0	0	16.66	0	2500	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	0	3	-1	1	0	-3.33	0	50	50/3 کمینه
X_5	2	0	0	4	-3.33	0	1	-1.667	0	100	100/4
X_1	3	0	1	0	0.667	0	0	0.33	0	50	
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	1.66	6.66	0	-3.3	0	2833.3	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-0.33	0.33	0	-1	0	16.6	
X_5	2	0	0	0	-2	-1.33	1	2.33	0	33.3	33.3/2.33 کمینه
X_1	3	0	1	0	0.66	0	0	0.33	0	50	50/0.33
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	-1.19	4.76	1.428	0	0	2880.9	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-1.19	-0.238	0.428	0	0	30.9	
X_6	2	0	0	0	-0.85	-0.57	0.428	1	0	14.28	
X_1	3	0	1	0	0.95	0.19	-0.142	0	0	45.23	45.23/0.95
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	20/1 کمینه
Z	0	1	0	0	0	4.76	1.42	0	1.19	2904	جدول بهینه
X_2	1	0	0	1	0	-0.238	0.428	0	1.195	54.76	
X_6	2	0	0	0	0	-0.57	0.42	1	0.85	31.42	
X_1	3	0	1	0	0	0.19	-0.142	0	-0.95	26.19	
X_3	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	

جواب بهینه به صورت $(x_1, x_2, x_3) = (26.19, 54.76, 20)$ و $Z^* = 2904.76$ می‌شود. میزان کمبـود و هزینه‌های سایه به صورت زیر می‌شود.

هزینه سایه	میزان کمبود یا مازاد	محدودیت
4.76	0	1
1.428	0	2
0	31.42	3
1.19	0	4

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**