

# درس ۷: مسئله درخت پوشش کمینه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



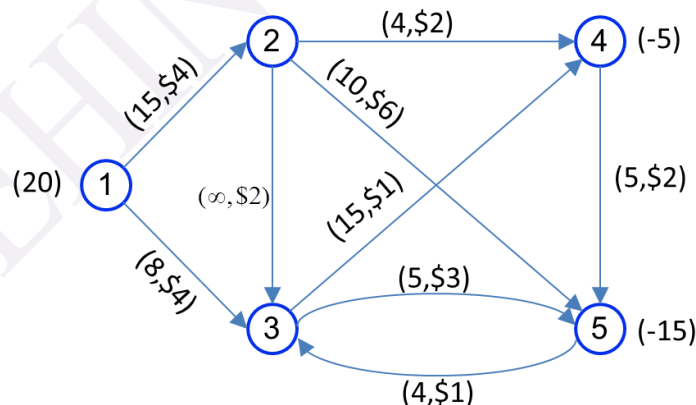
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله درخت پوشش کمینه خواهیم پرداخت.

## مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره  $i$  به گره  $j$  را به صورت  $i-j$  نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۲-۴)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت  $\infty$  به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل

پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در آن برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت - نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

$x_{ij}$ : تعداد واحدهای حمل شده از گره  $i$  به گره  $j$  با استفاده از کمان  $i-j$  است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53} \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & x_{12} + x_{13} = 20 \\ (2) \quad & -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0 \\ (3) \quad & -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0 \\ (4) \quad & -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5 \\ (5) \quad & -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15 \\ & x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4. \end{aligned}$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره ۱ ( $x_{12} + x_{13}$ )، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ ( $x_{12}$ ) برابر جریان خروجی از گره ۲ ( $x_{23} + x_{24} + x_{25}$ ) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان  $x_{ij}$  در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقا در

دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب +۱ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و ۱-  
مربطه به گره ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه  
را به  $n$  گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

*s t.*

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبدیل  
به فرم‌های ساده تری است که در ادامه مسئله درخت پوشش کمینه که حالت خاصی از مسئله جریان  
کمینه در شبکه را بیان می‌کنیم.

### مسئله درخت پوشش کمینه Minimum spanning tree

در اینجا اتصال گره‌های مختلف یک شبکه به یکدیگر مدنظر است. به طوری که کمترین فاصله در این  
اتصال‌ها رعایت شود. شاخه‌هایی که گره‌ها (نقاط) را به یکدیگر اتصال می‌دهند، بدون جهت هستند. چند  
نمونه کاربرد این مسئله عبارتند از:

۱- یک شرکت در احداث ساختمان مرکزی خود، در خصوص برق رسانی به نقاط گوناگون مورد نظر

در آن ساختمان می‌خواهد کمترین میزان کابل برق را استفاده کند.

۲- وزارت راه برای برقرار اتصال بین روستاهای یک منطقه به دنبال راه کاری است که براساس آن،

طول جاده‌های ارتباطی حداقل باشد.

۳- اداره آب و فاضلاب در نظر دارد کمترین طول لوله را برای ایجاد شبکه آبرسانی در یک شهرک در

حال احداث مصرف کند.

## الگوریتم درخت پوشش کمینه

با فرض اینکه به تعداد  $n$  نقطه (گره) با شماره ۱ تا  $n$  در مسئله مورد نظر وجود دارد، گام‌های الگوریتم چنین است:

**گام ۱:** ماتریس مربع  $n \times n$  فواصل بین نقاط ۱ تا  $n$  را تشکیل دهید.

**گام ۲:** از یک نقطه دلخواه شروع کنید و کوتاهترین فاصله بین آن نقطه تا سایر نقاط را بدست آورید. برای این منظور سطر مربوط به نقطه انتخابی را از ماتریس اصلی خارج و یک ماتریس  $1 \times n$  تشکیل دهد و در این ماتریس کوچکترین عدد را برگزینید. در این صورت عدد انتخاب شده، کوتاهترین فاصله نقطه انتخابی و نقطه ای است که در ستون مربوط به عدد یادشده قرار دارد. نقطه اخیر را به عنوان نقطه در نظر بگیرید.

**گام ۳:** در این مرحله، ماتریس  $2 \times n$  مربوط به دو نقطه اشاره شده را تشکیل و کوچکترین عدد داخل ماتریس را انتخاب نمایید تا سومین نقطه نیز بدست آید. همین طور ادامه دهید تا کلیه نقاط انتخاب شوند.

**گام ۴:** ترتیب بدست آوردن این نقاط نشان دهنده ترتیب حرکت بهینه در درخت مورد نظر است و مجموع فواصل در این درخت، حداقل فاصله ممکن برای اتصال نقاط خواهد بود.

**نکته:** چنانچه در مرحله ای، دو یا چند عدد مساوی در ماتریس وجود داشته باشد، دو یا چند جواب برای مسئله وجود خواهد داشت.

**مثال:** در یک ساختمان می بایست بین شش نقطه با فواصل مندرج در ماتریس زیر، سیم کشی برق انجام شود. علامت  $\infty$  برای فاصله دو نقطه در ماتریس، دلالت بر عدم امکان سیم کشی بین آنها دارد. با استفاده از الگوریتم درخت پوشش کمینه، درخت حداقل سیم کشی را تعیین و حداقل مقدار سیم مصرفی را بدست آورید.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	-	1	6	7	9	11
<u>2</u>	1	-	6	4	3	$\infty$
<u>3</u>	5	5	-	5	$\infty$	6
<u>4</u>	7	4	6	-	6	3
<u>5</u>	9	3	$\infty$	6	-	$\infty$
<u>6</u>	11	$\infty$	7	3	$\infty$	-

**حل: در مرحله ۱** ( $k = 1$ ) باید یک نقطه به دلخواه انتخاب شود. در این جا نقطه ۱ انتخاب می شود (

هر نقطه دیگری نیز می توانست انتخاب شود). ماتریس  $1 \times 6$  مربوطه به صورت زیر تشکیل می شود:

$$k = 1 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & \boxed{1} & 6 & 7 & 9 & 11 \end{array}$$

در این ماتریس، کوچکترین عدد برابر با ۱ می باشد که علامت مربع بر دور آن مشخص شده است. این

عدد مربوط به فاصله بین نقطه ۱ با نقطه ۲ می باشد و در نتیجه کوتاهترین فاصله تا نقطه ۲ بدست آمد.

**در مرحله ۲** ( $k = 2$ ) نقطه ۲ نیز که کوتاهترین فاصله تا آن در مرحله گذشته تعیین شده، به

ماتریس  $1 \times 6$  اضافه شده و ماتریس  $2 \times 6$  زیر ایجاد می گردد.

$$k = 2 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & - & 6 & 7 & 9 & 11 \\ \underline{2} & - & - & 6 & 4 & \boxed{3} & \infty \end{array}$$

توجه فرمایید چون نقاط ۱ و ۲ تعیین تکلیف شدند، در ماتریس بالا علامت - در ستون های ۱ و ۲

درج شده، یعنی بررسی این نقاط لازم نیست. در این ماتریس کوچکترین عدد برابر با ۳ و مربوط به فاصله

بین نقطه ۲ با نقطه ۵ است و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۵ نیز بدست آمد.

**در مرحله ۳** ( $k = 3$ ) با افزایش سطر ۵، ماتریس  $3 \times 6$  ایجاد می گردد:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\
 k=3 \rightarrow & \underline{1} & - & - & 6 & 7 & - & 11 \\
 & \underline{2} & - & - & 6 & \boxed{4} & - & \infty \\
 & \underline{5} & - & - & \infty & 6 & - & \infty
 \end{array}$$

**در مرحله ۴**، کوچکترین عدد در این ماتریس برابر با ۴ و مربوط به فاصله بین نقطه ۲ با نقطه ۴ است

و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۴ بدست آمده است. به همین ترتیب مراحل بعدی نیز انجام می شود که

ماتریس های آنها عبارتند از:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\
 k=4 \rightarrow & \underline{1} & - & - & 6 & - & - & 11 \\
 & \underline{2} & - & - & 6 & - & - & \infty \\
 & \underline{4} & - & - & 6 & - & - & \boxed{3} \\
 & \underline{5} & - & - & \infty & - & - & \infty
 \end{array}$$

ماتریس **مرحله ۵** ( $k=5$ ) به صورت زیر است:

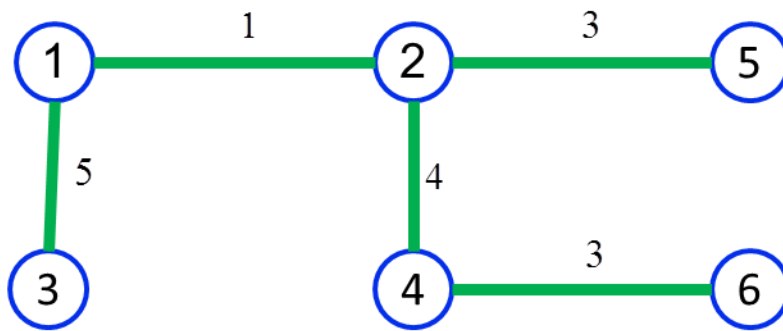
$$\begin{array}{cccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\
 k=5 \rightarrow & \underline{1} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\
 & \underline{2} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\
 & \underline{3} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\
 & \underline{4} & - & - & \infty & - & - & - \\
 & \underline{5} & - & - & 7 & - & - & -
 \end{array}$$

**در مرحله ۵** ( $k=5$ ) ملاحظه می شود سه عدد مساوی ۶ به عنوان کوچکترین عدد در این ماتریس

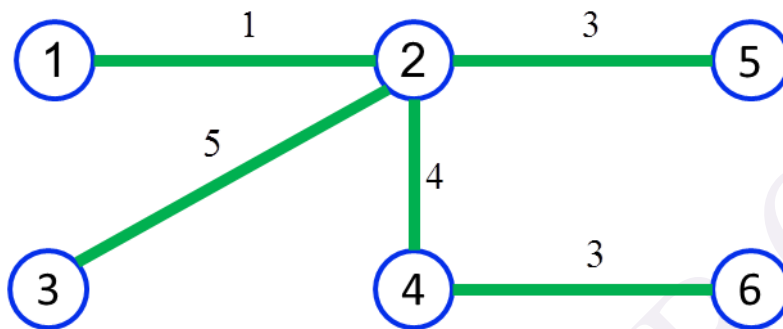
وجود دارند، بنابراین مسائله سه جواب دارد. یعنی برای سیم کشی برق به نقطه ۳ از هر یک از نقاط ۱، ۲ و

یا ۴ می توان اقدام نمود. چون کوتاهترین فاصله تا تمامی نقاط بدست آمد، در نتیجه الگوریتم به **پایان** می

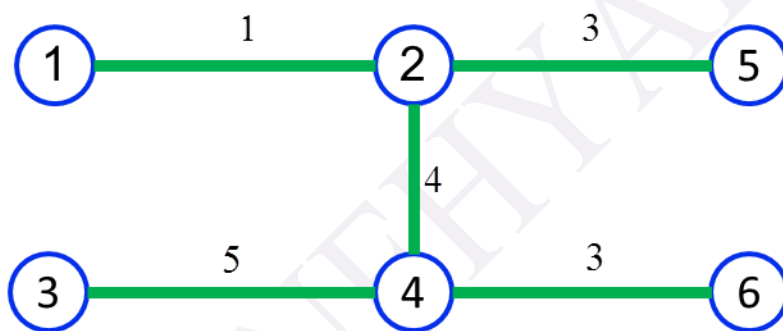
رسد. سه جواب مسئله (درخت پوشش کمینه) در شکل زیر آمده است.



جواب 1:



جواب 2:



جواب 3:



**تمرین:** درخت پوشش کمینه را بین نقاطی با ماتریس فواصل زیر بدست آورید.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	-	5	9	3	7	5
<u>2</u>	5	-	7	3	5	6
<u>3</u>	9	7	-	6	5	8
<u>4</u>	3	3	6	-	8	4
<u>5</u>	7	5	5	8	-	6
<u>6</u>	5	6	8	4	6	-

**حل:** گره ۶ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. کمان (۶,۴) با کمترین هزینه انتخاب می‌شود.

$$k = 1 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{6} & 5 & 6 & 8 & \boxed{4} & 6 & - \end{array}$$

گره‌های ۱ و ۲ انتخاب می‌شوند و کمان‌های (۴,۱) و (۴,۲) با کمترین هزینه به درخت اضافه می‌شود.

$$k = 2 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{4} & \boxed{3} & \boxed{3} & 6 & - & 8 & - \\ \underline{6} & 5 & 6 & 8 & - & 6 & - \end{array}$$

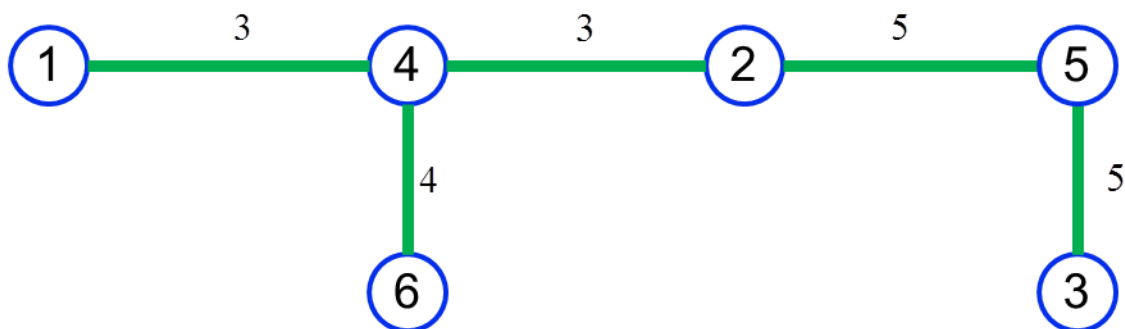
گره ۵ انتخاب می‌شود و کمان (۲,۵) با کمترین هزینه به درخت اضافه می‌شود.

$$k = 3,4 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & - & 9 & - & 7 & - \\ \underline{2} & - & - & 7 & - & \boxed{5} & - \\ \underline{4} & - & - & 6 & - & 8 & - \\ \underline{6} & - & - & 8 & - & 6 & - \end{array}$$

گره ۳ انتخاب می‌شود و کمان (۵,۳) با کمترین هزینه به درخت اضافه می‌شود.

$$k = 5 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & - & 9 & - & - & - \\ \underline{2} & - & - & 7 & - & - & - \\ \underline{4} & - & - & 6 & - & - & - \\ \underline{5} & - & - & \boxed{5} & - & - & - \\ \underline{6} & - & - & 8 & - & - & - \end{array}$$

درخت پوشش کمینه به صورت زیر می‌شود.



:

**تمرین:** راه‌های اتصالی بین روستاهای ۱ تا ۸ با ماتریس فواصل زیر چگونه احداث شوند تا کمترین طول راه احداث شود؟

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	-	5	2	4	8	7	4	7
<u>2</u>	5	-	6	3	8	7	5	9
<u>3</u>	2	6	-	5	6	5	3	6
<u>4</u>	4	3	5	-	7	5	6	8
<u>5</u>	8	8	6	7	-	6	9	6
<u>6</u>	7	7	5	5	6	-	7	4
<u>7</u>	4	5	3	6	9	7	-	6
<u>8</u>	7	9	6	8	6	4	6	-

حل:

$$k=1 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & \boxed{2} & 4 & 8 & 7 & 4 & 7 \end{array}$$

$$k=2 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & - & 4 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ \underline{3} & - & 6 & - & 5 & 6 & 5 & \boxed{3} & 6 \end{array}$$

$$k=3 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & - & \boxed{4} & 8 & 7 & - & 7 \\ \underline{3} & - & 6 & - & 5 & 6 & 5 & - & 6 \\ \underline{7} & - & 5 & - & 6 & 9 & 7 & - & 6 \end{array}$$

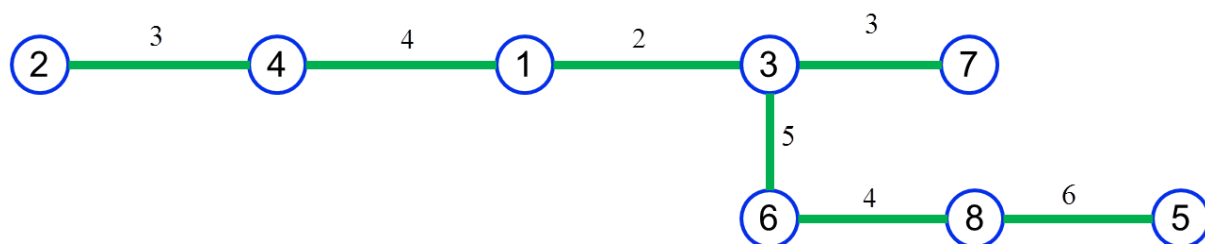
	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	
	<u>1</u>	-	5	-	-	8	7	-	7
$k = 4 \rightarrow$	<u>3</u>	-	6	-	-	6	5	-	6
	<u>4</u>	-	3	-	-	7	5	-	8
	<u>7</u>	-	5	-	-	9	7	-	6

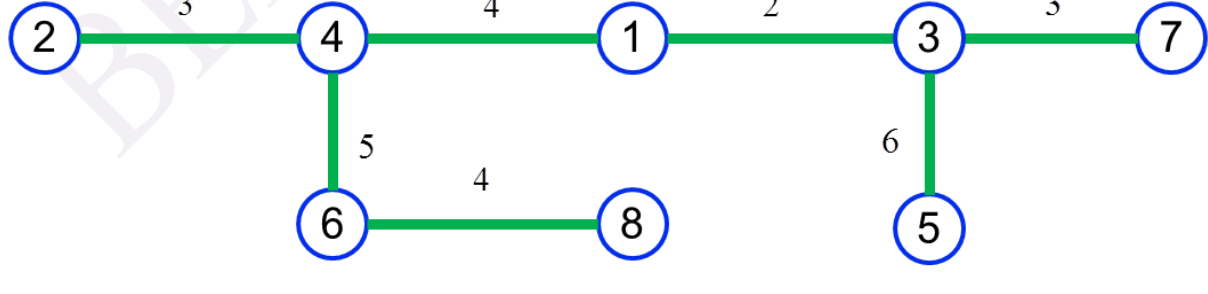
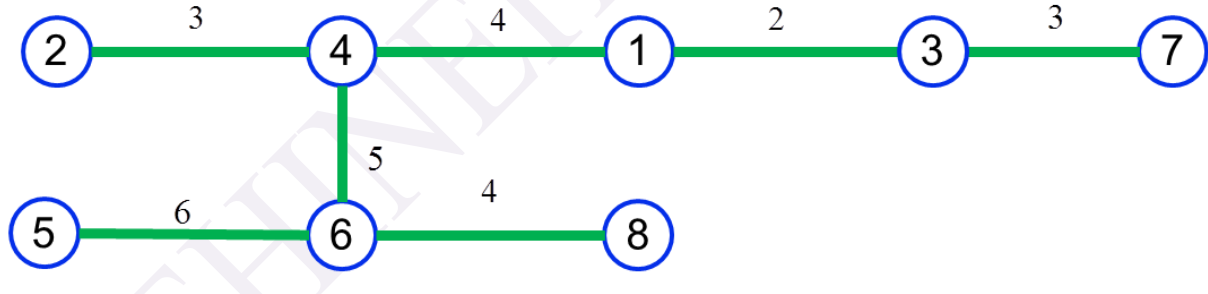
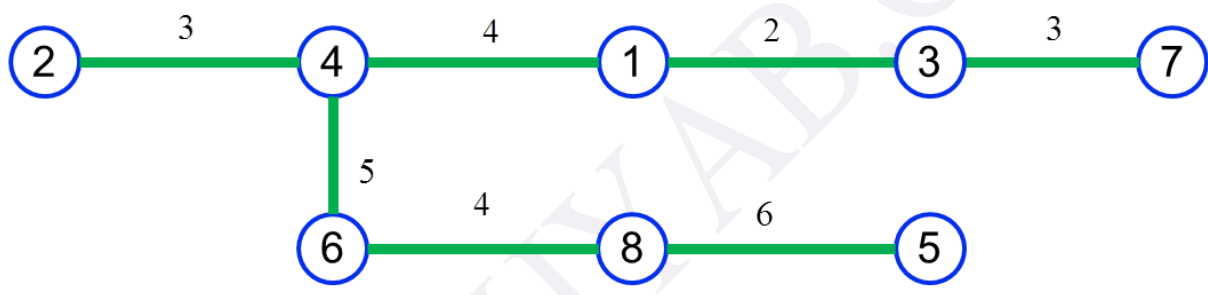
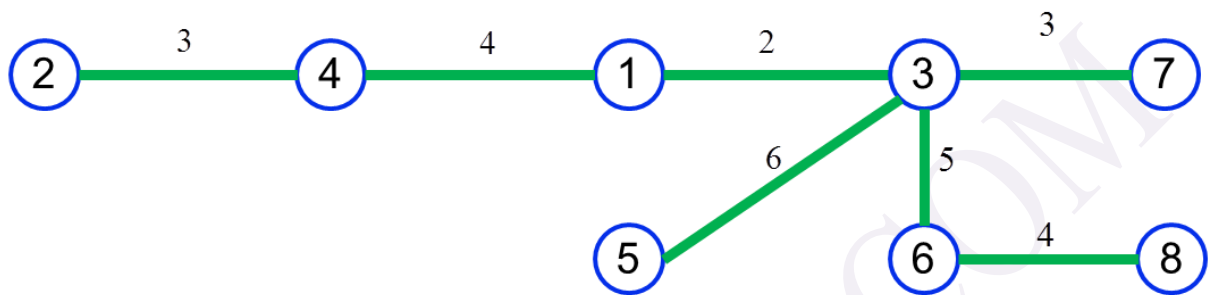
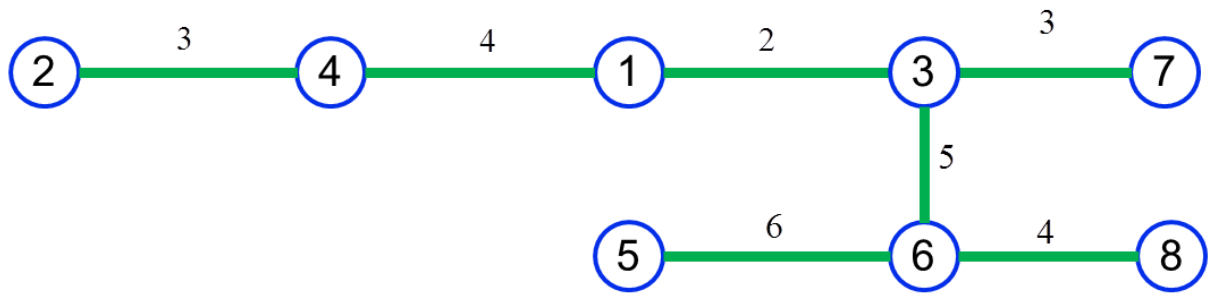
	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	
	<u>1</u>	-	-	-	-	8	7	-	7
$k = 5 \rightarrow$	<u>2</u>	-	-	-	-	8	7	-	9
	<u>3</u>	-	-	-	-	6	5	-	6
	<u>4</u>	-	-	-	-	7	5	-	8
	<u>7</u>	-	-	-	-	9	7	-	6

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	
	<u>1</u>	-	-	-	-	8	-	-	7
$k = 6 \rightarrow$	<u>2</u>	-	-	-	-	8	-	-	9
	<u>3</u>	-	-	-	-	6	-	-	6
	<u>4</u>	-	-	-	-	7	-	-	8
	<u>6</u>	-	-	-	-	6	-	-	4
	<u>7</u>	-	-	-	-	9	-	-	6

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	
	<u>1</u>	-	-	-	-	8	-	-	-
$k = 7 \rightarrow$	<u>2</u>	-	-	-	-	8	-	-	-
	<u>3</u>	-	-	-	-	6	-	-	-
	<u>4</u>	-	-	-	-	7	-	-	-
	<u>6</u>	-	-	-	-	6	-	-	-
	<u>7</u>	-	-	-	-	9	-	-	-
	<u>8</u>	-	-	-	-	6	-	-	-

شش درخت پوشش کمینه وجود دارد که در زیر آورده شده است:





برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com) مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی [behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com) و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**