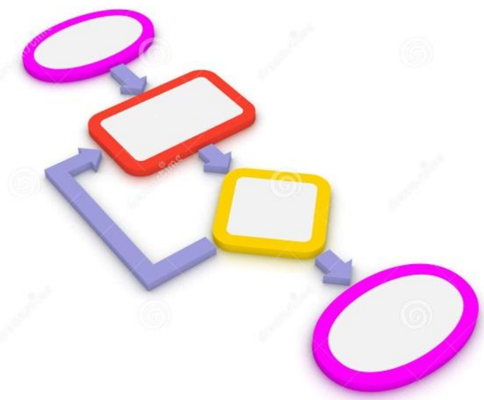
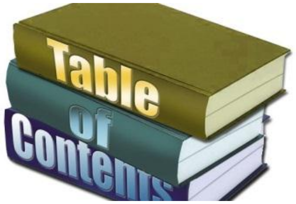
به نام خدا

درس ۲: روش سیمپلکس اولیه



فهرست مطالب



مقدمات روش سیمپلکس اولیه

روش سیمپلکس اولیه، الگوریتمی فرایندی است که در آن یک رویه نظام گرا آنقدر تکرار می گردد تا سرانجام به جواب مطلوب یا بهینه برسد. مجموعه قدم هایی که در چنین فرآیندی هر دفعه تجدید می شود را یک تکرار می نامند.

فرآیند را با یک مثال توضیح می دهیم.

$$
\begin{aligned}
&(P1)\quad Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad x_1 \leq 4 \\
&\qquad (2)\quad 2x_2 \leq 12 \\
&\qquad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&\qquad\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

مقدمات روش سیمپلکس اولیه

با تعریف سه متغیر می توان مدل قبلی را به صورت زیر نوشت.

متغیرهای مازاد یا لنگی

$$
\begin{aligned}
&(P1-1)\quad Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad = 4 \\
&\qquad (2)\quad \qquad 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 12 \\
&\qquad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 18 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

مقدمات روش سیمپلکس اولیه

در این صورت می توان در هر مرحله برای دو متغیر مقدار دلخواهی قرار داد و دستگاه سه معادله، سه مجهول را حل کرد. در روش سیمپلکس این دو متغیر اضافی برابر صفر در نظر گرفته می شوند.

متغیرهایی که برابر صفر در نظر گرفته می شوند، متغیرهای غیر اساسی و سایر آن ها متغیرهای اساسی نامیده می شوند.

به جوابی که تمامی متغیرهای غیراساسی برابر صفر باشند، جواب اساسی می نامند.

جواب اساسی که در آن متغیرهای اساسی نامنفی هستند را جواب اساسی موجه می نامند.

مقدمات روش سیمپلکس اولیه

ساده تر است که تابع هدف نیز همزمان و همردیف با سایر محدودیت ها برخورد شود.

$$
\begin{array}{l}
(P1-2)\ \ Max\ \ Z \\
s.t. \\
\qquad (0)\ Z - 3x_1 - 5x_2 \qquad\qquad = 0 \\
\qquad (1)\qquad x_1 \qquad + x_3 \qquad\quad = 4 \\
\qquad (2)\qquad\quad 2x_2 \qquad + x_4 \quad = 12 \\
\qquad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_5 = 18 \\
\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

معادله صفر که همان تابع هدف است و جز محدودیت ها مدل محسوب می شود و چون معادله صفر به صورت تساوی است دیگر نیاز به اضافه کردن متغیر لنگی نمی باشد.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

روش سیمپلکس در هر مرحله به دنبال یافتن جواب های اساسی موجه است که هر جواب از جواب قبلی بدتر نباشد تا سرانجام یک جواب اساسی موجه بهینه یافته شود.

برای تبدیل از یک جواب اساسی موجه به جواب اساسی موجه دیگر، کافی است یک متغیر اساسی به متغیر غیر اساسی (متغیر اساسی خروجی) و در مقابل یک متغیر غیراساسی به متغیر اساسی (متغیر اساسی ورودی) تبدیل شود.

اگر یک جواب اساسی موجه از تمام جواب های اساسی موجه مجاور بهتر بود، آن جواب، جواب بهینه است و الگوریتم در این مرحله به پایان می رسد.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام ابتدایی

یک جواب اساسی موجه پیدا کنید.

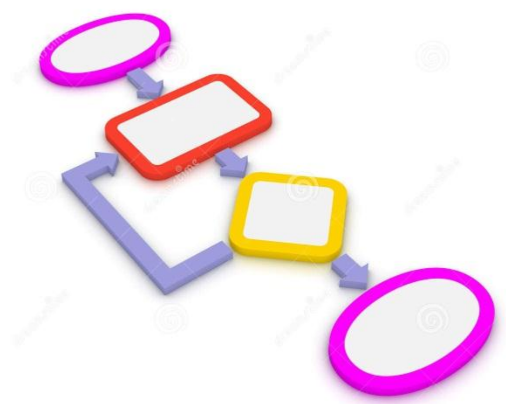
گام تکرار

به یک جواب اساسی موجه مجاور حرکت کنید.

گام توقف

اگر جواب اساسی موجه مجاور بهتری وجود ندارد، توقف کنید، وگرنه برو گام تکرار.

در این شکل، خلاصه مراحـــــــــل روش سیمپلکس به صورت کلـــی آورده شـــده است.



دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام ابتدایی

جدول سیمپلکس مثال (P1-2) به صورت جدول زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18

چون هر معادله شامل یک متغیر اساسی با ضریب +۱ است، لذا مقدار هر متغیر اساسی برابر با عدد ثابت سمت راست معادله خواهد بود. جواب موجه اساسی جدول فوق برابر زیر می شود:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$$

که از این به بعد به صورت $(0,0,4,12,18)$ نمایش داده می شود.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام تکراری

انتخاب متغیر ورودی به پایه

متغیری که دارای بزرگترین ضریب منفی در معادله صفر است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب کنید. افزایش مقدار این متغیر غیراساسی منجر به تندترین اهنگ رشد مقدار تابع هدف می شود. مستطیلی به دور ستونی که زیر این متغیر بکشید و آن را ستون لولا بنامید. در این مثال، بزرگترین ضریب منفی (۵-) بوده و مربوط به متغیر است و لذا به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می شود.

گام تکراری

انتخاب متغیر خروجی از پایه

الف) ضرایب مثبت ستون لولا را در نظر بگیرید

ب) اعداد سمت راست را به این ضرایب تقسیم کنید

پ) سطری را انتخاب کنید که نسبتی که برای آن در قسمت (ب) بدست آمده است، کوچکترین باشد.

ت) متغیر اساسی این معادله، متغیر اساسی خروجی است.

مستطیلی به دور این معادله بکشید و آن را سطر لولا بنامید. عددی که در هر دو مستطیلی قرار می گیرد را عدد لولا می نامیم.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام تکراری

نتایج بالا در شکل زیرآمده است.

متغیر ورودی

متغیر اساسی (0)	شماره معادله (1)	Z (2)	X_1 (3)	X_2 (4)	X_3 (5)	X_4 (6)	X_5 (7)	طرف سمت راست (8)	آزمون نسبت
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	6=12/2 کمینه
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	9=18/2
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	

متغیر خروجی

سطر لولا

ستون لولا

عدد لولا

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام تکراری

تعیین جواب اساسی جدید

الف) در ستون (۰)، متغیر x_4 را حذف و به جای آن متغیر x_2 را قرار دهید.

ب) برای تبدیل ضریب متغیر x_2 به یک، تمام سطر لولا را بر عدد لولا تقسیم نمایید.

پ) برای اینکه متغیر اساسی x_2 از سایر معادلات حذف شود، هر سطر (شامل سطر مربوط به معادله صفر) به استثنای سطر لولا به صورت زیر تغییر نماید.

سطر جدید(به جز سطر لولا) = سطر قدیم − سطر لولای جدید × ضریب ستون لولا

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام تکراری

پس از ایجاد جدول سیمپلکس جدید، به **گام توقف** می رویم. در صـورت ایـن که شرط توقف برقرار باشد الگوریتم متوقف می شود و در غیر این صورت بـه **گام تکرار** می رویم. این روند تا برآورده شدن شرط توقـف ادامـه مـی دهـیم. جدول کامل سمپلکس به صورت زیر می شود.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

گام توقف

اگر و فقط اگر تمام ضرایب معادله صفر مقادیر غیرمنفی باشد، آن وقت جواب اساسی موجه فعلی، جواب بهینه است و در این صورت توقف کنید. در غیر این صورت برای پیدا کردن جواب اساسی موجه مجاور به گام تکراری بروید.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

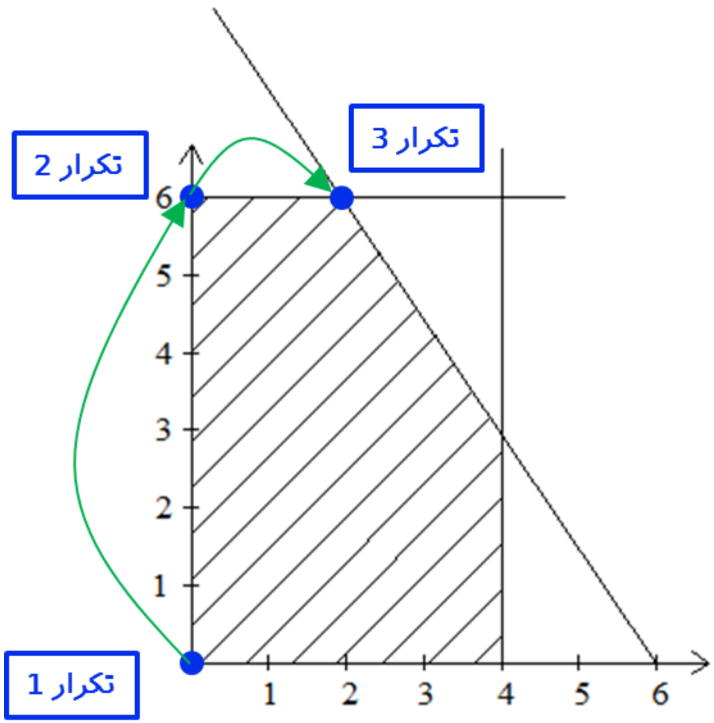
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2 کمینه
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	9=18/2
Z	0	1	-3	0	0	2.5	0	30	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_5	3	0	3	0	0	-1	1	6	2=6/3 کمینه
Z	0	1	0	0	0	1.5	1	36	
X_3	1	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_1	3	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	

در جدول فوق، جواب اساسی موجه $(2,6,2,0,0)$ با $Z=36$ شرط توقف را برآورده می سازد و لذا این جواب بهینه است.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

نکته:

در هر گام از گام تکرار الگوریتم سیمپلکس، یکی از نقاط گوشه محدوده امکان پذیر را مورد آزمون قرار می دهد.



قیمت های سایه

روش سمپلکس علاوه بر جواب بهینه اطلاعات با ارزش دیگری تولید می نماید. قیمت سایه منبع، **ارزش نهایی** یک منبع را می سنجند که مبین آهنگ افزایش Z در اثر افزایش ملایم مقدار موجود یک منبع است.

توجه شود که میزان افزایش در سمت باید به **قدری کافی کوچک** باشد که مجموعه متغیرهای فعلی همچنان بهینه باقی بماند زیرا به مجرد اینکه مجموعه متغیرهای اساسی تغییر کند، ارزش نهایی نیز تغییر می کند.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2 کمینه
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	9=18/2
Z	0	1	-3	0	0	2.5	0	30	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_5	3	0	3	0	0	-1	1	6	2=6/3 کمینه
Z	0	1	0	0	0	1.5	1	36	
X_3	1	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_1	3	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

شرایط مشابه در هنگام انتخاب متغیر اساسی ورودی

فرض کنید دو یا چند متغیر غیراساسی دارای بزرگترین ضریب منفی و شرایط یکسانی داشته باشند. مثلا اگر تابع هدف به $Z=3x_1+3x_2$ تغییر کند، آنگاه باید متغیر اساسی ورودی را به دلخواه انجام داد. روش ساده ای برای پیش بینی بهترین انتخاب وجود ندارد که کدام انتخاب زودتر به جواب می رسد.
در این مسئله اگر x_1 انتخاب شود بعد از سه تکرار به جواب بهینه می رسیم در صورتیکه با انتخاب x_2 پس از دو تکرار به جواب بهینه میرسم.

متغیر اساسی تبهگن

مادامی که متغیر اساسی تبهگن وجود دارد و به عنوان متغیر اساسی خروجی انتخاب می شود و متغیر اساسی ورودی هم برابر صفر خواهد شد و لذا مقدار Z تغییر نخواهد کرد.

در صورتیکه حالت تباهیدگی رخ دهد می توان با انتخاب متغیرهای اساسی خروجی دیگر از آن ها رهایی یافت و بدون نگرانی از وجود متغیرهای تبهگن به کار خود ادامه داد.

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

Z نامحدود است

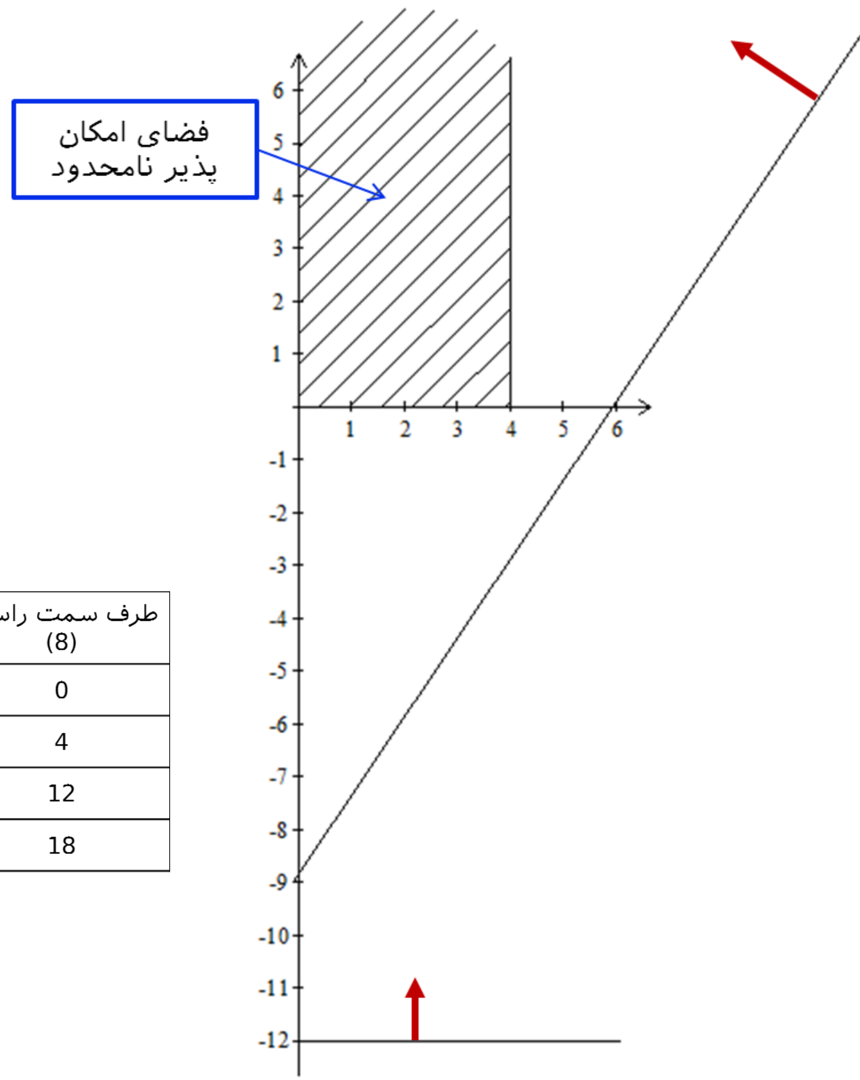
حالتی را در نظر بگیرید که هیچکدام از متغیرهای اساسی شرایط خروج را نداشته باشند و مقدار متغیرهای اساسی ورودی می تواند تا بی نهایت افزایش یابد بدون آنکه هیچ یک از متغیرهای اساسی دیگر منفی شوند. این حالت وقتی اتفاق می افتد که تمام ضرایب ستون لولا(به استثنای معادله صفر) در جدول سیمپلکس منفی یا صفر باشد(نامثبت باشند).

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

$s.t.$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x_1 \le 4 \\
&(2) \quad -x_2 \le 12 \\
&(3) \quad 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\
&\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$



متغیر اساسی (0)	شماره معادله (1)	Z (2)	X_1 (3)	X_2 (4)	X_3 (5)	X_4 (6)	X_5 (7)	طرف سمت راست (8)
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	-2	0	1	0	12
X_5	3	0	3	-2	0	0	1	18

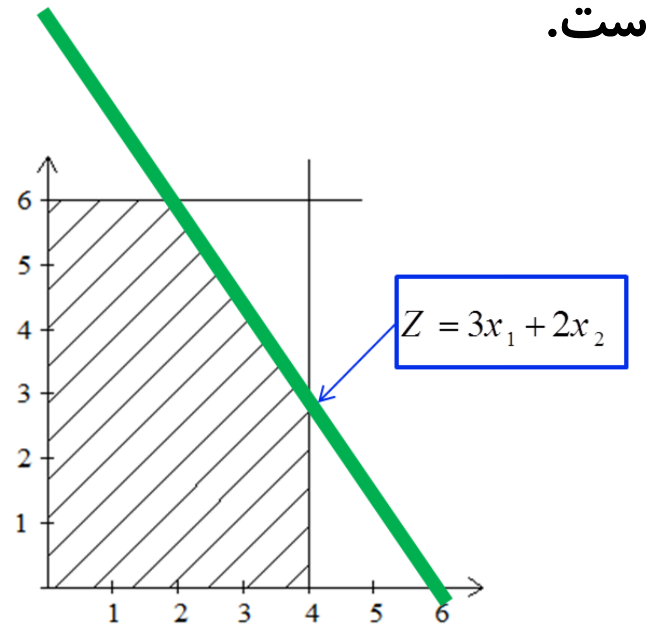
جواب بهینه چندگانه

وقتی دستکم ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در معادله صفر آخرین جدول برابر صفر باشد، جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت. برای رسیدن به جواب بهینه دیگر، می توان متغیرهای اساسی که ضریب صفر دارد را به عنوان متغیرهای اساسی ورودی انتخاب کنیم. انتخاب کدام جواب مربوط به عوامل مختلف است.

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$s.t.$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x_1 \leq 4 \\
&(2) \quad 2x_2 \leq 12 \\
&(3) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$



حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

جواب بهینه چندگانه

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-2	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1کمینه
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	6=18/3
Z	0	1	0	-2	3	0	0	12	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2
X_5	3	0	0	2	-3	0	1	6	3=6/2 کمینه
Z	0	1	0	0	0	0	1	18	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_4	2	0	0	0	3	1	-1	6	2=6/3 کمینه
X_2	3	0	0	1	-1.5	0	0.5	3	
Z	0	1	0	0	0	0	1	18	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	
X_3	2	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	3	0	0	1	0	0.5	0	6	

در جدول فوق، دو جواب اساسی موجه $(4,3,0,6,0)$ و $(2,6,2,0,0)$ جواب بهینه هستند که در آن ها $Z=18$ است.

محدودیت های تساوی

. هر محدودیت به شکل تساوی ($a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$) با یک جفت محدودیت نامساوی زیر قابل جایگزین است.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$$

ولی به جای اضافه کردن تعداد محدودیت ها که باعث دشوار حل می شود، می توان از روش متغیرهای مصنوعی (Artificial variable) استفاده کرد.

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

محدودیت های تساوی

. هر محدودیت به شکل تساوی ($a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$) با یک جفت محدودیت نامساوی زیر قابل جایگزین است.

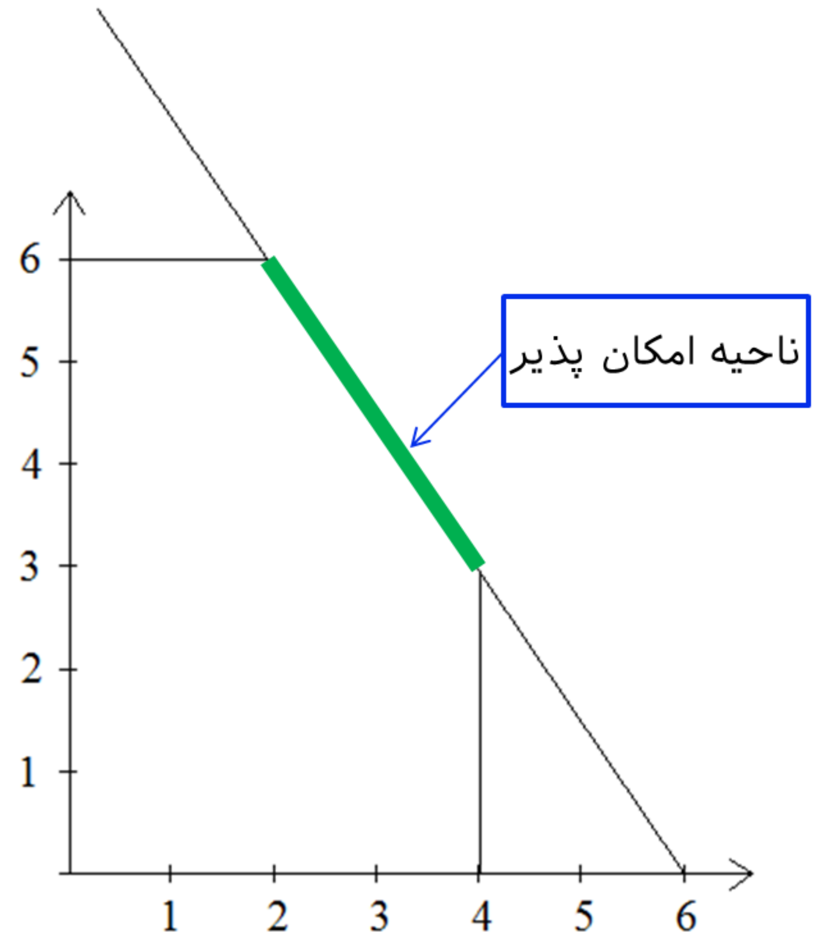
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

ولی به جای اضافه کردن تعداد محدودیت ها که باعث دشوار حل می شود، می توان از روش متغیرهای مصنوعی (Artificial variable) استفاده کرد.

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

$$
\begin{array}{llll}
 & Max\ Z & & \\
s.t. & & & \\
 & (0)\ Z - 3x_1 - 5x_2 & & = 0 \\
 & (1)\quad x_1 & + x_3 & = 4 \\
 & (2)\quad 2x_2 & + x_4 & = 12 \\
 & (3)\quad 3x_1 + 2x_2 & & = 18 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & &
\end{array}
$$



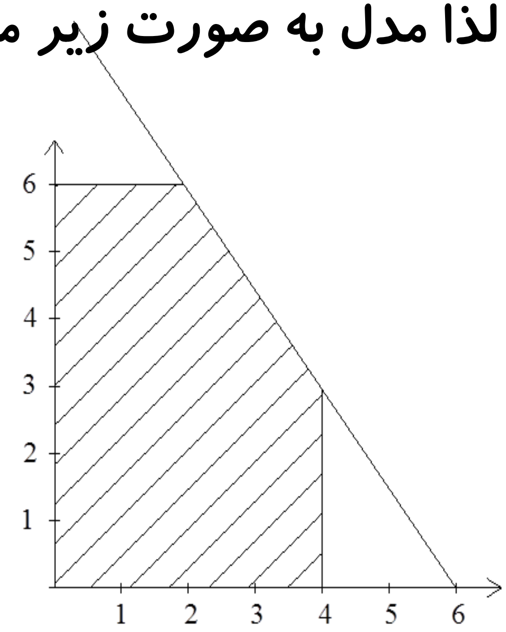
محدودیت های تساوی

متاسفانه این معادلات جواب اساسی موجه مشخصی ندارند زیرا معادله (۳) دارای متغیر لنگی نیست. این مشکل با معرفی متغیر مصنوعی $\bar{x}_5$ برطرف می شود که در این صورت معادله (۳) به صورت زیر می شود.

$$3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

و لذا مدل به صورت زیر می شود.

$$
\begin{array}{lllllll}
 & Max\ Z & & & & & \\
s.t. & & & & & & \\
 & (0) Z & -3x_1 & -5x_2 & & & = 0 \\
 & (1) & x_1 & & +x_3 & & = 4 \\
 & (2) & & 2x_2 & & +x_4 & = 12 \\
 & (3) & 3x_1 & +2x_2 & & +\bar{x}_5 & = 18 \\
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



محدودیت های تساوی

متاسفانه چنین تضمینی وجود ندارد که جواب بهینه مسئله تغییر شکل یافته حتما در مسئله اصلی صدق نماید. برای ایجاد چنین تضمینی، از روش M بزرگ (Big-M method) استفاده می کنیم. در این روش به نقاط خارج از نقطه موجه مسئله اصلی جریمه زیادی (M) تعلق می گیرد. برای ایجاد چنین جریمه ای، تابع هدف به صورت $Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0$ تغییر می کند.

-3	-5	0	0	M	0	A
3	2	0	0	1	18	B

(-3M-3)	(-2M-5)	0	0	1	18	A+(-M)B

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

محدودیت های تساوی

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	$\bar{X}_5$	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3M-3	-2M-5	0	0	0	-18M	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1کمینه
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	
$\bar{X}_5$	3	0	3	2	0	0	1	18	6=18/3
Z	0	1	0	-2M-5	3M+3	0	0	-6M+12	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2
$\bar{X}_5$	3	0	0	2	-3	0	1	6	3=6/2 کمینه
Z	0	1	0	0	-4.5	0	M+2.5	27	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_4	2	0	0	0	3	1	-1	6	2=6/3 کمینه
X_2	3	0	0	1	-1.5	0	0.5	3	
Z	0	1	0	0	0	1.5	M+1	36	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	
X_3	2	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	3	0	0	1	0	0.5	0	6	

روش فاز ۱ –فاز ۲

به دلیل این که محاسبات با پارامترهای M در مدل های بزرگ بسیار دشوار می شود، می تواند منجر به خطای محاسباتی شود. در این موارد روش فاز ۱ – فاز ۲ توصیه می شود. این روش به این صورت انجام می شود که در فاز ۱ به دنبال کمینه کردن مقدار مجموع متغیرهای مصنوعی هستیم. در صورتیکه مدل به جای رسید که مجموع متغیرهای مصنوعی برابر صفر شود. جوابی که منجر به این جواب شود به عنوان جواب اولیه مدل مورد استفاده قرار می گیرد.

روش فاز ۱–فاز ۲

مثال:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 300\\
&\quad (2)\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 300\\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 300\\
&\quad (2)\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 300\\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,6.
\end{aligned}$$

در روش فاز ۱–فاز۲، ابتدا مدلی را حل می کنیم که به دنبال کمینه کردن تابع هدف $w = x_5 + x_6$ با محدودیت های مدل اصلی هستیم.

$$\begin{aligned}
&Min\, W = x_5 + x_6\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 300\\
&\quad (2)\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 300\\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,6.
\end{aligned}$$

روش فاز ۱ –فاز ۲

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	طرف سمت راست	
W		0	-1	0	0	0	0	1	1	0	
Z	0	1	0	4	2	3	5	0	0	0	
X_5	1	0	0	2	3	4	2	1	0	300	
X_6	2	0	0	8	1	1	5	0	1	300	
W		0	-1	-10	-4	-5	-7	0	0	-600	جدول غیر بهینه (آغاز فاز 1)
Z	0	1	0	-4	-2	-3	-5	0	0	0	
X_5	1	0	0	2	3	4	2	1	0	300	300/2=150
X_6	2	0	0	8	1	1	5	0	1	300	300/8=75 کمینه
W		0	-1	0	-2.75	-3.75	-0.75	0	1.25	-225	جدول غیر بهینه (فاز 1)
Z	0	1	0	0	-1.5	-2.5	-2.5	0	0.5	150	
X_5	1	0	0	1	2.75	3.75	0.75	1	-0.25	225	60=225/3.75 کمینه
X_1	2	0	0	0	0.125	0.125	0.625	0	0.125	375	3000=375/0.125
W		0	-1	0	0	0	0	1	1	0	جدول بهینه (پایان فاز 1)
Z	0	1	0	0	0.333	0	-2	0.666	0.333	300	
X_3	1	0	0	0	0.733	1	0.2	0.266	-0.067	60	
X_1	2	0	0	1	0.033	0	0.6	-0.033	0.133	30	
Z	0	1	0	0	0.333	0	-2			300	جدول غیربهینه (آغاز فاز 2)
X_3	1	0	0	0	0.733	1	0.2			60	300=60/0.2
X_1	2	0	0	1	0.033	0	0.6			30	50=30/0.6 کمینه
Z	0	1	0	3.33	0.44	0	0			400	جدول بهینه(پایان فاز 2)
X_3	1	0	0	-0.333	0.722	1	0			50	
X_4	2	0	0	1.666	1.666	0	1			50	

تمرین ها

تمرین:

کارخانه ای تولید یکی از محصولات غیرسودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است که در این صورت ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه ای آزاد کرده است. از این ظرفیت ایجاد شده برای تولید سه محصول ۱،۲، و ۳ استفاده می شود. ظرفیت آزاد ماشین الات مورد نیاز این سه محصول به صورت زیر است:

نوع ماشین	زمان موجود (ماشین ساعت در هفته)
فرز	500
تراش	350
سنگ	150

تمرین ها

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید سه محصول به صورت زیر است:

نوع ماشین	محصول 1	محصول 2	محصول 3
فرز	9	3	5
تراش	5	4	0
سنگ	3	0	2

دپارتمان فروش با مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که تولید محصولات ۱ و ۲ به هر میزان در بازار خواهان دارد ولی روش محصول ۳ در هر هفته بیش از ۲۰ واحد مسیر نیست.
سود محصول های ۱، ۲، و ۳ به ترتیب برابر با ۵۰، ۲۰، و ۲۵ است.

الف) مدل برنامه ریزی خطی فوق را با هدف حداکثر کردن سود فرمول بندی کنید.

ب)مسئله را با روش سیمپلکس حل نمایید.

حل:الف)

x_i را تعداد محصول نوع i در هر هفته در نظر بگیرید($i=1,2,3$).

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z=50x_1+20x_2+25x_3\\
&s.t.\\
&\qquad (1)\quad 9x_1+3x_2+5x_3\le 500\\
&\qquad (2)\quad 5x_1+4x_2\qquad\ \ \le 300\\
&\qquad (3)\quad 3x_1\qquad\ +2x_3\le 150\\
&\qquad (4)\qquad\qquad\qquad\ \ x_3\le 20\\
&\qquad\qquad x_i\ge 0\quad i=1,\dots,3.
\end{aligned}
$$

محدودیت ۱ همان محدودیت ظرفیت فرز، محدودیت ۲ همان محدودیت تراش، محدودیت ۳ همان محدودیت سنگ، محدودیت ۴ همان محدودیت کشش بازار است.

تمرین ها

ب) برای حل مدل فوق، ابتدا مدل را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
&s.t. \\
&(1)\quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 500 \\
&(2)\quad 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 300 \\
&(3)\quad 3x_1 + 2x_3 + x_6 = 150 \\
&(4)\quad x_3 + x_7 = 20 \\
&\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,7.
\end{aligned}
$$

حل مدل فوق با استفاده روش سیمپلکس اولیه به صورت زیر می شود.

تمرین ها

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	1	-50	-20	-25	0	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	9	3	0	1	0	0	0	500	500/9
X_5	2	0	5	4	0	0	1	0	0	350	350/5
X_6	3	0	3	0	2	0	0	1	0	150	150/3 کمینه
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	-20	-8.33	0	0	16.66	0	2500	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	0	3	-1	1	0	-3.33	0	50	50/3 کمینه
X_5	2	0	0	4	-3.33	0	1	-1.667	0	100	100/4
X_1	3	0	1	0	0.667	0	0	0.33	0	50	
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	1.66	6.66	0	-3.3	0	2833.3	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-0.33	0.33	0	-1	0	16.6	
X_5	2	0	0	0	-2	-1.33	1	2.33	0	33.3	33.3/2.33 کمینه
X_1	3	0	1	0	0.66	0	0	0.33	0	50	50/0.33
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	-1.19	4.76	1.428	0	0	2880.9	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-1.19	-0.238	0.428	0	0	30.9	
X_6	2	0	0	0	-0.85	-0.57	0.428	1	0	14.28	
X_1	3	0	1	0	0.95	0.19	-0.142	0	0	45.23	45.23/0.95
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	20/1 کمینه
Z	0	1	0	0	0	4.76	1.42	0	1.19	2904	جدول بهینه
X_2	1	0	0	1	0	-0.238	0.428	0	1.195	54.76	
X_6	2	0	0	0	0	-0.57	0.42	1	0.85	31.42	
X_1	3	0	1	0	0	0.19	-0.142	0	-0.95	26.19	
X_3	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	

تمرین ها

جواب بهینه به صورت $(x_1, x_2, x_3) = (26.19, 54.76, 20)$ و $Z^* = 2904.76$ می شود. میزان کمبـود و هزینه های سایه به صورت زیر می شود.

محدودیت	میزان کمبود یا مازاد	هزینه سایه
1	0	4.76
2	0	1.428
3	31.42	0
4	0	1.19

تمرین ها

تمرین: مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل نمایید.

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 30 \\
&\qquad (2)\quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40 \\
&\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

حل: ابتدا مدل فوق را به صورت استاندارد تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned} &Max\ \ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ &s.t. \\ &(1)\quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 30 \\ &(2)\quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 40 \\ &\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,5. \end{aligned}$$

فرایند حل به روش سیمپلکس به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-4	-3	-6	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	3	2	3	1	0	30	30/3 کمینه
X_5	2	0	2	2	3	0	1	40	40/3
Z	0	1	2	1	0	2	0	60	جدول بهینه
X_3	1	0	1	0.66	1	0.333	0	10	
X_5	2	0	-1	0	0	-1	1	10	

تمرین ها

تمرین: مسئله زیر مفروض است:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4\\
&s.t.\\
&\qquad (1)\quad 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 50\\
&\qquad (2)\quad 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \le 40\\
&\qquad (3)\quad 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 20\\
&\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

با استفاده از روش سیمپلکس نشان دهید که مدل فوق جواب نامحدود دارد.

حل: شکل استاندارد مدل فوق به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
& s.t. \\
& \quad (1) \quad 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 50 \\
& \quad (2) \quad 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + x_6 = 40 \\
& \quad (3) \quad 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_7 = 20 \\
& \quad\quad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7.
\end{aligned}
$$

تمرین ها

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-1	-5	-4	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	3	-3	2	8	1	0	0	50	25=50/2
X_6	2	0	5	6	-4	-4	0	1	0	40	
X_7	3	0	4	-2	1	3	0	0	1	20	20=20/1 کمینه
Z	0	1	17	-11	0	11	0	0	5	100	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	-5	1	0	2	1	0	-2	10	10/1 کمینه
X_6	2	0	21	-2	0	8	0	1	4	120	
X_3	3	0	4	-2	1	3	0	0	1	20	
Z	0	1	-38	0	0	33	11	0	-17	210	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	-5	1	0	2	1	0	-2	10	
X_6	2	0	11	0	0	12	2	1	0	140	140/11 کمینه
X_3	3	0	-6	0	1	7	2	0	-3	40	
Z	0	1	0	0	0	74.45	17.9	3.45	-17	693	جواب بینهایت
X_2	1	0	0	1	0	7.45	1.9	0.45	-2	73.63	
X_1	2	0	1	0	0	1.09	0.18	0.09	0	12.72	
X_3	3	0	0	0	1	13.54	3.09	0.545	-3	116.36	

در جدول فوق، ستون زیر متغیر x_7 ، نامثبت هستند و لـذا شـروط نامحـدود بودن برقرار می شود و بـا افـزایش دو متغیـر x_2 و x_3 مقـدار تـابع هـدف بـه سمت بی نهایت می رود.

تمرین ها

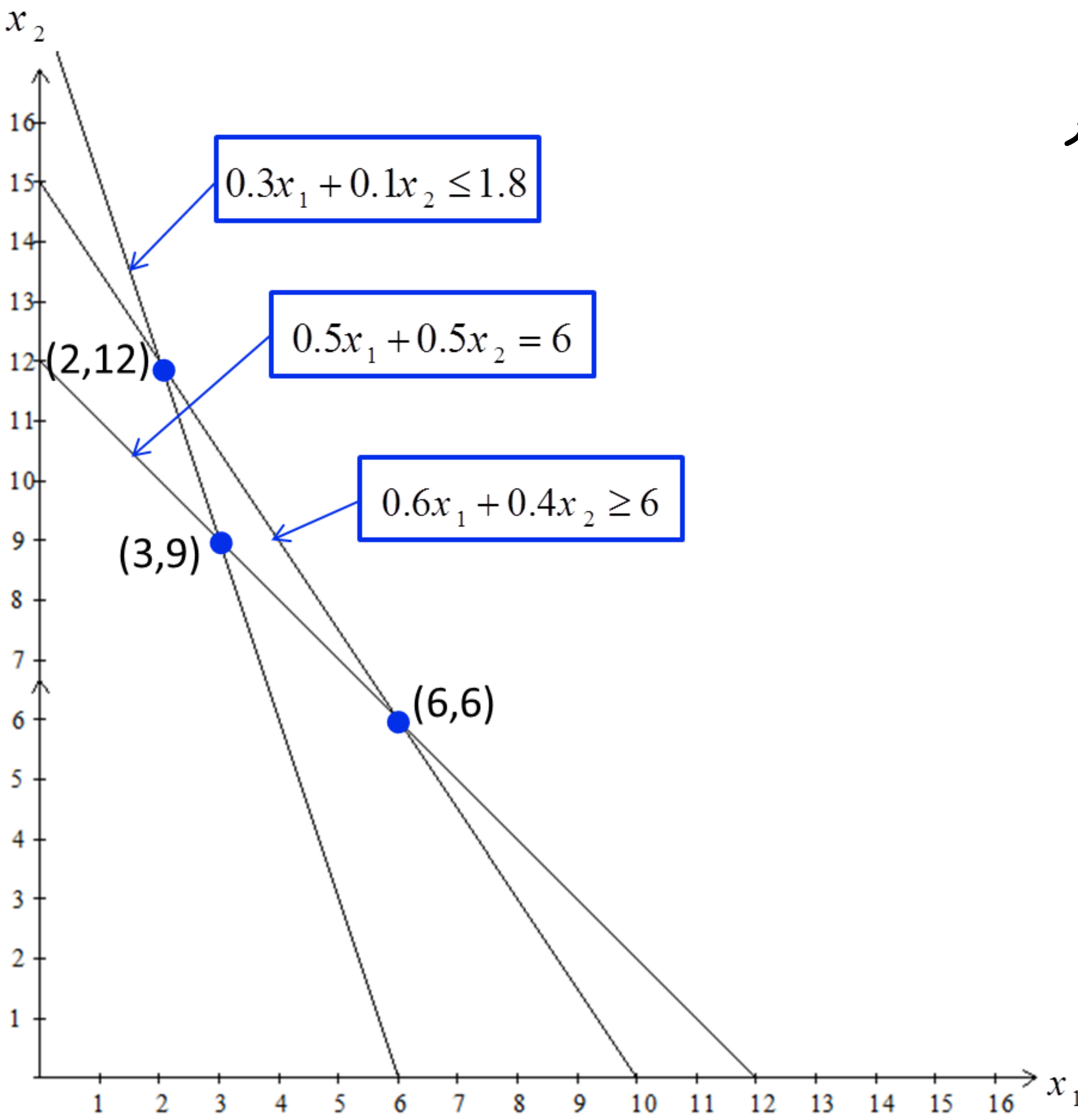
تمرین: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 0.4x_1 + 0.5x_2\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \le 1.8\\
&\quad (2)\quad 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6\\
&\quad (3)\quad 0.6x_1 + 0.4x_2 \ge 6\\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

الف) مدل فوق را به روش ترسیمی حل نمایید.

ب)مدل فوق را به روش M–بزرگ حل نمایید.

تمرین ها



در شکل ذیل، فضای امکان پذیر تهی است و لذا مدل جواب ندارد.

تمرین ها

ب) برای حل مدل فوق به روش سیمپلکس، باید مدل برنامه ریزی خطـی را از **min** به **Max** و همچنین با اضافه کردن متغیری کمبود، مازاد و مصنوعی، بـه فرم استاندارد تبدیل کرد. فرم استاندارد به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned}
&Max\ -Z+0.4x_1+0.5x_2+Mx_4\quad +Mx_6\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 0.3x_1+0.1x_2+x_3 = 1.8\\
&\quad (2)\quad 0.5x_1+0.5x_2\quad +x_4 = 6\\
&\quad (3)\quad 0.6x_1+0.4x_2\quad -x_5+x_6 = 6\\
&\qquad\quad x_i \ge 0\quad i=1,6.
\end{aligned}$$

تمرین ها

همان طور که در آموزش روش M – بزرگ بیان شد، قبل از ورود به جدول سیمپلکس باید مقدار ضریب متغیرهای x_4 و x_6 در تابع هدف صفر کرد. پس از اعلام این تغییرات ، جدول سیمپلکس به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	طرف سمت راست	
Z	0	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	1.8	1.8/0.3 کمینه
X_4	2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6	6/0.5
X_6	3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6	6/0.5
Z	0	1-	0	-0.533M +0.367	3.67M-1.33	0	M	0	-5.4M-2.4	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0.33	3.33	0	0	0	6	6/0.33
X_4	2	0	0	0.33	-1.667	1	0	0	3	3/0.33 کمینه
X_6	3	0	0	0.2	-2	0	-1	1	2.4	2.4/0.2
Z	0	-1	0	0	M+0.5	1.6M-1.1	M	0	-0.6M-5.7	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	5	-1	0	0	3	
X_2	2	0	0	1	-5	3	0	0	9	
X_6	3	0	0	0	-1	-0.6	-1	1	0.6	

تمرین ها

در تابلو آخر، با توجه به این که M مقدار بزرگی است، شرط بهینگی برقرار است ولی $x_6 = 0.6$ است که بزرگتر از صفر است که به این معنا است که مدل اصلی فاقد جواب است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com