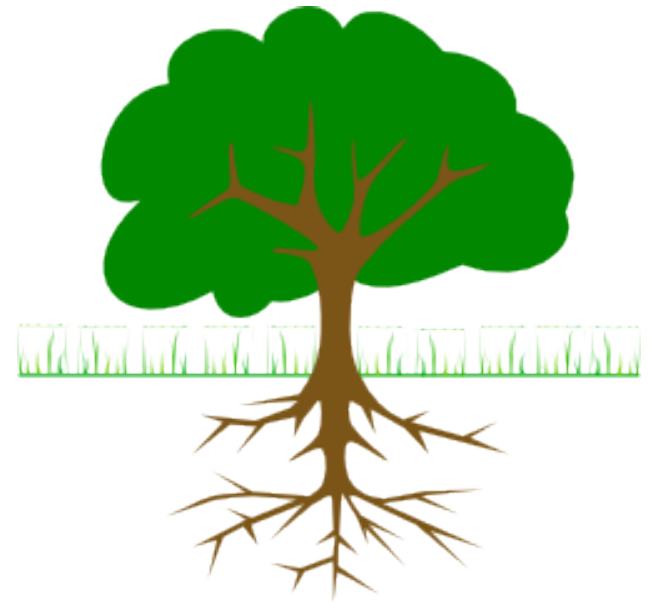
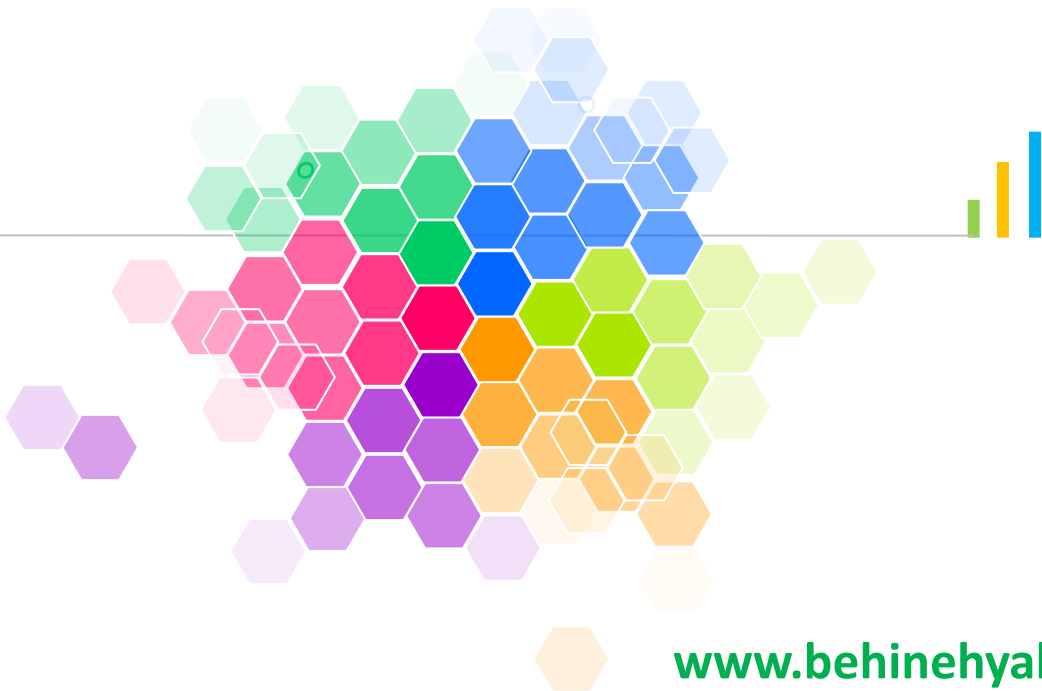


به نام خدا



# درس ۷: مسئله درخت پوشش کمینه



# فهرست مطالب



تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

۱

تعریف مسئله درخت پوشش کمینه

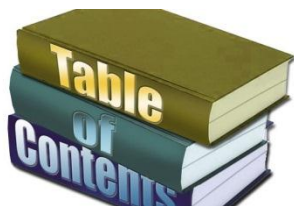
۲

الگوریتم مسئله درخت پوشش کمینه

۳

تمرین ها

۴



## تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

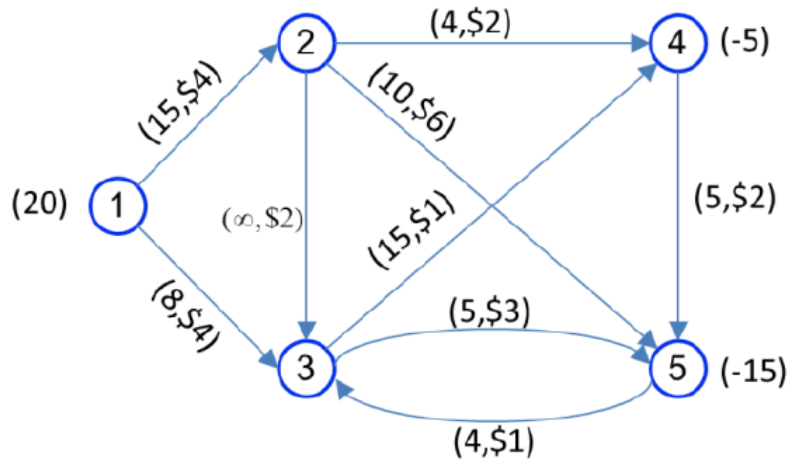
تا کنون به بررسی مسئله برنامه ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله حمل و نقل که حالت خاصی از مسئله جریان در شبکه است، خواهیم پرداخت.

### مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل و نقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

# تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد.



در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه ریزی خطی، فرض کنید:

$x_{ij}$  : تعداد واحدهای حمل شده از گره  $i$  به گره  $j$  با استفاده از کمان  $i-j$  است.

## تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل برنامه ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می شود.

$$\text{Min} \quad 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53}$$

*s.t.*

$$(1) \quad x_{12} + x_{13} = 20$$

$$(2) \quad -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0$$

$$(3) \quad -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0$$

$$(4) \quad -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5$$

$$(5) \quad -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15$$

$$x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4.$$

## تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می کند که جریان خروجی از گره ۱ ( $x_{12} + x_{13}$ )، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می کند که جریان ورودی به گره ۲ ( $x_{12}$ ) برابر جریان خروجی از گره ۲ ( $x_{23} + x_{24} + x_{25}$ ) است.

# تعریف مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان  $x_{ij}$  در معادلات توازن فقط ضریب ۰، +۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقاً در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب +۱ مربوط به گره‌ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و -۱ مربوطه به گره‌ای که به آن وارد می‌شوند.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

*s.t.*

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

## تعریف مسئله درخت پوشش کمینه

در اینجا اتصال گره های مختلف یک شبکه به یکدیگر مدنظر است. به طوری که کمترین فاصله در این اتصال ها رعایت شود. **شاخه هایی** که **گره ها** (نقاط) را به یکدیگر اتصال می دهند، **بدون جهت** هستند. چند نمونه کاربرد این مسئله عبارتند از:

- ۱- یک شرکت در احداث ساختمان مرکزی خود، در خصوص برق رسانی به نقاط گوناگون مورد نظر در آن ساختمان می خواهد کمترین میزان کابل برق را استفاده کند.
- ۲- وزارت راه برای برقرار اتصال بین روستاهای یک منطقه به دنبال راه کاری است که براساس آن، طول جاده های ارتباطی حداقل باشد.
- ۳- اداره آب و فاضلاب در نظر دارد کمترین طول لوله را برای ایجاد شبکه آبرسانی در یک شهرک در حال احداث مصرف کند.



# الگوریتم مسئله درخت پوشش کمینه

با فرض اینکه به تعداد  $n$  نقطه (گره) با شماره ۱ تا  $n$  در مسئله مورد نظر وجود دارد، گام‌های الگوریتم چنین است:

**گام ۱:** ماتریس مربع  $n \times n$  فواصل بین نقاط ۱ تا  $n$  را تشکیل دهید.

**گام ۲:** از یک نقطه دلخواه شروع کنید و کوتاهترین فاصله بین آن نقطه تا سایر نقاط را بدست آورید. برای این منظور سطر مربوط به نقطه انتخابی را از ماتریس اصلی خارج و یک ماتریس  $1 \times n$  تشکیل دهد و در این ماتریس کوچکترین عدد را برگزینید. در این صورت عدد انتخاب شده، کوتاهترین فاصله نقطه انتخابی و نقطه‌ای است که در ستون مربوط به عدد یادشده قرار دارد. نقطه اخیر را به عنوان نقطه در نظر بگیرید.

**گام ۳:** در این مرحله، ماتریس  $2 \times n$  مربوط به دو نقطه اشاره شده را تشکیل و کوچکترین عدد داخل ماتریس را انتخاب نمایید تا سومین نقطه نیز بدست آید. همین‌طور ادامه دهید تا کلیه نقاط انتخاب شوند.

**گام ۴:** ترتیب بدست آوردن این نقاط نشان دهنده ترتیب حرکت بهینه در درخت مورد نظر است و مجموع فواصل در این درخت، حداقل فاصله ممکن برای اتصال نقاط خواهد بود.

# تمرین‌ها

**مثال:** در یک ساختمان می‌بایست بین شش نقطه با فواصل مندرج در ماتریس زیر، سیم کشی برق انجام شود. علامت  $\infty$  برای فاصله دو نقطه در ماتریس، دلالت بر عدم امکان سیم کشی بین آن‌ها دارد. با استفاده از الگوریتم درخت پوشش کمینه، درخت حداقل سیم کشی را تعیین و حداقل مقدار سیم مصرفی را بدست آورید.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	-	1	6	7	9	11
<u>2</u>	1	-	6	4	3	$\infty$
<u>3</u>	5	5	-	5	$\infty$	6
<u>4</u>	7	4	6	-	6	3
<u>5</u>	9	3	$\infty$	6	-	$\infty$
<u>6</u>	11	$\infty$	7	3	$\infty$	-



## تمرین‌ها

**حل: در مرحله ۱** ( $k = 1$ ) باید یک نقطه به دلخواه انتخاب شود. در این جا نقطه ۱ انتخاب می شود ( هر نقطه دیگری نیز می توانست انتخاب شود). ماتریس  $1 \times 6$  مربوطه به صورت زیر تشکیل می شود:

$$k = 1 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & \boxed{1} & 6 & 7 & 9 & 11 \end{array}$$

در این ماتریس، کوچکترین عدد برابر با ۱ می باشد که علامت مربع بر دور آن مشخص شده است. این عدد مربوط به فاصله بین نقطه ۱ با نقطه ۲ می باشد و در نتیجه کوتاهترین فاصله تا نقطه ۲ بدست آمد.

## تمرین‌ها

در مرحله ۲ ( $k = 2$ ) نقطه ۲ نیز که کوتاهترین فاصله تا آن در مرحله گذشته تعیین شده، به ماتریس  $1 \times 6$  اضافه شده و ماتریس  $2 \times 6$  زیر ایجاد می‌گردد.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\
 k = 2 \rightarrow \underline{1} & - & - & 6 & 7 & 9 & 11 \\
 & \underline{2} & - & - & 6 & 4 & \boxed{3} & \infty
 \end{array}$$

توجه فرمایید چون نقاط ۱ و ۲ تعیین تکلیف شدند، در ماتریس بالا علامت - در ستون‌های ۱ و ۲ درج شده، یعنی بررسی این نقاط لازم نیست. در این ماتریس کوچکترین عدد برابر با ۳ و مربوط به فاصله بین نقطه ۲ با نقطه ۵ است و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۵ نیز بدست آمد.

## تمرین‌ها

در مرحله ۳ ( $k = 3$ ) با افزایش سطر ۵، ماتریس  $3 \times 6$  ایجاد می‌گردد:

$$k = 3 \rightarrow \begin{array}{cccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{1} & - & - & 6 & 7 & - & 11 \\ \underline{2} & - & - & 6 & \boxed{4} & - & \infty \\ \underline{5} & - & - & \infty & 6 & - & \infty \end{array}$$

کوچکترین عدد در این ماتریس برابر با ۴ و مربوط به فاصله بین نقطه ۲ با نقطه ۴

است و بنابراین کوتاهترین فاصله تا نقطه ۴ بدست آمده است.

# تمرین ها



در مرحله ۴،

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	-	-	6	-	-	11
$k = 4 \rightarrow$ <u>2</u>	-	-	6	-	-	$\infty$
<u>4</u>	-	-	6	-	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>
<u>5</u>	-	-	$\infty$	-	-	$\infty$

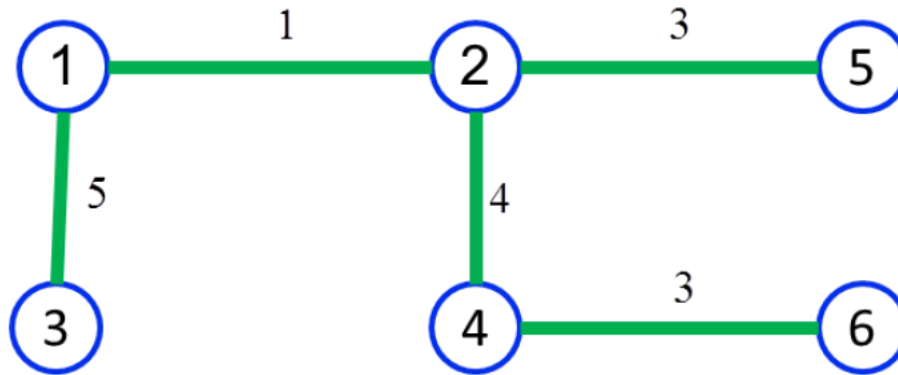
## تمرین‌ها

ماتریس مرحله ۵ ( $k = 5$ ) به صورت زیر است:

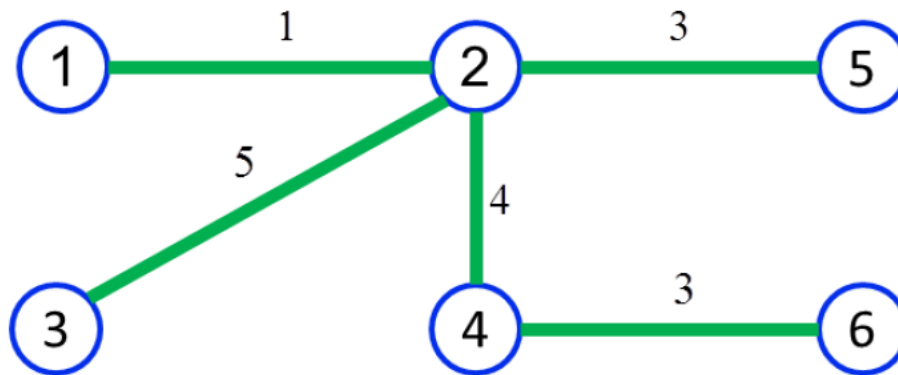
	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	
$k = 5 \rightarrow$	<u>1</u>	-	-	6	-	-	-
	<u>2</u>	-	-	6	-	-	-
	<u>4</u>	-	-	6	-	-	-
	<u>5</u>	-	-	$\infty$	-	-	-
	<u>6</u>	-	-	7	-	-	-

در مرحله ۵ ( $k = 5$ ) ملاحظه می‌شود سه عدد مساوی ۶ به عنوان کوچکترین عدد در این ماتریس وجود دارند، بنابراین مسائله سه جواب دارد. یعنی برای سیم کشی برق به نقطه ۳ از هر یک از نقاط ۱، ۲ و ۴ می‌توان اقدام نمود. چون کوتاهترین فاصله تا تمامی نقاط بدست آمد، در نتیجه الگوریتم به **پایان** می‌رسد.

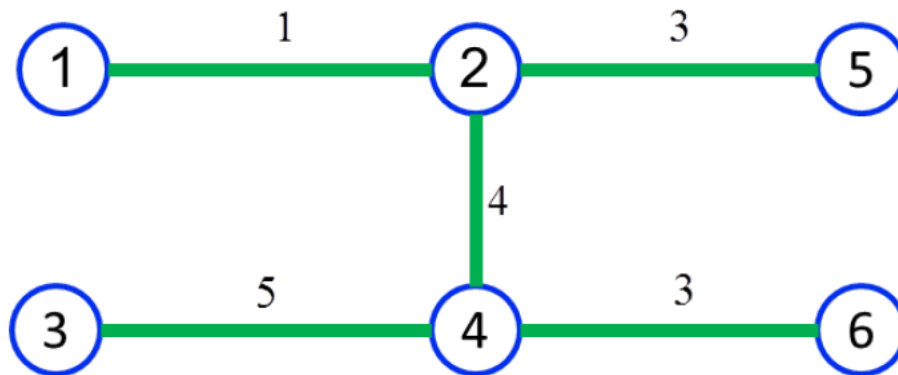
سه جواب مسئله (درخت پوشش کمینه) در شکل زیر آمده است.



جواب 1:



جواب 2:



جواب 3:



# تمرین ها



**تمرین:** درخت پوشش کمینه را بین نقاطی با ماتریس فواصل زیر بدست آورید.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
<u>1</u>	–	5	9	3	7	5
<u>2</u>	5	–	7	3	5	6
<u>3</u>	9	7	–	6	5	8
<u>4</u>	3	3	6	–	8	4
<u>5</u>	7	5	5	8	–	6
<u>6</u>	5	6	8	4	6	–

## تمرین ها

**حل:** گره ۶ را به دلخواه انتخاب می کنیم. کمان  $(۶,۴)$  با کمترین هزینه انتخاب می شود.

$$k=1 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{6} & 5 & 6 & 8 & \boxed{4} & 6 & - \end{array}$$

گره های ۱ و ۲ انتخاب می شوند و کمان های  $(۴,۱)$  و  $(۴,۲)$  با کمترین هزینه به درخت اضافه می شود.

$$k=2 \rightarrow \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ 4 & \boxed{3} & \boxed{3} & 6 & - & 8 & - \\ \underline{6} & 5 & 6 & 8 & - & 6 & - \end{array}$$

# تمرین‌ها

گره ۵ انتخاب می‌شود و کمان (۲,۵) با کمترین هزینه به درخت اضافه می‌شود.

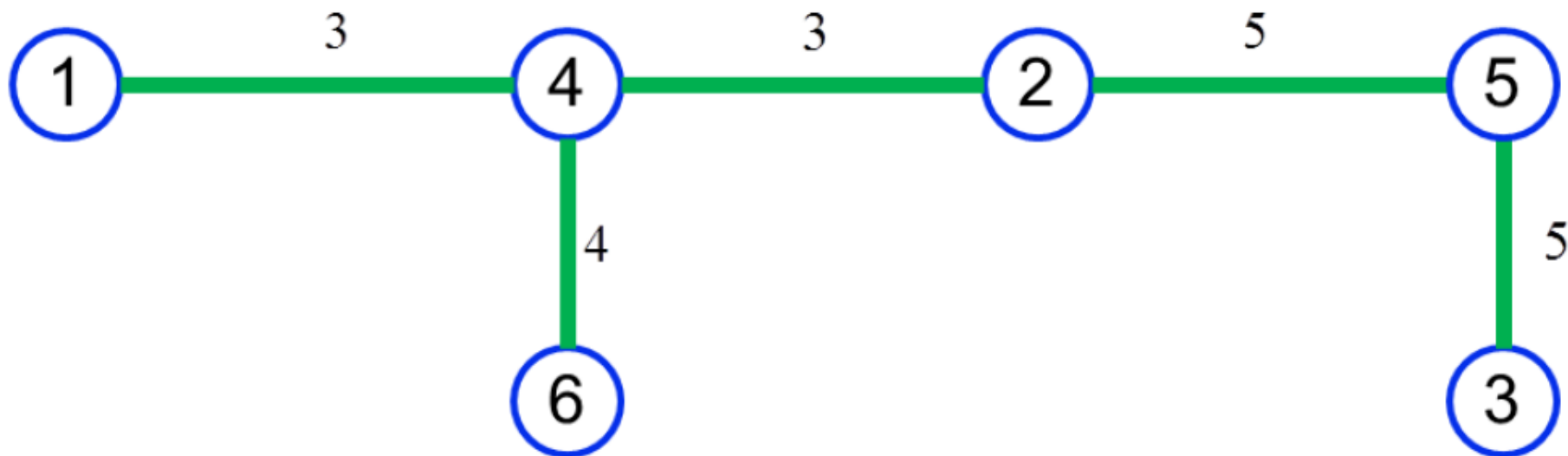
	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
	<u>1</u>	-	-	9	-	7
$k = 3, 4 \rightarrow$	<u>2</u>	-	-	7	-	5
	<u>4</u>	-	-	6	-	8
	<u>6</u>	-	-	8	-	6

گره ۳ انتخاب می‌شود و کمان (۵,۳) با کمترین هزینه به درخت اضافه می‌شود.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
	<u>1</u>	-	-	9	-	-
	<u>2</u>	-	-	7	-	-
$k = 5 \rightarrow$	<u>4</u>	-	-	6	-	-
	<u>5</u>	-	-	5	-	-
	<u>6</u>	-	-	8	-	-

# تمرین ها

درخت پوشش کمینه به صورت زیر می شود.



## تمرین ها



**تمرین:** راه های اتصالی بین روستاهای ۱ تا ۸ با ماتریس فواصل زیر چگونه احداث شوند تا کمترین طول راه احداث شود؟

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	–	5	2	4	8	7	4	7
<u>2</u>	5	–	6	3	8	7	5	9
<u>3</u>	2	6	–	5	6	5	3	6
<u>4</u>	4	3	5	–	7	5	6	8
<u>5</u>	8	8	6	7	–	6	9	6
<u>6</u>	7	7	5	5	6	–	7	4
<u>7</u>	4	5	3	6	9	7	–	6
<u>8</u>	7	9	6	8	6	4	6	–

# تمرین ها



حل:

$$k=1 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & \boxed{2} & 4 & 8 & 7 & 4 & 7 \end{array}$$

$$k=2 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & - & 4 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ \underline{3} & - & 6 & - & 5 & 6 & 5 & \boxed{3} & 6 \end{array}$$

$$k=3 \rightarrow \begin{array}{cccccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \\ \underline{1} & - & 5 & - & \boxed{4} & 8 & 7 & - & 7 \\ \underline{3} & - & 6 & - & 5 & 6 & 5 & - & 6 \\ \underline{7} & - & 5 & - & 6 & 9 & 7 & - & 6 \end{array}$$

# تمرین ها



$k = 4 \rightarrow$

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	-	5	-	-	8	7	-	7
<u>3</u>	-	6	-	-	6	5	-	6
<u>4</u>	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	-	-	7	5	-	8
<u>7</u>	-	5	-	-	9	7	-	6

$k = 5 \rightarrow$

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	-	-	-	-	8	7	-	7
<u>2</u>	-	-	-	-	8	7	-	9
<u>3</u>	-	-	-	-	6	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	-	6
<u>4</u>	-	-	-	-	7	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	-	8
<u>7</u>	-	-	-	-	9	7	-	6

$k = 6 \rightarrow$

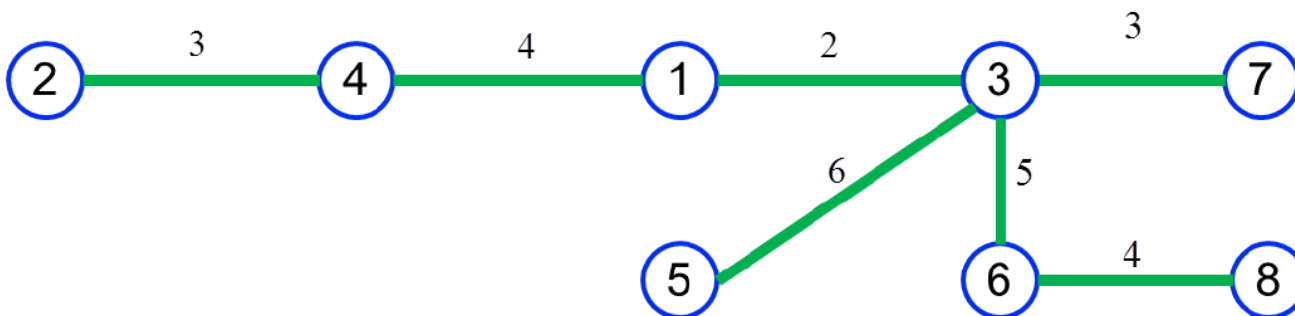
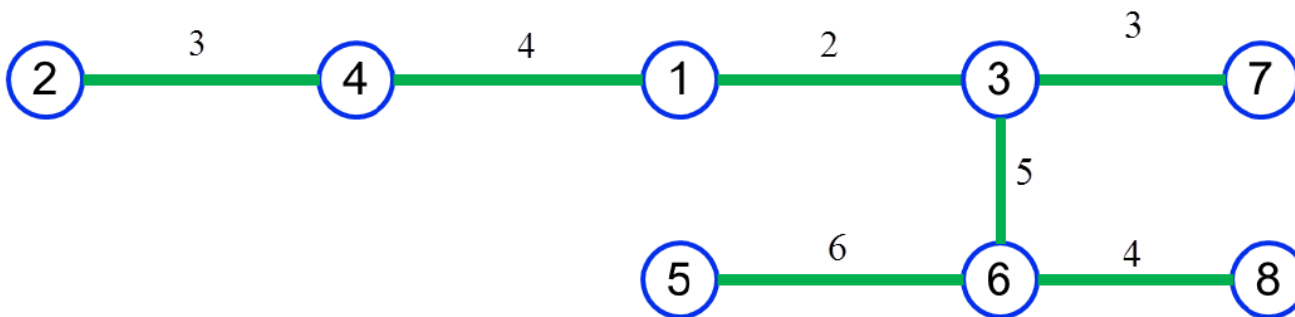
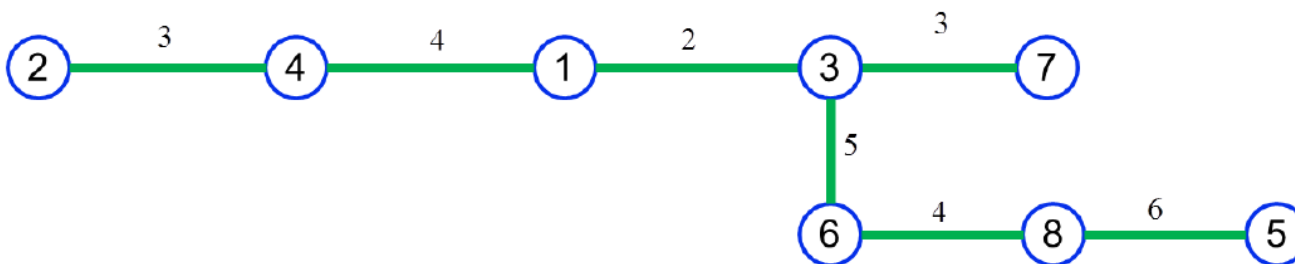
	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	-	-	-	-	8	-	-	7
<u>2</u>	-	-	-	-	8	-	-	9
<u>3</u>	-	-	-	-	6	-	-	6
<u>4</u>	-	-	-	-	7	-	-	8
<u>6</u>	-	-	-	-	6	-	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>
<u>7</u>	-	-	-	-	9	-	-	6

$k = 7 \rightarrow$

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	-	-	-	-	8	-	-	-
<u>2</u>	-	-	-	-	8	-	-	-
<u>3</u>	-	-	-	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	-	-	-
<u>4</u>	-	-	-	-	7	-	-	-
<u>6</u>	-	-	-	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	-	-	-
<u>7</u>	-	-	-	-	9	-	-	-
<u>8</u>	-	-	-	-	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	-	-	-

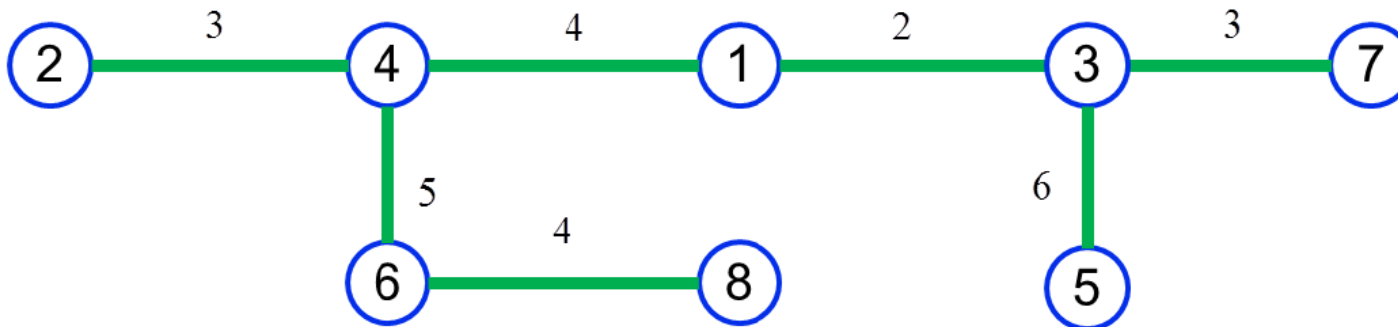
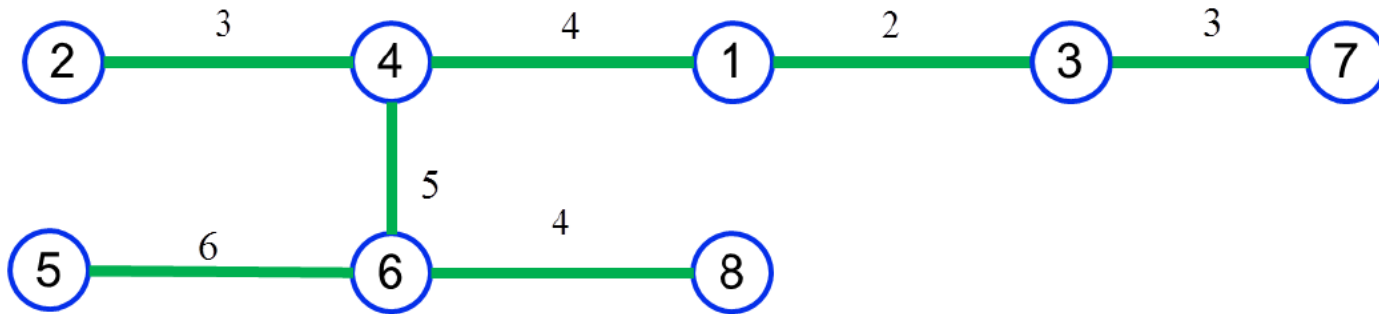
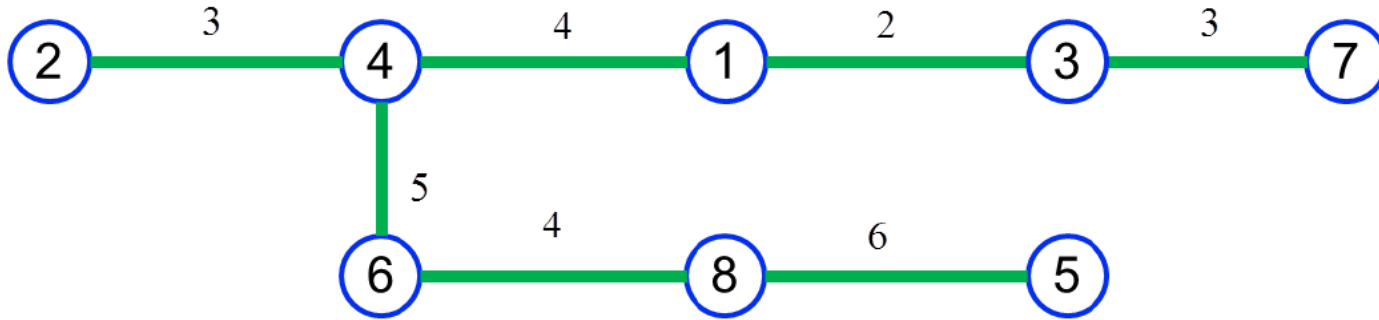
# تمرین ها

شش درخت پوشش کمینه وجود دارد که در زیر آورده شده است:





# تمرین ها



# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com)

[behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com)