

درس ۶: مسئله کوتاهترین مسیر

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



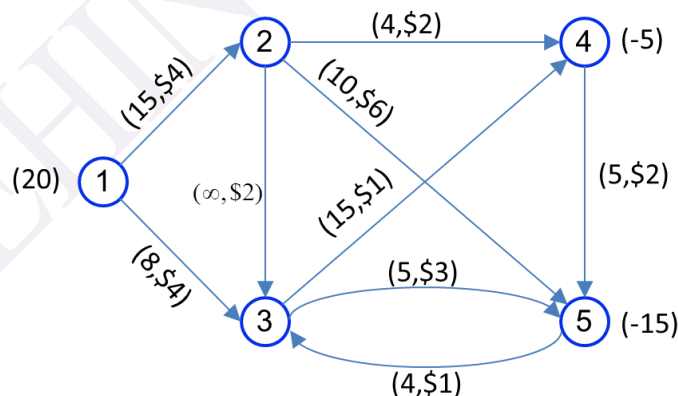
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل خاص کوتاهترین مسیر خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل و نقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره‌دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دارند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره i به گره j را به صورت $i-j$ نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۲-۴)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بالاخره، اعداد داخل

پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در آن برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت - نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان $i-j$ است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53} \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & x_{12} + x_{13} = 20 \\ (2) \quad & -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0 \\ (3) \quad & -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0 \\ (4) \quad & -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5 \\ (5) \quad & -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15 \\ & x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4. \end{aligned}$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره ۱ ($x_{12} + x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23} + x_{24} + x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقاً در

دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره‌ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و ۱- مربوطه به گره‌ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به n گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \end{aligned}$$

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبدیل به فرم‌های ساده تری است که در ادامه مسئله کوتاهترین مسیر که مدل خاصی از مسئله جریان در شبکه است را بیان می‌کنیم.

کوتاهترین مسیر در شبکه

یکی از کاربردهای عملی تئوری شبکه‌ها در حل مسائل موجود در دنیای واقع مربوط به تعیین کوتاهترین مسیر در شبکه است. در این مبحث شبکه‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که گره‌های آن به مثابه نقاط مختلف موجود در یک منطقه و شاخه‌ها نقش مسیرهای ارتباطی بین این نقاط را ایفا می‌کنند. هر نقطه (گره) از این شبکه به عنوان مبدا حرکت و هر نقطه (گره) دیگر به عنوان مقصد می‌تواند در نظر گرفته شود. هدف، تعیین مسیری بین مبدا و مقصد حرکت است که اگر این مسیر برای حرکت انتخاب شود، کمترین فاصله طی می‌شود که به آن کوتاهترین مسیر در شبکه گفته می‌شود.

شبکه‌هایی که در رابطه با این مطلب مطرح می‌شوند، از لحاظی به دو نوع تقسیم می‌شوند:

- شبکه‌های بدون حلقه

- شبکه‌های دارای حلقه

در ادامه هر یک از این دو نوع شبکه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شبکه‌های بدون حلقه

این شبکه‌ها اغلب شبیه به شبکه‌های برداری ساده هستند، اما در این جا هر دو گره‌ای می‌توانند به عنوان گره‌های مبدا و مقصد حرکت در نظر گرفته شوند. برای حل مسائل در این شبکه‌ها معمولاً روش ساده حسی بکار می‌رود.

روش ساده کوتاهترین مسیر

در این روش یک حرکت محاسباتی از گره مبدا (شروع) تا گره مقصد (پایان) انجام می‌شود. در طی این حرکت محاسباتی، به هر گره یک کد (m) اختصاص می‌یابد که نشان دهنده کوتاهترین فاصله آن گره از گره شروع است. فرض بر این است که شماره گره شروع برابر با ۱ و شماره گروه پایان معادل n در نظر گرفته شده و گره‌های میانی نیز به ترتیب صعودی شماره گذاری شده اند. گام‌های الگوریتم این روش به صورت زیر است:

گام ۱: به گره شروع، کد برابر با صفر اختصاص دهید ($m_1 = 0$).

گام ۲: کد گره j (m_j) را از رابطه زیر بدست آورید:

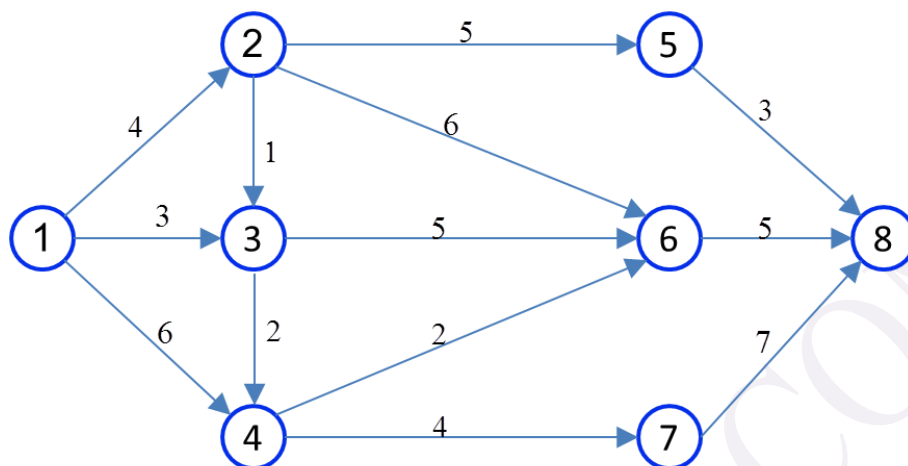
$$m_j = \min_{i \in S} (m_i + d_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

که در آن S مجموعه گره‌هایی است که شاخه‌های ورودی به گره j از آن گره‌ها خارج شده اند و d_{ij} فاصله مستقیم از گره i تا گره j است

گام ۳: هنگامی که گره پایان کد گرفت (m_n)، این کد معرف کوتاهترین فاصله بین گروه شروع و پایان شبکه است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهترین مسیر، از روش حرکت برگشتی استفاده می‌شود. به بیان دیگر هر یک از شاخه‌های ورودی به یک گره که تعیین کننده کد آن گره است، بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد.

مثال: با استفاده از روش ساده حسی، کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره‌های ۱ و ۸ در شبکه شکل زیر را تعیین کنید. فاصله مستقیم بین هر دو گره مجاور بر روی شاخه متصل کننده آن دو درج شده است.



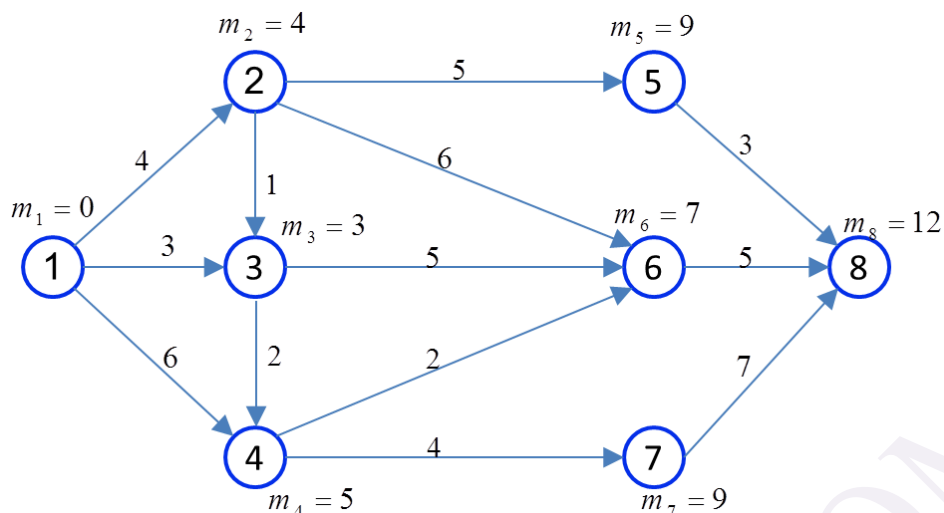
حل: ابتدا گره ۱ را برابر صفر در نظر گرفته می‌شود ($m_1 = 0$).

برای گره ۲ می‌توان نوشت ($m_2 = m_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4$)

برای گره ۳ چون دو مسیر برای رسیدن به این گره وجود دارد بایستی حداقل این دو مسیر در نظر گرفته شود:

$$\left. \begin{array}{l} m_3 = m_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3 \\ m_3 = m_2 + d_{23} = 4 + 1 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow m_3 = \min(3, 5) = 3$$

محاسبات برای سایر گره‌ها نیز به همین ترتیب انجام می‌شود که نتایج آن در شکل زیر خلاصه شده است. ملاحظه می‌شود کوتاهترین فاصله گره ۸ از گره ۱ برابر با ۱۲ واحد است.



برای تعیین کوتاهترین مسیر بین گره‌های ۱ و ۸ از حرکت برگشت استفاده می‌شود. در این حرکت هر گره‌ای (j) که کد آن (m_j) در رابطه $m_i = m_j - d_{ij}$ صدق کند، بر روی کوتاهترین مسیر واقع است. حرکت از گره پایان آغاز می‌شود، سه شاخه به این گره وارد شده است:

$$m_8 - d_{58} = 12 - 3 = 9 = m_5$$

$$m_8 - d_{68} = 12 - 5 = 7 = m_6$$

$$m_8 - d_{78} = 12 - 7 = 5 \neq m_7$$

کمان‌ها (۵,۸) و (۶,۸) بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد. بنابراین تا کنون دو فقره کوتاهترین مسیر وجود دارد. ابتدا کار از گره ۵ ادامه می‌دهیم.

$$m_5 - d_{25} = 9 - 5 = 4 = m_2$$

کمان (۲,۵) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_2 - d_{12} = 4 - 4 = 0 = m_1$$

کمان (۱,۲) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

مسیر یکم مشخص شد. اکنون نوبت به مسیر دوم است/ کار را از گره ششم ادامه می‌دهیم.

$$m_6 - d_{26} = 7 - 6 = 1 \neq m_2$$

$$m_6 - d_{36} = 7 - 5 = 2 \neq m_3$$

$$m_6 - d_{46} = 7 - 2 = 5 = m_4$$

کمان (۴,۶) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

$$m_4 - d_{34} = 5 - 2 = 3 = m_3$$

$$m_4 - d_{14} = 5 - 6 = -1 \neq m_1$$

کمان (۳,۴) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_3 - d_{23} = 3 - 1 = 2 \neq m_2$$

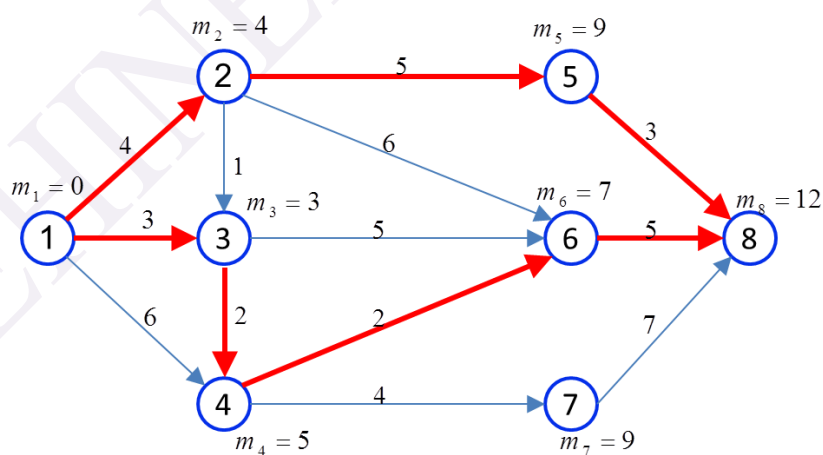
$$m_3 - d_{13} = 3 - 3 = 0 = m_1$$

کمان (۱,۳) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

ملاحظه می شود در این شبکه، دو مسیر وجود دارد که کوتاهترین مسیر را دارد.

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$



چندمین (k-امین) مسیر کوتاه

راننده یک اتوبوس مسافری برای رساندن مسافری خود از شهر مبدا (X) به شهر مقصد (Z)

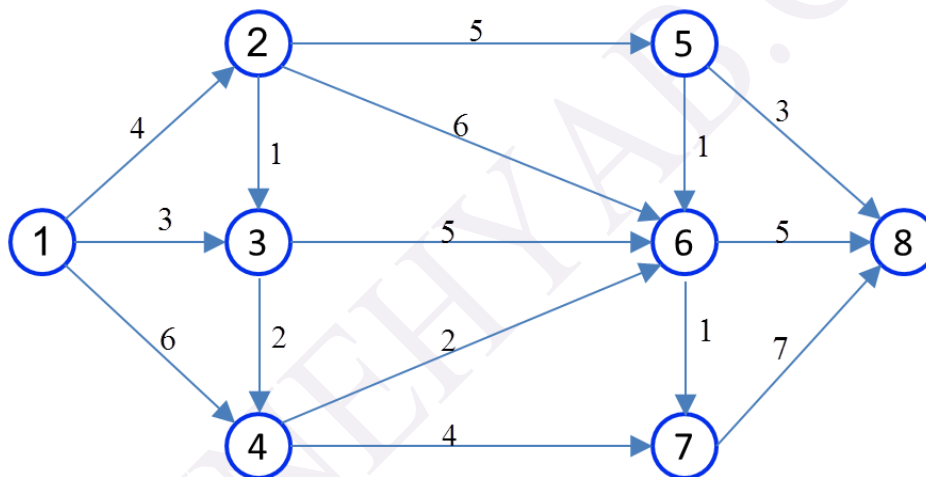
کوتاهترین مسیر را انتخاب کرده است که در طی آن از شهرهای U, V و W عبور می کند. فرض کنید در یک

هفته خاص، برای رفتن به شهر U مانعی وجود دارد، بنابراین راننده اتوبوس در نظر دارد از دومین کوتاهترین مسیر استفاده کند. این مثال نشان می‌دهد که گاهی اوقات لازم است که دومین، سومین یا به طور عمومی k امین کوتاهترین مسیر تعیین شود. برای تعیین k -امین مسیر کوتاه، تغییری به صورت زیر در گام دوم روش ساده کوتاهترین مسیر ایجاد می‌شود.

$$m_j^{(k)} = \text{Mink} \{m_i^{(r)} + d_{ij} \mid i \in S\} \quad = 1, 2, \dots, j-1; j = 2, 3, \dots, n; 1 \leq r \leq k$$

که در آن منظور از Mink انتخاب k -امین مقدار حداقل در داخل $\{\}$ است.

مثال: یکمین، دومین، سومین مسیر کوتاه بین گره‌های ۱ و ۸ را در شبکه زیر تعیین کنید.



حل: چنانچه به روش ساده کوتاهترین فاصله عمل شود، کوتاهترین فاصله (یکمین فاصله کوتاه) تا هر گره بدست می‌آید:

$$m_1^{(1)} = 0, \quad m_2^{(1)} = 4, \quad m_3^{(1)} = 3, \quad m_4^{(1)} = 5, \\ m_5^{(1)} = 9, \quad m_6^{(1)} = 7, \quad m_7^{(1)} = 8, \quad m_8^{(1)} = 12$$

در خصوص دومین فاصله کوتاه، برای گره مبدا همچنان کد برابر با صفر اختصاص می‌یابد.

$$m_1^{(2)} = 0$$

فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می‌شود و بنابراین دومین فاصله کوتاه بین گره‌های ۱ و ۲ وجود ندارد:

$$m_2^{(2)} = -$$

اما برای گره ۳ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} m_3^{(2)} &= \text{Min } 2\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}\} \\ &= \text{Min } 2\{0 + 3, 0 + 3, 4 + 1, -\} = 5 \end{aligned}$$

برای سایر گره ها به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} m_4^{(2)} &= \text{Min } 2\{m_1^{(1)} + d_{14}, m_1^{(2)} + d_{14}, m_3^{(1)} + d_{34}, m_3^{(2)} + d_{34}\} \\ &= \text{Min } 2\{0 + 6, 0 + 6, 3 + 2, 5 + 2\} = 6 \end{aligned}$$

$$m_5^{(2)} = -$$

$$\begin{aligned} m_6^{(2)} &= \text{Min } 2\{m_2^{(1)} + d_{26}, m_2^{(2)} + d_{26}, m_3^{(1)} + d_{36}, m_3^{(2)} + d_{36}, m_4^{(1)} + d_{46}, m_4^{(2)} + d_{46}, m_5^{(1)} + d_{56}, m_5^{(2)} + d_{56}\} \\ &= \text{Min } 2\{4 + 6, -, 3 + 5, 5 + 5, 5 + 2, 6 + 2, 9 + 1, -\} = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_7^{(2)} &= \text{Min } 2\{m_4^{(1)} + d_{47}, m_4^{(2)} + d_{47}, m_6^{(1)} + d_{67}, m_6^{(2)} + d_{67}\} \\ &= \text{Min } 2\{5 + 4, 6 + 4, 7 + 1, 8 + 1\} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_8^{(2)} &= \text{Min } 2\{m_5^{(1)} + d_{58}, m_5^{(2)} + d_{58}, m_6^{(1)} + d_{68}, m_6^{(2)} + d_{68}, m_7^{(1)} + d_{78}, m_7^{(2)} + d_{78}\} \\ &= \text{Min } 2\{9 + 3, -, 7 + 5, 8 + 5, 8 + 7, 9 + 7\} = 13 \end{aligned}$$

سومین فاصله کوتاه از گره مبدا تا خودش نیز برابر با صفر است:

$$m_1^{(3)} = 0$$

چون فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می شود، بنابراین سومین فاصله کوتاه بین گره های ۱ و ۲ نیز وجود

ندارد.

$$m_2^{(3)} = -$$

در مورد گره ۳ داریم:

$$\begin{aligned} m_3^{(3)} &= \text{Min } 3\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_1^{(3)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}, m_2^{(3)} + d_{23}\} \\ &= \text{Min } 3\{0 + 3, 0 + 3, 0 + 3, 4 + 1, -, -\} = 5 \end{aligned}$$

به همین ترتیب می توان نوشت:

$$m_4^{(3)} = \text{Min}3\{m_1^{(1)} + d_{14}, m_1^{(2)} + d_{14}, m_1^{(3)} + d_{14}, m_3^{(1)} + d_{34}, m_3^{(2)} + d_{34}, m_3^{(3)} + d_{34}\} \\ = \text{Min}3\{0+6, 0+6, 0+6, 3+2, 5+2, 5+2\} = 7$$

$$m_5^{(3)} = -$$

$$m_6^{(3)} = \text{Min}3\{m_2^{(1)} + d_{26}, m_2^{(2)} + d_{26}, m_2^{(3)} + d_{26}, m_3^{(1)} + d_{36}, m_3^{(2)} + d_{36}, m_3^{(3)} + d_{36}, m_4^{(1)} + d_{46}, m_4^{(2)} + d_{46}, m_4^{(3)} + d_{46}, m_5^{(1)} + d_{56}, m_5^{(2)} + d_{56}, m_5^{(3)} + d_{56}\} \\ = \text{Min}3\{4+6, -, -, 3+5, 5+5, 5+5, 5+2, 6+2, 7+2, 9+1, -\} = 9 \\ m_7^{(3)} = \text{Min}3\{m_4^{(1)} + d_{47}, m_4^{(2)} + d_{47}, m_4^{(3)} + d_{47}, m_6^{(1)} + d_{67}, m_6^{(2)} + d_{67}, m_6^{(3)} + d_{67}\} \\ = \text{Min}3\{5+4, 6+4, 7+4, 7+1, 8+1, 9+1\} = 10$$

$$m_8^{(3)} = \text{Min}3\{m_5^{(1)} + d_{58}, m_5^{(2)} + d_{58}, m_5^{(3)} + d_{58}, m_6^{(1)} + d_{68}, m_6^{(2)} + d_{68}, m_6^{(3)} + d_{68}, m_7^{(1)} + d_{78}, m_7^{(2)} + d_{78}, m_7^{(3)} + d_{78}\} \\ = \text{Min}3\{9+3, -, -, 7+5, 8+5, 9+5, 8+7, 9+7, 10+7\} = 14$$

دومین و سومین مسیر کوتاه بین گره های ۱ تا ۸ با استفاده حرکت برگشت تعیین می شود. برای دومین

مسیر کوتاه دو جواب و برای سومین مسیر کوتاه یک جواب وجود دارد:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \quad \& \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$

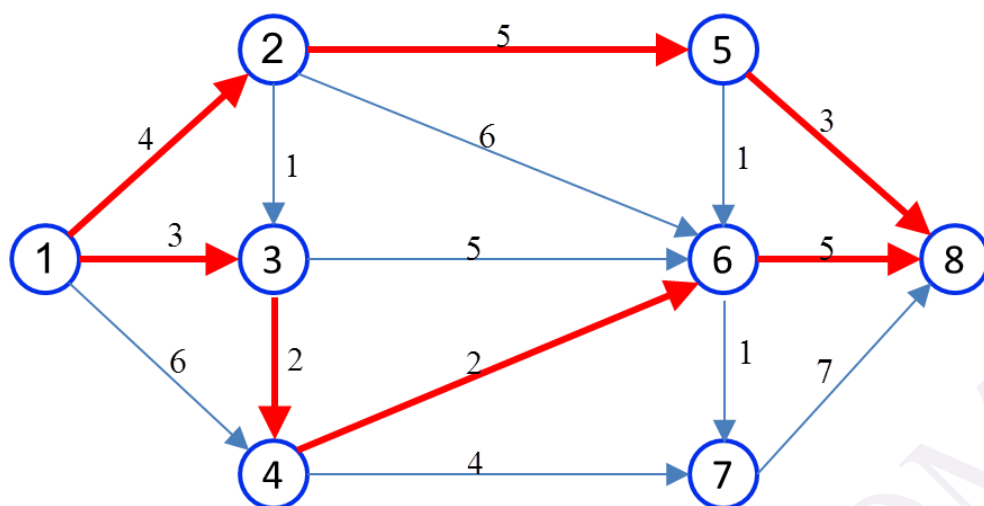
دومین مسیر کوتاه:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$

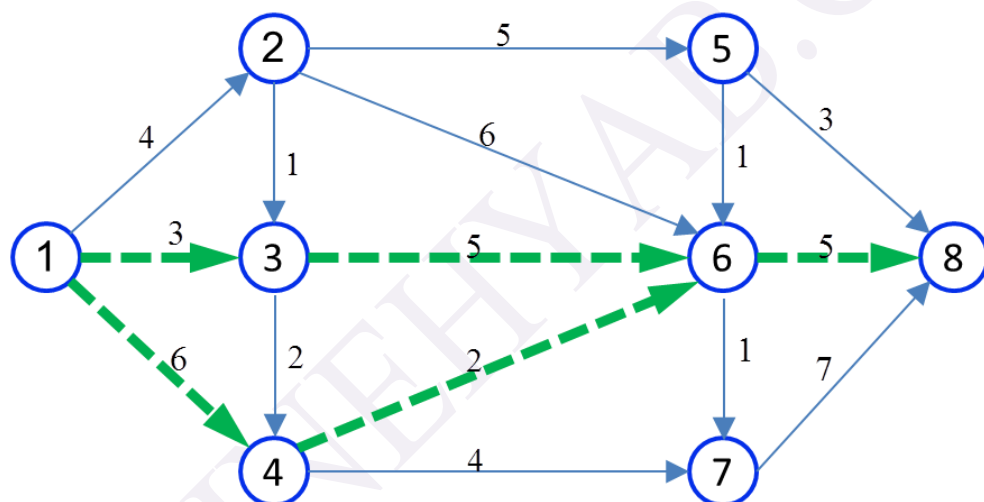
سومین مسیر کوتاه :

در شکل های زیر سه نوع مسیر نمایش داده شده است:

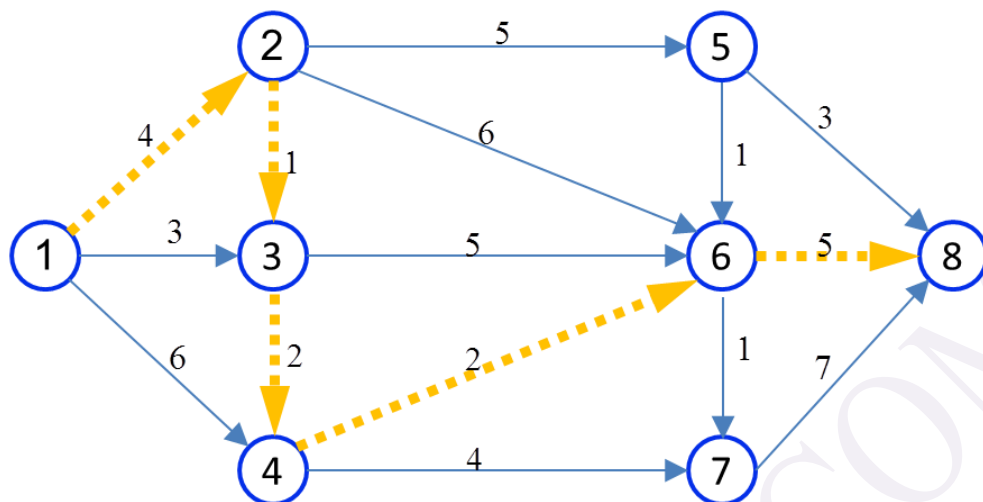
کوتاهترین مسیرها:



دومین مسیرهای کوتاه



سومین مسیر کوتاه



شبکه‌های دارای حلقه

در این شبکه‌ها حلقه وجود دارد، به این معنی که بین تعدادی از گره‌ها یک کمان برای رفت و یک کمان دیگر برای برگشت وجود دارد. در این جا برای حل مسایل در شبکه‌های حلقه دار (یافتن کوتاهترین مسیر) دو روش بیان می‌شود:

روش دیکسترا

روش دیکسترا *Dijkstra* به نام ابداع کننده آن موسوم است و در آن به هر گره دو کد اختصاص

می‌یابد:

m_i : کوتاهترین فاصله گره i از گره مبدا حرکت تا مرحله جاری الگوریتم که به آن کد موقت گفته

می‌شود زیر ممکن است در مراحل بعدی، فاصله کوتاهترین نیز بدست آید.

M_i : کوتاهترین فاصله مطلق گره i از گره مبدا حرکت که کد دایم نام دارد زیر در مراحل بعدی نیز

فاصله کوتاهتر از آن بدست نخواهد آمد.

الگوریتم دیکسترا به صورت زیر است:

گام ۱: کد دایم برابر با صفر به گره شروع اختصاص دهید ($M_1 = 0$)

گام ۲: به گره‌های مجاور گره‌هایی که کد دایم گرفته اند، با استفاده از رابطه زیر کد موقت اختصاص

دهید:

$$m_j = M_i + d_{ij}$$

که در آن d_{ij} فاصله مستقیم از گره i با کد دایم تا گره j که بایستی به آن کد موقت اختصاص یابد، است:

چنانچه گره‌ای پیش از این کد موقت گرفته است، آن کد با کد موقت جدید مقایسه و کد کوچکتر برگزیده می‌شود. سپس از بین کلیه گره‌هایی که تاکنون کد موقت گرفته اند، گره‌ای که کوچکترین کد را دارد، آن کد را به کد دایم تبدیل کنید. اکنون به گره‌های مجاور گره‌ای که کد دایم گرفته، کد موقت اختصاص و همین طور ادامه دهید.

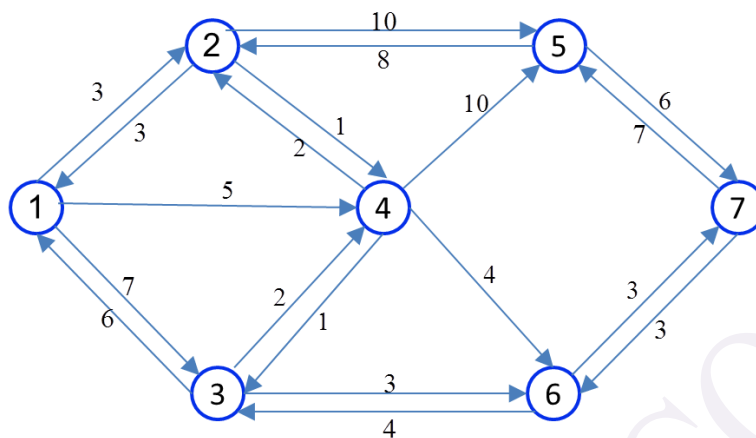
گام ۳: هنگامی که گره پایان (مقصد) کد دایم گرفت، متوقف شوید. M_n نشان دهنده کوتاهترین فاصله گره پایان از گره شروع است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهترین مسیر، از روش حرکت برگشت با رابطه زیر استفاده کنید:

$$M_i = M_j - d_{ij}$$

برای روشن شدن مراحل الگوریتم، مثال زیر را بررسی کنید.

مثال: کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره‌های ۱ و ۷ در شبکه زیر را با بهره‌گیری از روش دیکسترا تعیین نمایید.



حل: کد دایم گره ۱ (مبدا حرکت) برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$M_1 = 0$$

چون گره ۱ کد دایم گرفته، به گره‌های مجاور آن کد موقت اختصاص می‌یابد:

$$m_2 = M_1 + d_{12} = 0 + 3 = 3$$

$$m_3 = M_1 + d_{13} = 0 + 7 = 7$$

$$m_4 = M_1 + d_{14} = 0 + 5 = 5$$

حداقل کدهای موقت موجود تا کنون برابر با ۳ بدست می‌آید بنابراین کد موقت گره ۲ تبدیل به کد

دایم می‌شود:

$$\text{Min}(3, 7, 5) = 3 \rightarrow M_2 = 3$$

به گره‌های مجاور گره ۲ که کد دایم گرفته، کد موقت داده می‌شود:

$$m_4 = M_2 + d_{24} = 3 + 1 = 4$$

$$m_5 = M_2 + d_{25} = 3 + 10 = 13$$

گره ۴ از پیش دارای کد موقت برابر با ۵ بود، اما در این مرحله کد موقت جدید برابر با ۴ برای آن

بدست آمده است. از آنجا که کد موقت جدید کوچکتر از کد قبلی است، بنابراین جایگزین آن می‌شود:

$$m_4 = \text{Min}(5, 4) = 4$$

حداقل کدهای موقت موجود تاکنون برابر با ۴ مربوط به گره ۴ است:

$$\text{Min}(7, 4, 13) = 4 \rightarrow M_4 = 4$$

فرایند به همین صورت ادامه می‌یابد:

$$m_3 = M_4 + d_{43} = 4 + 1 = 5 \rightarrow m_3 = 5$$

$$m_5 = M_4 + d_{45} = 4 + 10 = 14 \rightarrow m_5 = 13$$

$$m_6 = M_4 + d_{46} = 4 + 4 = 8$$

$$\text{Min}(m_3, m_5, m_6) = \text{Min}(5, 13, 8) = 5 \rightarrow M_3 = 5$$

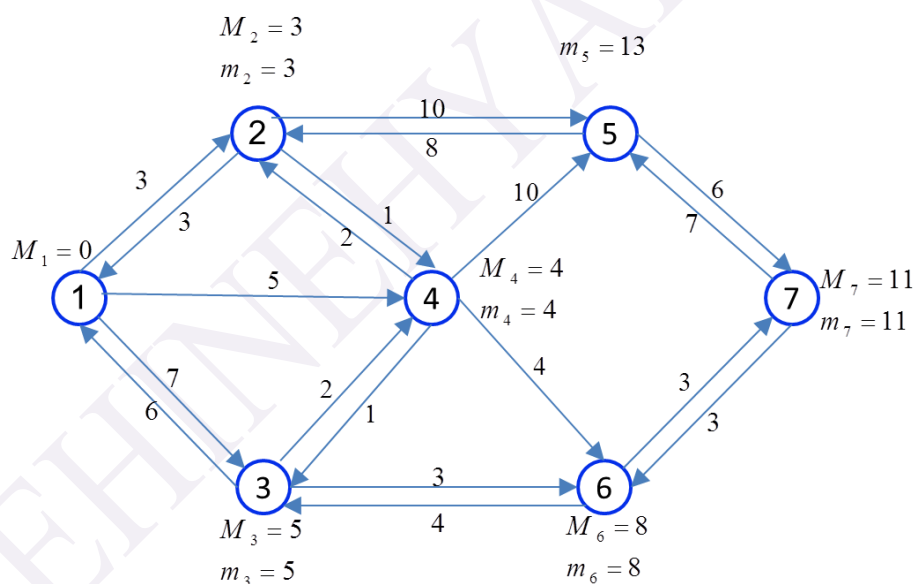
$$m_6 = M_3 + d_{36} = 5 + 3 = 8 \rightarrow m_6 = 8$$

$$\text{Min}(m_5, m_6) = \text{Min}(13, 8) = 8 \rightarrow M_6 = 8$$

$$m_7 = M_6 + d_{67} = 8 + 3 = 11$$

$$\text{Min}(m_5, m_7) = \text{Min}(13, 11) = 11 \rightarrow M_7 = 11$$

شکل زیر خلاصه نتایج مراحل مختلف الگوریتم را نشان می‌دهد.



به منظور تعیین کوتاهترین مسیر بین گره‌های ۱ و ۷ از حرکت برگشت استفاده می‌شود. روش کار

مانند آنچه که در شبکه‌های بدون حلق بیان شد، است:

$$m_7 - d_{57} = 11 - 6 = 5 \neq M_5$$

$$m_7 - d_{67} = 11 - 3 = 8 = M_6$$

کمان (۶، ۷) بر کوتاهترین مسیر واقع شده است.

$$m_6 - d_{46} = 8 - 4 = 4 = M_4$$

$$m_6 - d_{36} = 8 - 3 = 5 = M_3$$

کمان‌های (۴,۶) و (۳,۶) بر کوتاهترین مسیر واقع هستند.

$$m_3 - d_{43} = 5 - 1 = 4 = M_4$$

$$m_3 - d_{13} = 5 - 7 = -2 \neq M_1$$

کمان (۳,۴) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

$$m_4 - d_{24} = 4 - 1 = 3 = M_2$$

$$m_4 - d_{14} = 4 - 5 = -1 \neq M_1$$

کمان (۲,۴) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

$$m_2 - d_{12} = 3 - 3 = 0 = M_1$$

$$m_2 - d_{25} = 3 - 8 = -5 \neq M_5$$

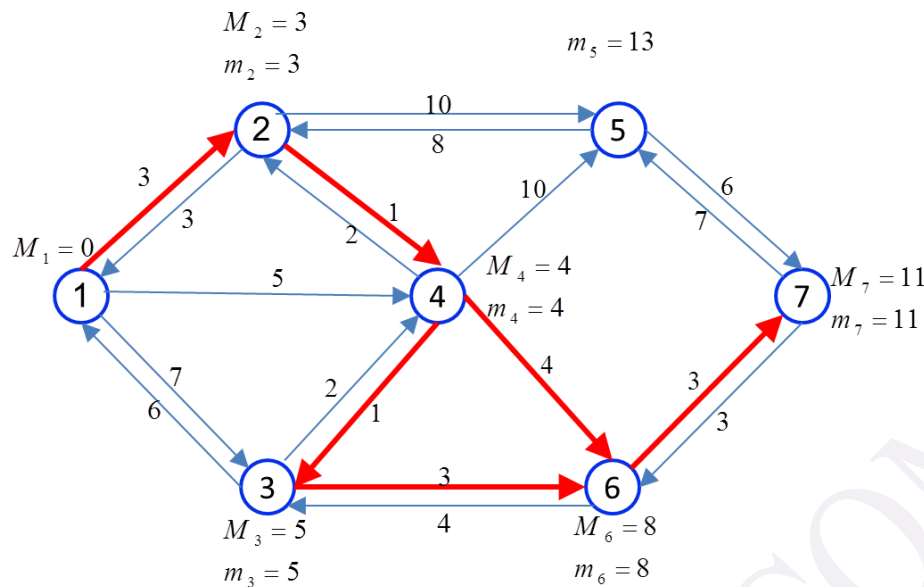
کمان (۱,۲) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

بنابراین در این شبکه، دو مسیر وجود دارد که کوتاهترین فاصله را دارند:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

شکل زیر، کوتاهترین مسیرهای شبکه به صورت زیر است:



روش جامع کوتاهترین مسیر

دیکسترا روش آسانی برای تعیین کوتاهترین مسیر در شبکه است، اما ضعف روش در این است که با هر بار اجرای الگوریتم، فقط کوتاهترین فاصله بین دو گره مبدا و مقصد مشخص می‌شود. اما با اجرای الگوریتم روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره‌ها از یکدیگر قابل محاسبه است.

اگر شبکه مورد نظر n گره داشته باشد، گره شروع با شماره ۱ و گره پایان با شماره n مشخص و سایر گره‌ها نیز به ترتیب صعودی از گره شروع تا پایان شماره گذاری می‌شوند.

در این روش دو ماتریس فاصله (D) و مسیر (P) تعریف می‌شود. d_{ij} نشان دهنده فاصله گره i از گره j و p_{ij} مسیر رسیدن از گره i به گره j است. هر گاه مسیر مستقیمی برای رسیدن از یک گره به گره دیگر وجود نداشته باشد، فاصله بین آن‌ها ∞ در نظر گرفته می‌شود و مسیر بین آن‌ها نیز با علامت تیره "-" مشخص خواهد شد. لازم به ذکر است ممکن است فاصله رفت از یک گره به گره دیگر یعنی d_{ij} با فاصله برگشت یعنی d_{ji} یکی نباشد.

به عنوان مثال d_{12} فاصله گره ۱ تا ۲ است.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، p_{12} مسیر رسیدن از گره ۱ به گره ۲ است.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

در هر مرحله j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)، گره j به عنوان واسط در نظر گرفته می‌شود و فاصله و مسیر رسیدن بین هر دو گره غیر از گره j با استفاده از این واسطه بدست می‌آید. اگر این فاصله از فاصله قبلی کمتر باشد، جایگزین آن می‌شود و در غیر این صورت فاصله قبلی همچنان حفظ می‌شود. به بیان دیگر، ماتریس‌های مرحله $j-1$ یعنی D_{j-1} و P_{j-1} توسط روابط زیر به ماتریس‌های مرحله j یعنی D_j و P_j تبدیل خواهند شد.

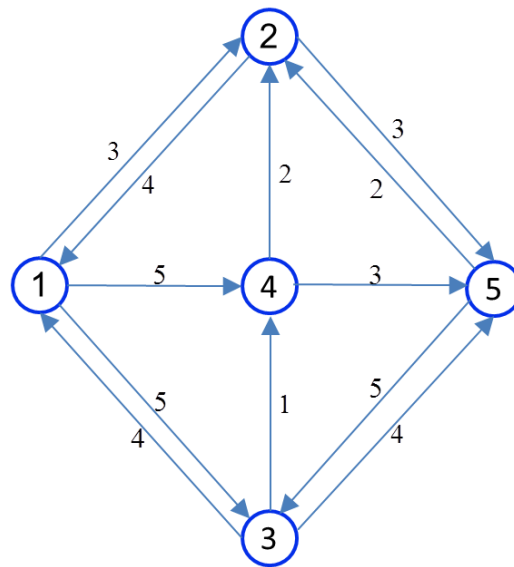
$$d_{ik} = \begin{cases} d_{ik} & \text{if } d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk} \\ d_{ij} + d_{jk} & \text{if } d_{ik} > d_{ij} + d_{jk} \end{cases} = \text{Min}(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk}), i \neq j \neq k$$

$$p_{ik} = \begin{cases} p_{ik} & \text{if } d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk} \\ p_{ij} & \text{if } d_{ik} > d_{ij} + d_{jk} \end{cases}$$

توضیحات بیشتر در قالب یک مثال ارائه می‌شود:

مثال: با بکاربردن روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره‌های شبکه

شکل زیر را بدست آورید.



حل: ابتدا باید ماتریس‌های D_0 و P_0 را تشکیل دهید.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 0 & 1 & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & - \\ 1 & - & - & - & 5 \\ 1 & - & - & 4 & 5 \\ - & 2 & - & - & 5 \\ - & 2 & 3 & - & - \end{bmatrix}$$

کار از یک گره به طور دلخواه (در این جا گره ۱) آغاز و این گره به عنوان واسطه در نظر گرفته می‌شود. فاصله دو به دو گره‌های ۲ تا ۵ با واسطه گره ۱ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد:

مرحله ۱ (گره ۱ واسطه): فاصله بین گره ۲ و ۳ در ماتریس برابر با ∞ است، در حالیکه از طریق گره واسطه یعنی گره ۱ این فاصله معادل ۹ واحد خواهد بود. چون فاصله بدست آمده از طریق واسطه کمتر از فاصله مندرج در ماتریس است، جایگزین آن می‌شود:

$$d_{23} = \text{Min}(d_{23}, d_{21} + d_{13}) = \text{Min}(\infty, 4 + 5) = 9 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می‌کند}$$

یعنی تا این مرحله، برای رسیدن از گره ۲ به گره ۳ بایستی از طریق گره ۱ حرکت کرد و مسافت طی شده در این حرکت برابر با ۹ واحد فاصله است. به همین صورت برای سایر گره‌ها عمل می‌شود:

$$d_{24} = \text{Min}(d_{24}, d_{21} + d_{14}) = \text{Min}(\infty, 4 + 5) = 9 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می‌کند}$$

$$d_{25} = \text{Min}(d_{25}, d_{21} + d_{15}) = \text{Min}(3, 4 + \infty) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{32} = \text{Min}(d_{32}, d_{31} + d_{12}) = \text{Min}(\infty, 4 + 3) = 7 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{34} = \text{Min}(d_{34}, d_{31} + d_{14}) = \text{Min}(1, 4 + 5) = 1 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{35} = \text{Min}(d_{35}, d_{31} + d_{15}) = \text{Min}(4, 4 + \infty) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{42} = \text{Min}(d_{42}, d_{41} + d_{12}) = \text{Min}(2, \infty + 3) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{43} = \text{Min}(d_{43}, d_{41} + d_{13}) = \text{Min}(\infty, \infty + 5) = \infty \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{45} = \text{Min}(d_{45}, d_{41} + d_{15}) = \text{Min}(3, \infty + \infty) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{52} = \text{Min}(d_{52}, d_{51} + d_{12}) = \text{Min}(2, \infty + 3) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{53} = \text{Min}(d_{53}, d_{51} + d_{13}) = \text{Min}(5, \infty + 5) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{54} = \text{Min}(d_{54}, d_{51} + d_{14}) = \text{Min}(\infty, \infty + 5) = \infty \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

ملاحظه می شود که در این مرحله فقط فاصله و مسیر از گره ۲ به ۴ و همچنین از گره ۳ به ۲ تغییر

می یابد. بنابراین ماتریس های این مرحله عبارتند از:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ - & 2 & - & - & 5 \\ - & 2 & 3 & - & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۲ (گره ۲ واسطه)

$$d_{13} = \text{Min}(d_{13}, d_{12} + d_{23}) = \text{Min}(5, 3 + 9) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{14} = \text{Min}(d_{14}, d_{12} + d_{24}) = \text{Min}(5, 3 + 9) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{15} = \text{Min}(d_{15}, d_{12} + d_{25}) = \text{Min}(\infty, 3 + 3) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{31} = \text{Min}(d_{31}, d_{32} + d_{21}) = \text{Min}(4, 7 + 4) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{34} = \text{Min}(d_{34}, d_{32} + d_{24}) = \text{Min}(1, 7 + 9) = 1 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{35} = \text{Min}(d_{35}, d_{32} + d_{25}) = \text{Min}(4, 7 + 3) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{41} = \text{Min}(d_{41}, d_{42} + d_{21}) = \text{Min}(\infty, 2 + 4) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{43} = \text{Min}(d_{43}, d_{42} + d_{23}) = \text{Min}(\infty, 2 + 9) = 11 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{45} = \text{Min}(d_{45}, d_{42} + d_{25}) = \text{Min}(3, 2 + 3) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{51} = \text{Min}(d_{51}, d_{52} + d_{21}) = \text{Min}(\infty, 2 + 4) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{53} = \text{Min}(d_{53}, d_{52} + d_{23}) = \text{Min}(5, 2 + 9) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{54} = \text{Min}(d_{54}, d_{52} + d_{24}) = \text{Min}(\infty, 2 + 9) = 11 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

در این مرحله فاصله و مسیر از گره ۱ به ۵، از گره ۴ به ۱، از گره ۴ به ۳، از گره ۵ به ۱، و از گره ۵ به

۴ تغییر می یابد. بنابراین می توان ماتریس های مرحله ۲ را به صورت زیر نوشت:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۳ (گره ۳ واسطه)

$$d_{12} = \text{Min}(d_{12}, d_{13} + d_{32}) = \text{Min}(3, 5 + 7) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{14} = \text{Min}(d_{14}, d_{13} + d_{34}) = \text{Min}(5, 5 + 1) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{15} = \text{Min}(d_{15}, d_{13} + d_{35}) = \text{Min}(6, 5 + 4) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{21} = \text{Min}(d_{21}, d_{23} + d_{31}) = \text{Min}(4, 9 + 4) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{24} = \text{Min}(d_{24}, d_{23} + d_{34}) = \text{Min}(9, 9 + 1) = 9 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{25} = \text{Min}(d_{25}, d_{23} + d_{35}) = \text{Min}(3, 9 + 4) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{41} = \text{Min}(d_{41}, d_{43} + d_{31}) = \text{Min}(6, 11 + 4) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{42} = \text{Min}(d_{42}, d_{43} + d_{32}) = \text{Min}(2, 11 + 7) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{45} = \text{Min}(d_{45}, d_{43} + d_{35}) = \text{Min}(3, 11 + 4) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{51} = \text{Min}(d_{51}, d_{53} + d_{31}) = \text{Min}(6, 5 + 4) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{52} = \text{Min}(d_{52}, d_{53} + d_{32}) = \text{Min}(2, 5 + 7) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{54} = \text{Min}(d_{54}, d_{53} + d_{34}) = \text{Min}(11, 5 + 1) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

در مرحله ۳ تنها فاصله و مسیر از گره ۵ به ۴ تغییر می یابد و در نتیجه می توان ماتریس های مرحله ۳

را به صورت زیر داشت:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۴ (گره ۴ واسطه)

$$d_{12} = \text{Min}(d_{12}, d_{14} + d_{42}) = \text{Min}(3, 5 + 2) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{13} = \text{Min}(d_{13}, d_{14} + d_{43}) = \text{Min}(5, 5 + 11) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{15} = \text{Min}(d_{15}, d_{14} + d_{45}) = \text{Min}(6, 5 + 3) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{21} = \text{Min}(d_{21}, d_{24} + d_{41}) = \text{Min}(4, 9 + 6) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{23} = \text{Min}(d_{23}, d_{24} + d_{43}) = \text{Min}(9, 9 + 11) = 9 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{25} = \text{Min}(d_{25}, d_{24} + d_{45}) = \text{Min}(3, 9 + 3) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{31} = \text{Min}(d_{31}, d_{34} + d_{41}) = \text{Min}(4, 1 + 6) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{32} = \text{Min}(d_{32}, d_{34} + d_{42}) = \text{Min}(7, 1 + 2) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{35} = \text{Min}(d_{35}, d_{34} + d_{45}) = \text{Min}(4, 1 + 3) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{51} = \text{Min}(d_{51}, d_{54} + d_{41}) = \text{Min}(6, 6 + 6) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{52} = \text{Min}(d_{52}, d_{54} + d_{42}) = \text{Min}(2, 6 + 2) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{53} = \text{Min}(d_{53}, d_{54} + d_{43}) = \text{Min}(5, 6 + 11) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

در مرحله ۴ نیز تنها فاصله و مسیر از گره ۳ به ۲ تغییر می یابد و ماتریس ها چنین خواهد بود.

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad P_4 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۵ (گره ۵ واسطه)

$$d_{12} = \text{Min}(d_{12}, d_{15} + d_{52}) = \text{Min}(3, 6 + 2) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{13} = \text{Min}(d_{13}, d_{15} + d_{53}) = \text{Min}(5, 5 + 6) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{14} = \text{Min}(d_{14}, d_{15} + d_{54}) = \text{Min}(5, 6 + 6) = 5 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{21} = \text{Min}(d_{21}, d_{25} + d_{51}) = \text{Min}(4, 3 + 6) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{23} = \text{Min}(d_{23}, d_{25} + d_{53}) = \text{Min}(9, 3 + 5) = 8 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

$$d_{24} = \text{Min}(d_{24}, d_{25} + d_{54}) = \text{Min}(9, 6 + 3) = 9 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{31} = \text{Min}(d_{31}, d_{35} + d_{51}) = \text{Min}(4, 4 + 6) = 4 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{32} = \text{Min}(d_{32}, d_{35} + d_{52}) = \text{Min}(3, 4 + 2) = 3 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{34} = \text{Min}(d_{34}, d_{35} + d_{54}) = \text{Min}(1, 4 + 6) = 1 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{41} = \text{Min}(d_{41}, d_{45} + d_{51}) = \text{Min}(6, 3 + 6) = 6 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{42} = \text{Min}(d_{42}, d_{45} + d_{52}) = \text{Min}(2, 3 + 2) = 2 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر نمی کند}$$

$$d_{43} = \text{Min}(d_{43}, d_{45} + d_{53}) = \text{Min}(11, 3 + 5) = 8 \rightarrow \text{فاصله و مسیر تغییر می کند}$$

ملاحظه می شود در این مرحله فاصله و مسیر از گره ۲ به ۳ و همچنین از گره ۴ به ۳ تغییر می کند.

بنابراین ماتریس های این مرحله (ماتریس نهایی) عبارتند از:

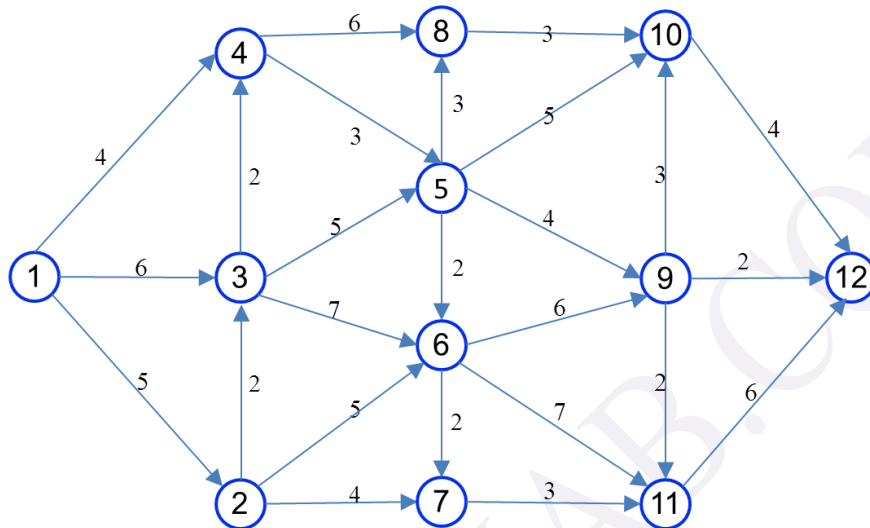
$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad P_5 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

الگوریتم به پایان می رسد و می توان کوتاهترین فاصله بین هر دو گره را از ماتریس D_5 بدست آورد.

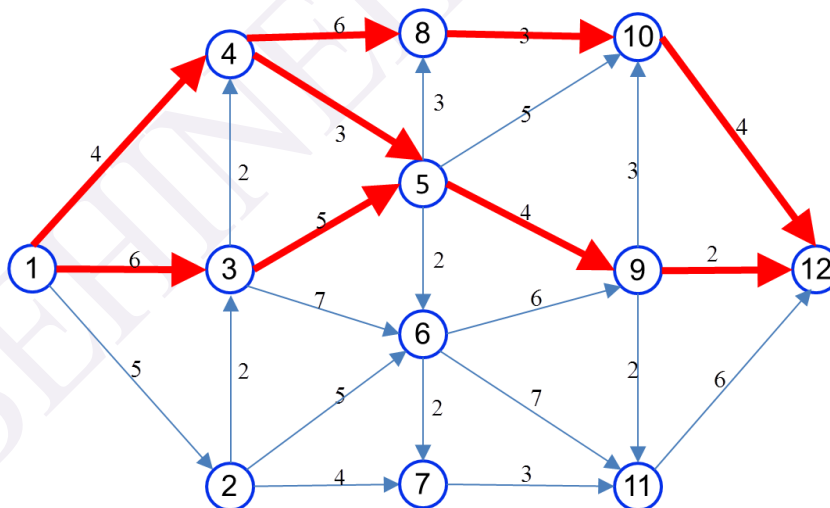
مسیر مربوطه نیز از طریق ماتریس P_5 قابل رهگیری است. به عنوان نمونه کوتاهترین فاصله بین گره ۲ و

گره ۴ در ماتریس D_5 برابر با ۹ واحد فاصله می‌باشد. از ماتریس P_5 ، کوتاهترین مسیر از گره ۲ تا گره ۴، از طریق گره ۱ است. کوتاهترین مسیر از گره ۱ تا گره ۴ نیز از طریق خود گره ۴ می‌باشد.

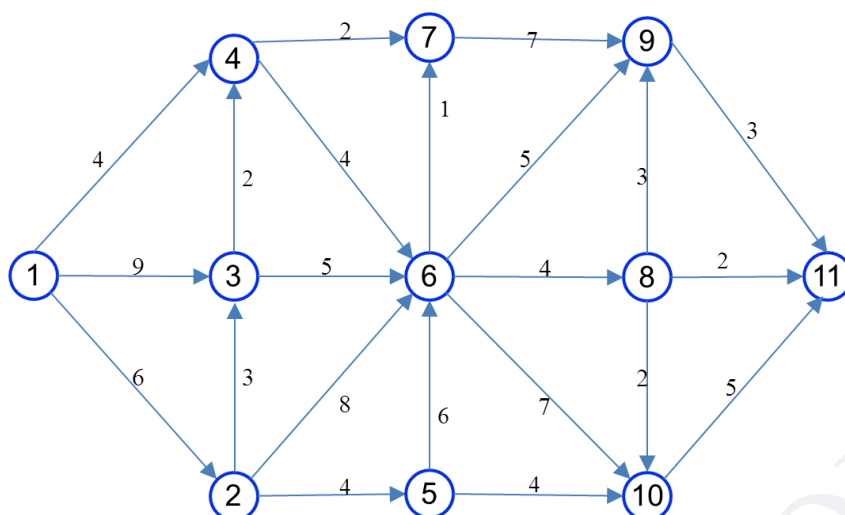
تمرین: کوتاهترین مسیر و فاصله از گره ۱ تا گره ۱۲ در شبکه شکل زیر کدام است:



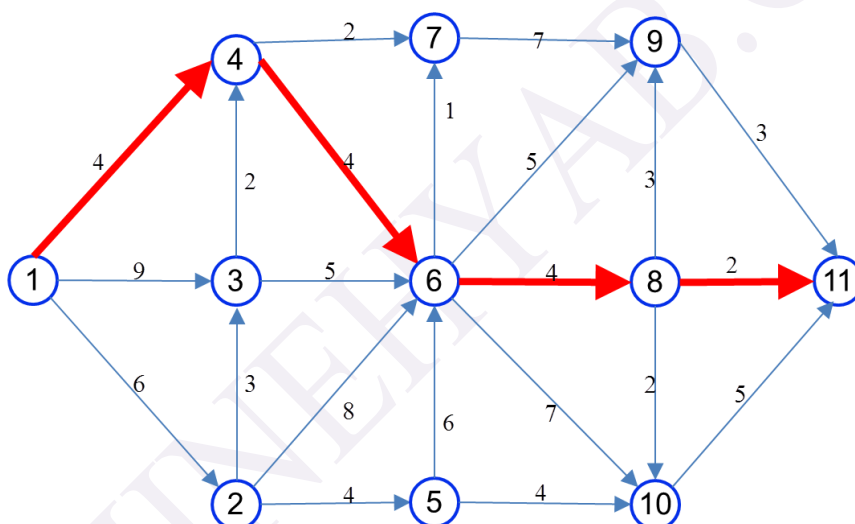
حل: کوتاهترین مسیرها به صورت زیر است



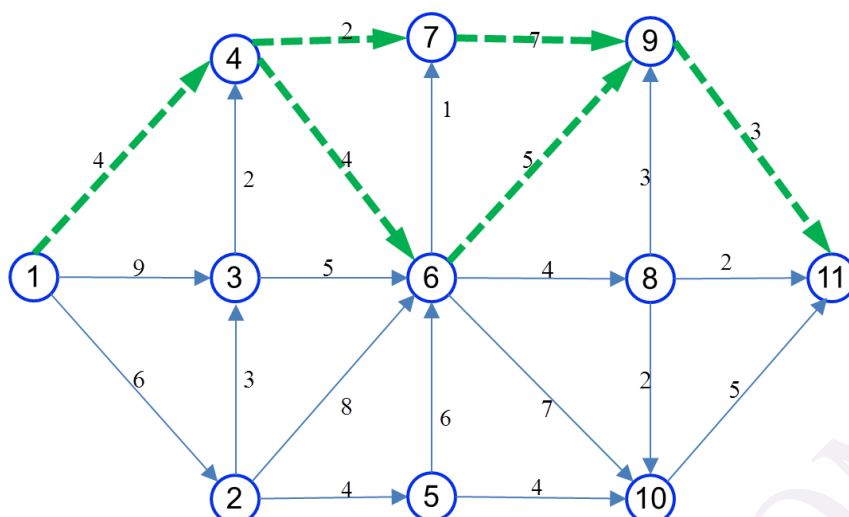
تمرین: کوتاهترین مسیر و دومین، سومین و چهارمین مسیر کوتاه از گره ۱ تا ۱۱ در شبکه شکل زیر را بدست آورید.



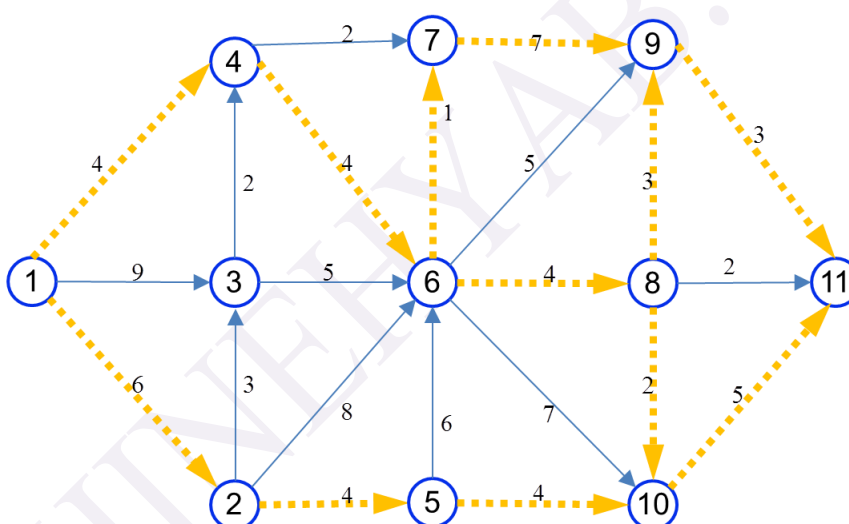
حل: کوتاهترین مسیر $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 11$ (طول مسیر برابر با ۱۴ است).



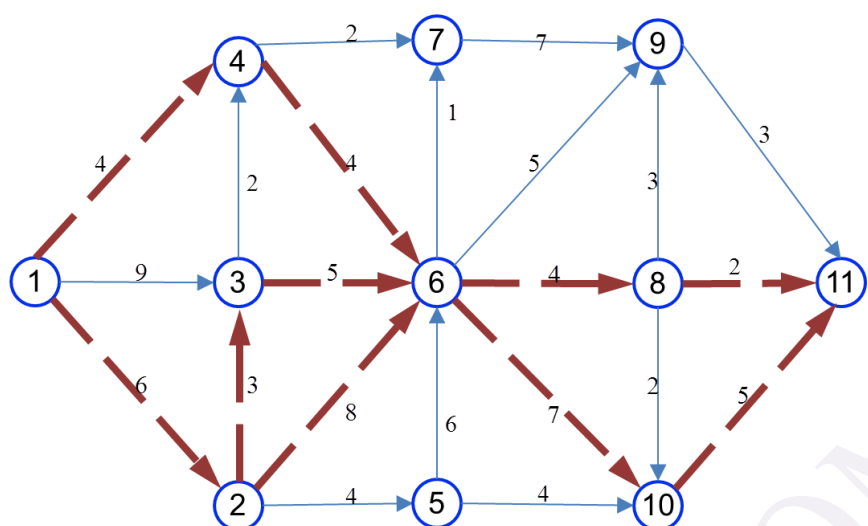
دومین مسیرهای کوتاه $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ (طول مسیر برابر با ۱۶ است).



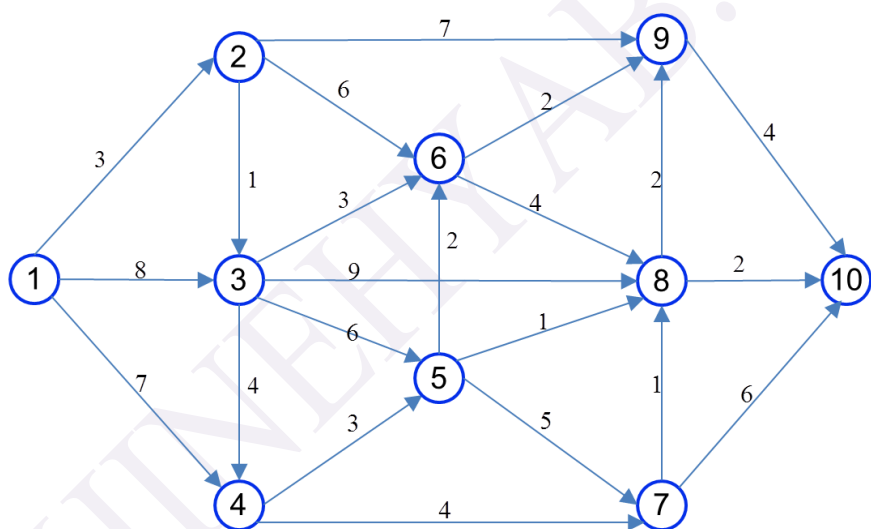
سومین مسیرهای کوتاه $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ (طول مسیر برابر ۱۹ است).



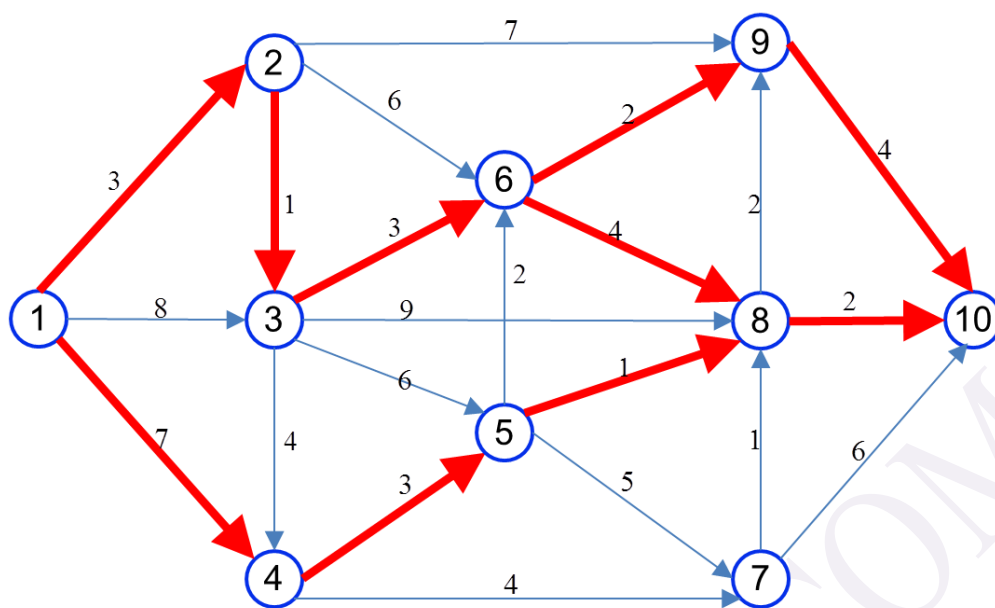
چهارمین مسیرهای کوتاه: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 11$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 11$ (طول مسیر برابر ۲۰ است).



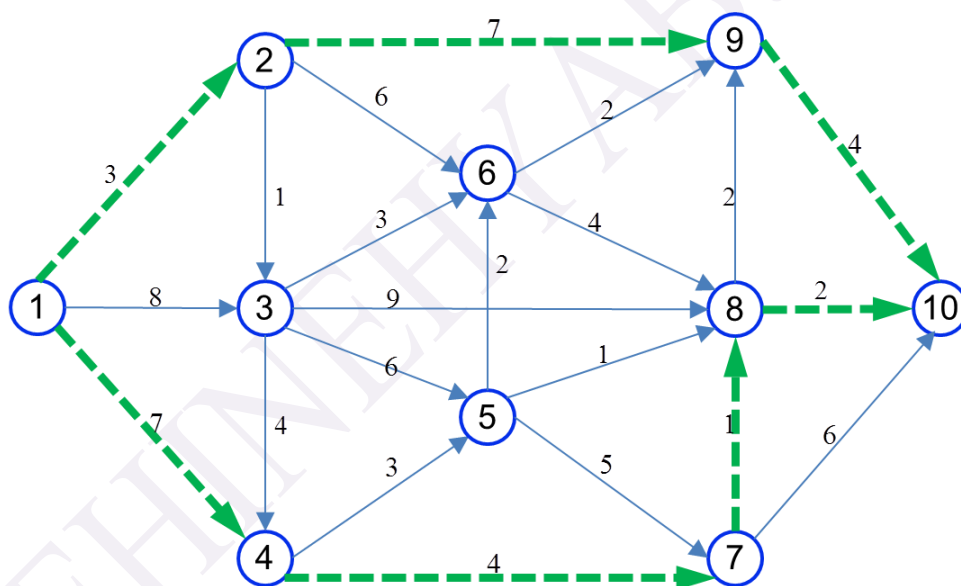
تمرین: کوتاهترین مسیر و دومین، سومین و چهارمین مسیر کوتاه از شهر شماره ۱ تا شهر شماره ۱۰ در شبکه شکل زیر را بدست آورید.



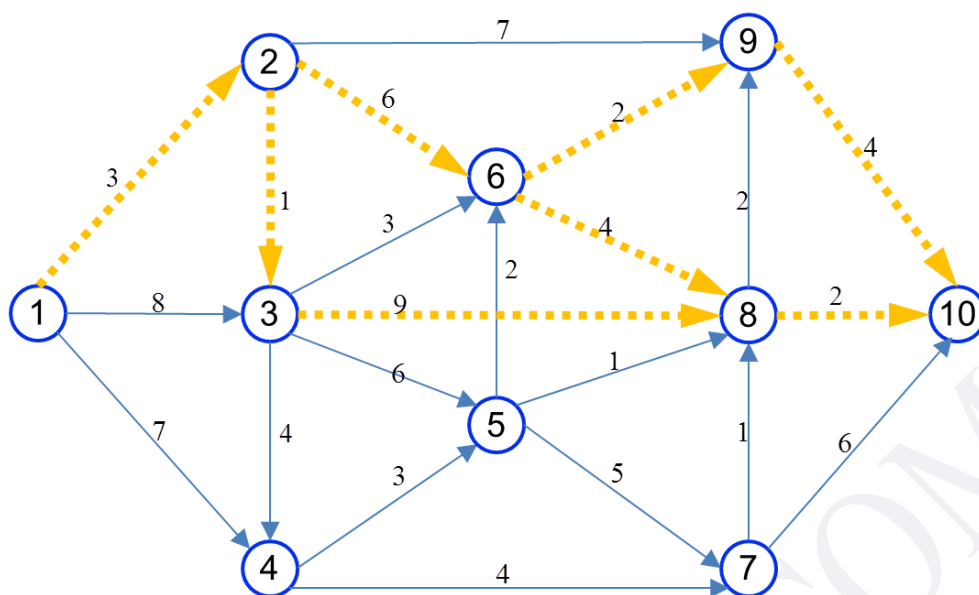
حل: کوتاهترین مسیرها به صورت $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ طول مسیر برابر ۱۳ است.



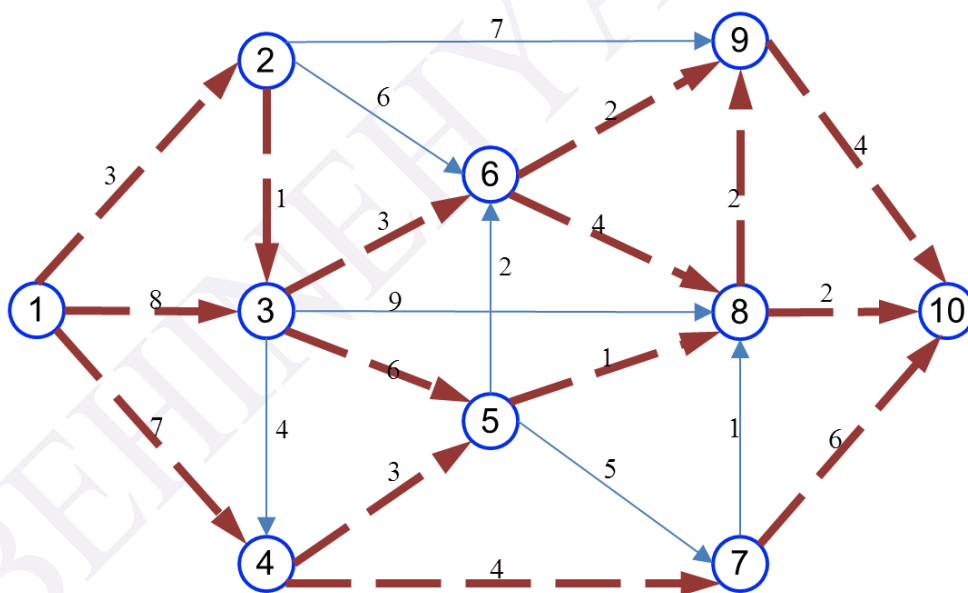
دومین مسیرهای کوتاه: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ هستند. طول مسیر برابر ۱۴ است.



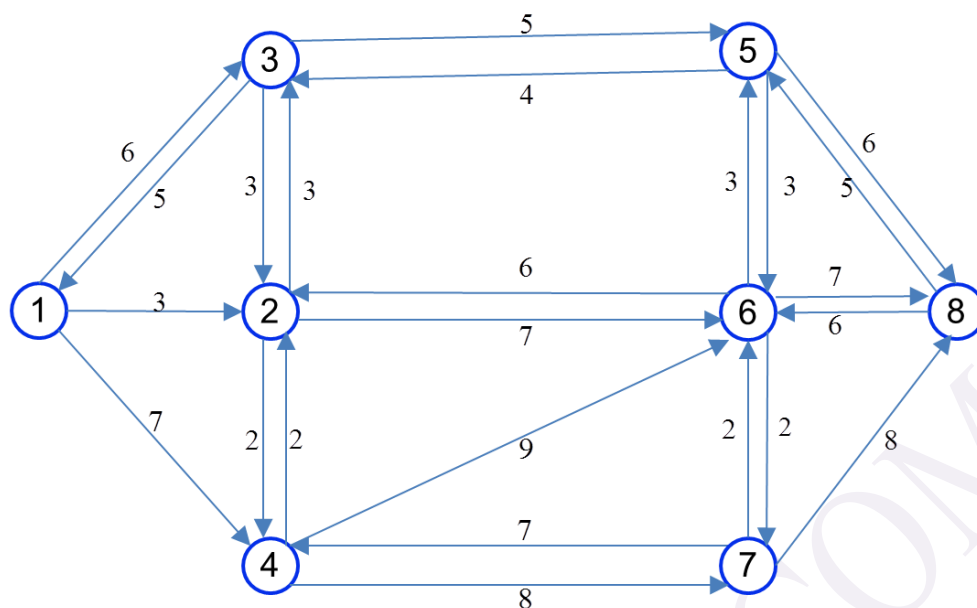
سومین مسیرهای کوتاه: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ هستند. طول مسیر برابر ۱۵ است.



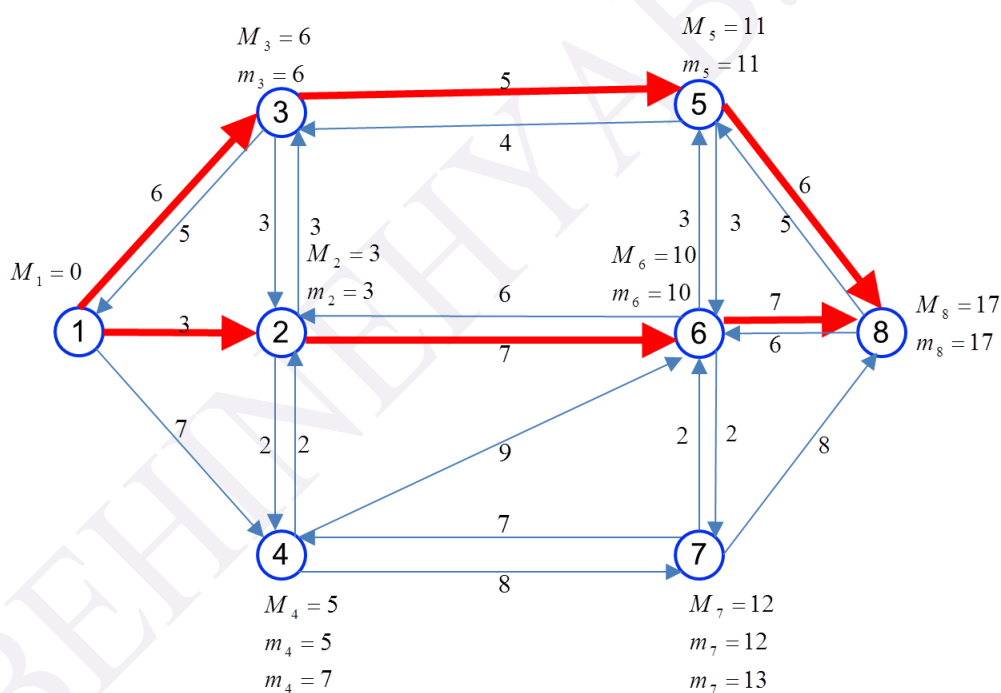
چهارمین مسیر کوتاه: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ و
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$. طول مسیر برابر ۱۷ است.



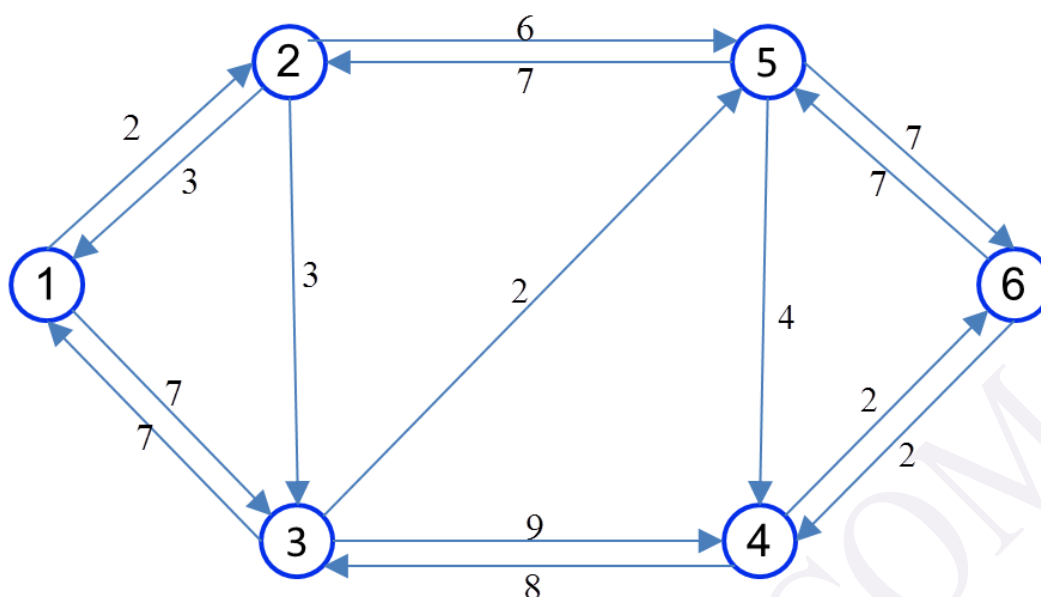
تمرین: کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره‌های ۱ و ۸ در شبکه شکل زیر را با بهره‌گیری از روش دیکسترا تعیین نمایید.



حل: کوتاهترین مسیرها به صورت زیر است:



تمرین: با به کار بردن روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره‌های شبکه شکل زیر را بدست آورید:



حل:

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & 6 & \infty \\ 7 & \infty & 0 & 9 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 7 & \infty & 4 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - & - & - \\ 1 & - & 3 & - & 5 & - \\ 1 & - & - & 4 & 5 & - \\ - & - & 3 & - & - & 6 \\ - & 2 & - & 4 & - & 6 \\ - & - & - & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

در ماتریس هر مرحله، موارد تغییر یافته با کادر مشخص شده است.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & 6 & \infty \\ 7 & \boxed{9} & 0 & 9 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 7 & \infty & 4 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - & - & - \\ 1 & - & 3 & - & 5 & - \\ 1 & \boxed{1} & - & 4 & 5 & - \\ - & - & 3 & - & - & 6 \\ - & 2 & - & 4 & - & 6 \\ - & - & - & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \boxed{5} & \infty & \boxed{8} & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \infty & 6 & \infty \\ 7 & 9 & 0 & 9 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 0 & \infty & 2 \\ \boxed{10} & 7 & \boxed{10} & 4 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} - & 2 & \boxed{2} & - & \boxed{2} & - \\ 1 & - & 3 & - & 5 & - \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & - \\ - & - & 3 & - & - & 6 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{2} & 4 & - & 6 \\ - & - & - & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & \boxed{14} & \boxed{7} & \infty \\ 3 & 0 & 3 & \boxed{12} & \boxed{5} & \infty \\ 7 & 9 & 0 & 9 & 2 & \infty \\ \boxed{15} & \boxed{17} & 8 & 0 & \boxed{10} & 2 \\ 10 & 7 & 10 & 4 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_3 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & \boxed{3} & \boxed{3} & - \\ 1 & - & 3 & \boxed{3} & \boxed{3} & - \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & - \\ \boxed{3} & \boxed{3} & 3 & - & \boxed{3} & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & - & 6 \\ - & - & - & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 14 & 7 & \boxed{18} \\ 3 & 0 & 3 & 12 & 5 & \boxed{14} \\ 7 & 9 & 0 & 9 & 2 & \boxed{11} \\ 15 & 17 & 8 & 0 & 10 & 2 \\ 10 & 7 & 10 & 4 & 0 & \boxed{6} \\ \boxed{17} & \boxed{19} & \boxed{10} & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_4 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 3 & 3 & \boxed{4} \\ 1 & - & 3 & 3 & 3 & \boxed{4} \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 & \boxed{4} \\ 3 & 3 & 3 & - & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & - & \boxed{4} \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{4} & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & \boxed{11} & 7 & \boxed{13} \\ 3 & 0 & 3 & \boxed{10} & 5 & \boxed{11} \\ 7 & 9 & 0 & \boxed{6} & 2 & \boxed{8} \\ 15 & 17 & 8 & 0 & 10 & 2 \\ 10 & 7 & 10 & 4 & 0 & 6 \\ 17 & \boxed{14} & 10 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_5 = \begin{bmatrix} - & 2 & \boxed{5} & 3 & 3 & \boxed{5} \\ 1 & - & \boxed{5} & 3 & 3 & \boxed{5} \\ 1 & 1 & \boxed{5} & 4 & 5 & \boxed{5} \\ 3 & 3 & 3 & - & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & - & 4 \\ 4 & \boxed{5} & 4 & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 11 & 7 & 13 \\ 3 & 0 & 3 & 10 & 5 & 11 \\ 7 & 9 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 15 & \boxed{16} & 8 & 0 & \boxed{9} & 2 \\ 10 & 7 & 10 & 4 & 0 & 6 \\ 17 & 14 & 10 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_6 = \begin{bmatrix} - & 2 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & - & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & \boxed{6} & 3 & - & \boxed{6} & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & - & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**