# درس ۷: مسئله درخت پوشش کمینه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

**www.behinehyab.com**

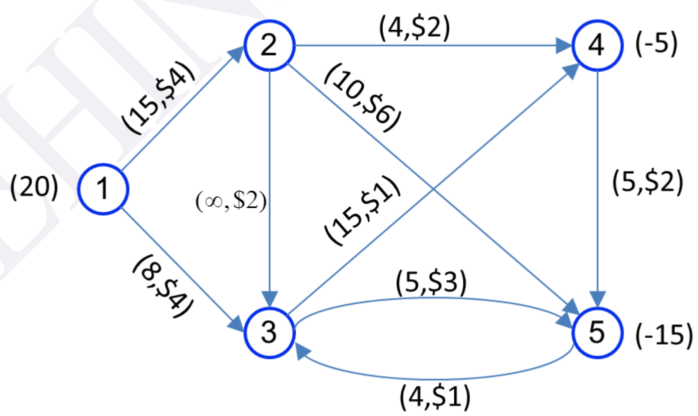
BEHINEHYAB.COM

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله درخت پوشش کمینه خواهیم پرداخت.

## مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیما به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلا مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره *i* به گره *j* را به صورت *i-j* نشان می‌دهیم.




در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۴-۲)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل

پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در ان برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت – نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

$x_{ij}$ : تعداد واحدهای حمل شده از گره $i$ به گره $j$ با استفاده از کمان $i$-$j$ است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$
\begin{array}{ll}
Min & 4x_{12}+4x_{13}+2x_{23}+2x_{24}+6x_{25}+x_{34}+3x_{35}+2x_{45}+x_{53} \\
s.t. & \\
(1) & x_{12}+x_{13}=20 \\
(2) & -x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=0 \\
(3) & -x_{13}-x_{23}+x_{34}+x_{35}-x_{53}=0 \\
(4) & -x_{24}-x_{34}+x_{45}=-5 \\
(5) & -x_{25}-x_{35}-x_{45}+x_{53}=-15
\end{array}
$$

$$x_{12}\le 15; x_{13}\le 8; x_{23}\le \infty; x_{24}\le 4; x_{25}\le 10; x_{34}\le 15; x_{35}\le 5; x_{45}\le \infty; x_{53}\le 4.$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12}+x_{13}=20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره۱( $x_{12}+x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ ( $x_{12}$) برابر جریان خروجی از گره ۲ ( $x_{23}+x_{24}+x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان $x_{ij}$ در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱+ و ۱- اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقا در



BEHINEHYAB.COM

دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه مـی‌گیرنـد و ۱- مربطه به گره ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به $n$ گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \ldots, n \\
& \qquad l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}
\end{aligned}
$$

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبـدیل به فرم‌های ساده تری است که در ادامه مسئله درخت پوشش کمینـه کـه حالـت خاصـی از مسـئله جریـان کمینه در شبکه را بیان می‌کنیم.

## مسئله درخت پوشش کمینه Minimum spanning tree

در اینجا اتصال گره‌های مختلف یک شبکه به یکدیگر مدنظر است. به طوری که کمترین فاصله در ایـن اتصال‌ها رعایت شود. شاخه‌هایی که گره‌ها (نقاط) را به یکدیگر اتصال می‌دهند، بدون جهـت هسـتند. چنـد نمونه کاربرد این مسئله عبارتند از:

۱- یک شرکت در احداث ساختمان مرکزی خود، در خصوص برق رسانی به نقاط گوناگون مـورد نظـر در آن ساختمان می خواهد کمترین میزان کابل برق را استفاده کند.

۲- وزارت راه برای برقرار اتصال بین روستاهای یک منطقه به دنبال راه کاری اسـت کـه براسـاس آن، طول جاده‌های ارتباطی حداقل باشد.

۳- اداره آب و فاضلاب در نظر دارد کمترین طول لوله را برای ایجاد شبکه آبرسانی در یک شـهرک در حال احداث مصرف کند.



BEHINEHYAB.COM

## الگوریتم درخت پوشش کمینه

با فرض اینکه به تعداد $n$ نقطه (گره) با شماره ۱ تا $n$ در مسئله مورد نظر وجود دارد، گام‌های الگوریتم چنین است:

**گام ۱:** ماتریس مربع $n\times n$ فواصل بین نقاط ۱ تا $n$ را تشکیل دهید.

**گام ۲:** از یک نقطه دلخواه شروع کنید و کوتاهترین فاصله بین آن نقطه تا سایر نقاط را بدست آورید. برای این منظور سطر مربوط به نقطه انتخابی را از ماتریس اصلی خارج و یک ماتریس $1\times n$ تشکیل دهد و در این ماتریس کوچکترین عدد را برگزینید. در این صورت عدد انتخاب شده، کوتاهترین فاصله نقطه انتخابی و نقطه ای است که در ستون مربوط به عدد یادشده قرار دارد. نقطه اخیر را به عنوان نقطه در نظر بگیرید.

**گام ۳:** در این مرحله، ماتریس $2\times n$ مربوط به دو نقطه اشاره شده را تشکیل و کوچکترین عدد داخل ماتریس را انتخاب نمایید تا سومین نقطه نیز بدست آید. همین طور ادامه دهید تا کلیه نقاط انتخاب شوند.

**گام ۴:** ترتیب بدست آوردن این نقاط نشان دهنده ترتیب حرکت بهینه در درخت مورد نظر است و مجموع فواصل در این درخت، حداقل فاصله ممکن برای اتصال نقاط خواهد بود.

**نکته:** چنانچه در مرحله ای، دو یا چند عدد مساوی در ماتریس وجود داشته باشد، دو یا چند جواب برای مسئله وجود خواهد داشت.

**مثال:** در یک ساختمان می بایست بین شش نقطه با فواصل مندرج در ماتریس زیر، سیم کشی برق انجام شود. علامت $\infty$ برای فاصله دو نقطه در ماتریس، دلالت بر عدم امکان سیم کشی بین آن‌ها دارد. با استفاده از الگوریتم درخت پوشش کمینه، درخت حداقل سیم کشی را تعیین و حداقل مقدار سیم مصرفی را بدست آورید.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | 1 | 6 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 1 | – | 6 | 4 | 3 | ∞ |
| 3 | 5 | 5 | – | 5 | ∞ | 6 |
| 4 | 7 | 4 | 6 | – | 6 | 3 |
| 5 | 9 | 3 | ∞ | 6 | – | ∞ |
| 6 | 11 | ∞ | 7 | 3 | ∞ | – |

**حل: در مرحله ۱** ($k=1$) باید یک نقطه به دلخواه انتخاب شود. در این جا نقطه ۱ انتخاب می‌شود ( هر نقطه دیگری نیز می‌توانست انتخاب شود). ماتریس $1\times 6$ مربوطه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$k=1\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & \boxed{1} & 6 & 7 & 9 & 11 \end{array}$$

در این ماتریس، کوچکترین عدد برابر با ۱ می باشد که علامت مربع بر دور آن مشخص شده است. این عدد مربوط به فاصله بین نقطه ۱ با نقطه ۲ می باشد و در نتیجه کوتاهترین فاصله تا نقطه ۲ بدست آمد.

**در مرحله ۲** ($k=2$) نقطه ۲ نیز که کوتاهترین فاصله تا آن در مرحله گذشته تعیین شده، به ماتریس $1\times 6$ اضافه شده و ماتریس $2\times 6$ زیر ایجاد می‌گردد.

$$k=2\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & - & 6 & 7 & 9 & 11 \\ \underline{2} & - & - & 6 & 4 & \boxed{3} & \infty \end{array}$$

توجه فرمایید چون نقاط ۱ و ۲ تعیین تکلیف شدند، در ماتریس بالا علامت – در ستون‌های ۱ و ۲ درج شده، یعنی بررسی این نقاط لازم نیست. در این ماتریس کوچکترین عدد برابر با ۳ و مربوط به فاصله بین نقطه ۲ با نقطه ۵ است و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۵ نیز بدست آمد.

**در مرحله ۳** ($k=3$) با افزایش سطر ۵، ماتریس $3\times 6$ ایجاد می‌گردد:

BEHINEHYAB.COM

$$k=3\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \hline \underline{1} & - & - & 6 & 7 & - & 11 \\ \underline{2} & - & - & 6 & \boxed{4} & - & \infty \\ \underline{5} & - & - & \infty & 6 & - & \infty \end{array}$$

**در مرحله ۴،** کوچکترین عدد در این ماتریس برابر با ۴ و مربوط به فاصله بین نقطه ۲ با نقطه ۴ است و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۴ بدست امده است. به همین ترتیب مراحل بعدی نیز انجام می‌شود که ماتریس‌های آن‌ها عبارتند از:

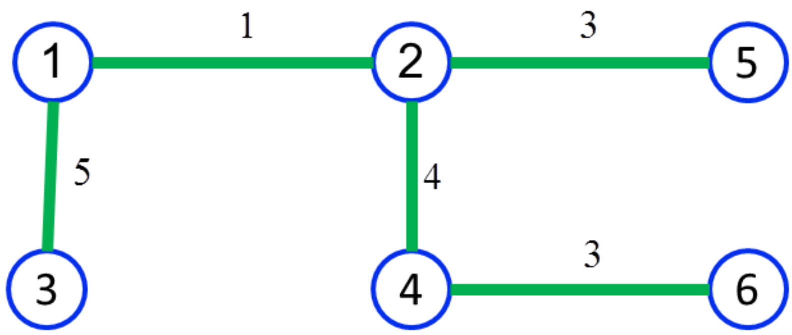
$$k=4\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \hline \underline{1} & - & - & 6 & - & - & 11 \\ \underline{2} & - & - & 6 & - & - & \infty \\ \underline{4} & - & - & 6 & - & - & \boxed{3} \\ \underline{5} & - & - & \infty & - & - & \infty \end{array}$$

ماتریس **مرحله ۵** $(k=5)$ به صورت زیر است:

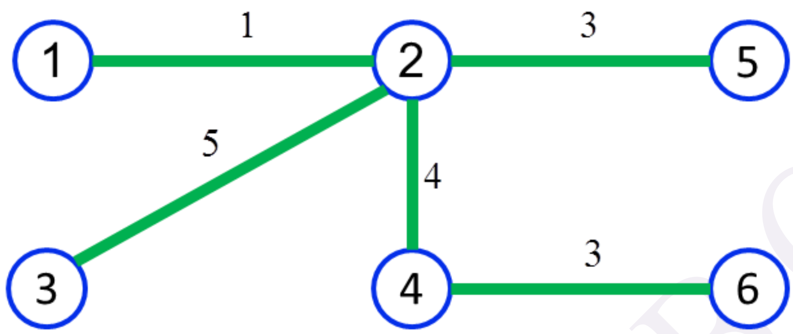
$$k=5\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \hline \underline{1} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\ \underline{2} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\ \underline{3} & - & - & \boxed{6} & - & - & - \\ \underline{4} & - & - & \infty & - & - & - \\ \underline{5} & - & - & 7 & - & - & - \end{array}$$

**در مرحله ۵** $(k=5)$ ملاحظه می‌شود سه عدد مساوی ۶ به عنوان کوچکترین عدد در ایـن مـاتریس وجود دارند، بنابراین مسائله سه جواب دارد. یعنی برای سیم کشی برق به نقطه ۳ از هر یک از نقاط ۱، ۲ و یا ۴ می‌توان اقدام نمود. چون کوتاهترین فاصله تا تمامی نقاط بدست آمد، در نتیجه الگوریتم به **پایان** مـی رسد. سه جواب مسئله (درخت پوشش کمینه) در شکل زیر آمده است.

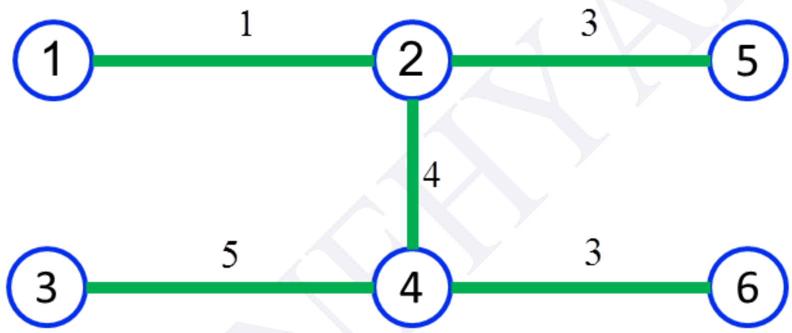
BEHINEHYAB.COM




جواب 1:




جواب 2:




جواب 3:

BEHINEHYAB.COM

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی *www.behinehyab.com* مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**

BEHINEHYAB.COM