درس ۶: مسئله کوتاهترین مسیر

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

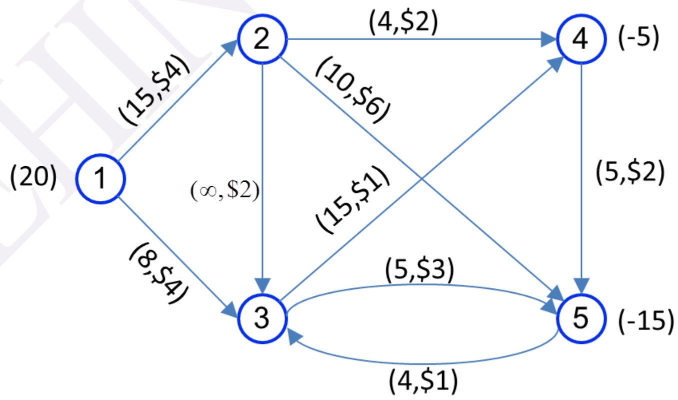
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در ایـن بخـش بـه بررسـی انـواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی‌جریان در شـبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل خاص کوتاهترین مسیر خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی‌جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصـد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مـورد نیـاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیما به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد کـه از طریـق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطـوط حمـل و نقـل را محـدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایـره‌هـای شـماره‌دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلا مواد مـی‌تواننـد از گـره ۱ بـه گـره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره *i* به گره *j* را بـه صـورت *i-j* نشـان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شـود کـه در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۴-۲)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینـه عبـور هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل

پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در آن برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت – نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان i-j است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Min & 4x_{12}+4x_{13}+2x_{23}+2x_{24}+6x_{25}+x_{34}+3x_{35}+2x_{45}+x_{53} \\
s.t. \\
(1) & x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & =20 \\
(2) & -x_{12} & & +x_{23} & +x_{24} & +x_{25} & & & & & =0 \\
(3) & & -x_{13} & -x_{23} & & & +x_{34} & +x_{35} & & -x_{53} & =0 \\
(4) & & & & -x_{24} & & -x_{34} & & +x_{45} & & =-5 \\
(5) & & & & & -x_{25} & & -x_{35} & -x_{45} & +x_{53} & =-15
\end{array}
$$

$$x_{12}\le 15; x_{13}\le 8; x_{23}\le \infty; x_{24}\le 4; x_{25}\le 10; x_{34}\le 15; x_{35}\le 5; x_{45}\le \infty; x_{53}\le 4.$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12}+x_{13}=20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره۱($x_{12}+x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23}+x_{24}+x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱+ و ۱- اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقا در

دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره‌ای کـه از آن سرچشـمه مـی‌گیرنـد و ۱- مربوطه به گره‌ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی‌مسئله کمترین جریان در شبکه را به n گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1, \ldots, n \\
&\qquad l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}
\end{aligned}
$$

مدل فوق، مدل عمومی‌مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابـل تبـدیل به فرم‌های ساده تری است که در ادامه مسئله کوتاهترین مسیر که مدل خاصی از مسئله جریـان در شـبکه است را بیان می‌کنیم.

کوتاهترین مسیر در شبکه

یکی از کاربردهای عملی تئوری شبکه‌هـا در حـل مسـائل موجـود در دنیـای واقـع مربـوط بـه تعیـین کوتاهترین مسیر در شبکه است. در این مبحث شبکه‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرند کـه گـره‌هـای آن بـه مثابه نقاط مختلف موجود در یک منطقه و شاخه‌ها نقش مسیرهای ارتباطی بین این نقاط را ایفا مـی‌کننـد. هر نقطه (گره) از این شبکه به عنوان مبدا حرکت و هر نقطه (گره) دیگر به عنوان مقصد مـی‌توانـد در نظـر گرفته شود. هدف، تعیین مسیری بین مبدا و مقصد حرکت است که اگر این مسیر برای حرکت انتخاب شود، کمترین فاصله طی می‌شود که به آن کوتاهترین مسیر در شبکه گفته می‌شود.

شبکه‌هایی که در رابطه با این مطلب مطرح می‌شوند، از لحاظی به دو نوع تقسیم می‌شوند:

- شبکه‌های بدون حلقه
- شبکه‌های دارای حلقه

در ادامه هر یک از این دو نوع شبکه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شبکه‌های بدون حلقه

این شبکه‌ها اغلب شبیه به شبکه‌های برداری ساده هستند، اما در این جا هر دو گره‌ای می‌توانند به عنوان گره‌های مبدا و مقصد حرکت در نظر گرفته شوند. برای حل مسائل در این شبکه‌ها معمولا روش ساده حسی بکار می‌رود.

روش ساده کوتاهترین مسیر

در این روش یک حرکت محاسباتی از گره مبدا(شروع) تا گره مقصد(پایان) انجام می‌شود. در طی این حرکت محاسباتی، به هر گره یک کد (m) اختصاص می‌یابد که نشان دهنده کوتاهترین فاصله آن گره از گره شروع است. فرض بر این است که شماره گره شروع برابر با ۱ و شماره گروه پایان معادل n در نظر گرفته شده و گره‌های میانی نیز به ترتیب صعودی شماره گذاری شده اند. گام‌های الگوریتم این روش به صورت زیر است:

گام ۱: به گره شروع، کد برابر با صفر اختصاص دهید($m_1 = 0$).

گام ۲: کد گره j (m_j) را از رابطه زیر بدست آورید:

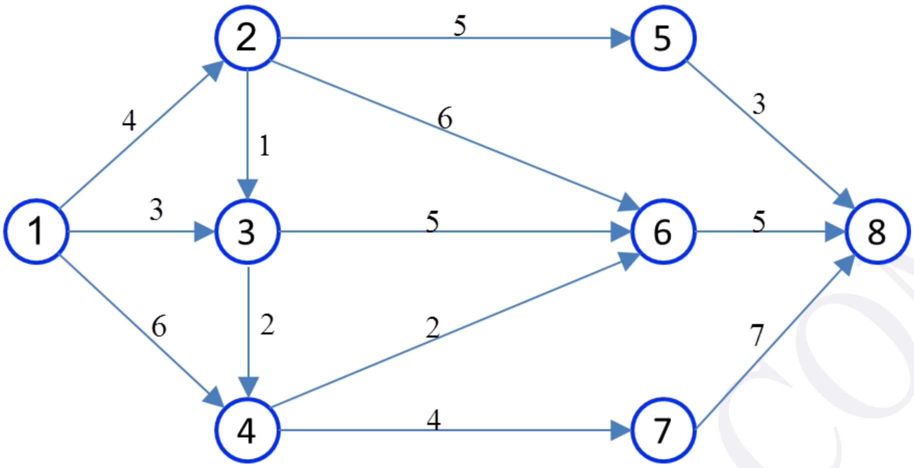
$$m_j = \underset{i \in S}{Min}(m_i + d_{ij}) \quad i = 1,2,\dots, j-1 \quad , \quad j = 2,3,\dots,n$$

که در آن S مجموعه گره‌هایی است که شاخه‌های ورودی به گره J از آن گره‌ها خارج شده اند و d_{ij} فاصله مستقیم از گره i تا گره j است

گام ۳: هنگامی‌که گره پایان کد گرفت (m_n)، این کد معرف کوتاهترین فاصله بین گروه شروع و پایان شبکه است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهترین مسیر، از روش حرکت برگشتی استفاده می‌شود. به بیان دیگر هر یک از شاخه‌های ورودی به یک گره که تعیین کننده کد آن گره است، بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد.

مثال: با استفاده از روش ساده حسی، کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره‌های ۱ و ۸ در شبکه شکل زیر را تعیین کنید. فاصله مستقیم بین هر دو گره مجاور بر روی شاخه متصل کننده آن دو درج شده است.



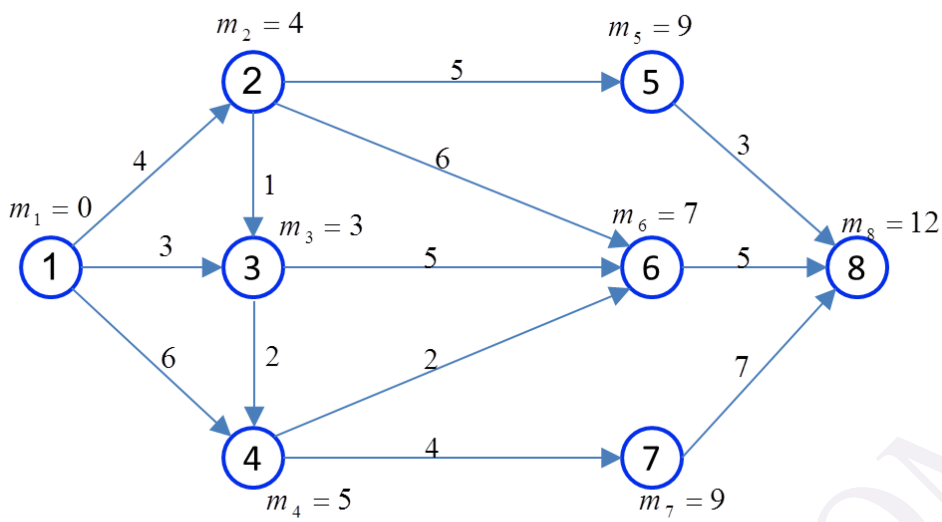
حل: ابتدا کد گره ۱ را برابر صفر در نظر گرفته می‌شود($m_1 = 0$).

برای گره ۲ می‌توان نوشت($m_2 = m_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4$)

برای گره ۳ چون دو مسیر برای رسیدن به این گره وجود دارد بایستی حداقل این دو مسیر در نظر گرفته شود:

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= m_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3 \\ m_3 &= m_2 + d_{23} = 4 + 1 = 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow m_3 = \min(3,5) = 3$$

محاسبات برای سایر گره‌ها نیز به همین ترتیب انجام می‌شود که نتایج آن در شکل زیر خلاصه شده است. ملاحظه می‌شود کوتاهترین فاصله گره ۸ از گره ۱ برابر با ۱۲ واحد است.



برای تعیین کوتاهترین مسیر بین گره‌های ۱ و ۸ از حرکت برگشت استفاده می‌شود. در این حرکت هر گره‌ای (j) که کد آن (m_j) در رابطه $m_i = m_j - d_{ij}$ صدق کند، بر روی کوتاهترین مسیر واقع است. حرکت از گره پایان آغاز می‌شود، سه شاخه به این گره وارد شده است:

$$m_8 - d_{58} = 12 - 3 = 9 = m_5$$
$$m_8 - d_{68} = 12 - 5 = 7 = m_6$$
$$m_8 - d_{78} = 12 - 7 = 5 \neq m_7$$

کمان‌ها (۵,۸) و (۶,۸) بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد. بنابرین تا کنون دو فقره کوتاهترین مسیر وجود دارد. ابتدا کار از گره ۵ ادامه می‌دهیم.

$$m_5 - d_{25} = 9 - 5 = 4 = m_2$$

کمان (۲,۵) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_2 - d_{12} = 4 - 4 = 0 = m_1$$

کمان (۱,۲) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

مسیر یکم مشخص شد. اکنون نوبت به مسیر دوم است/ کار را از گره ششم ادامه می‌دهیم.

$$m_6 - d_{26} = 7 - 6 = 1 \neq m_2$$
$$m_6 - d_{36} = 7 - 5 = 2 \neq m_3$$
$$m_6 - d_{46} = 7 - 2 = 5 = m_4$$

کمان (۴,۶) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

$$m_4 - d_{34} = 5 - 2 = 3 = m_3$$
$$m_4 - d_{14} = 5 - 6 = -1 \neq m_1$$

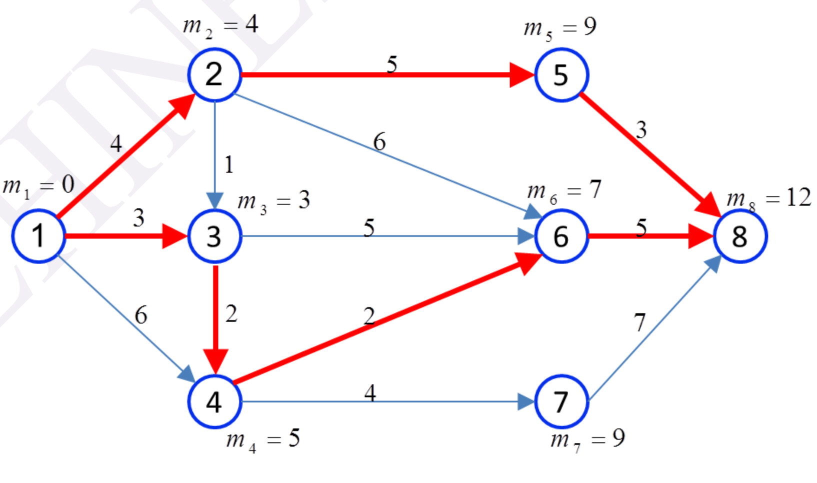
کمان (۳,۴) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_3 - d_{23} = 3 - 1 = 2 \neq m_2$$
$$m_3 - d_{13} = 3 - 3 = 0 = m_1$$

کمان (۱,۳) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

ملاحظه می‌شود در این شبکه، دو مسیر وجود دارد که کوتاهترین مسیر را دارد.

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8$$
$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$



چندمین (k-امین) مسیر کوتاه

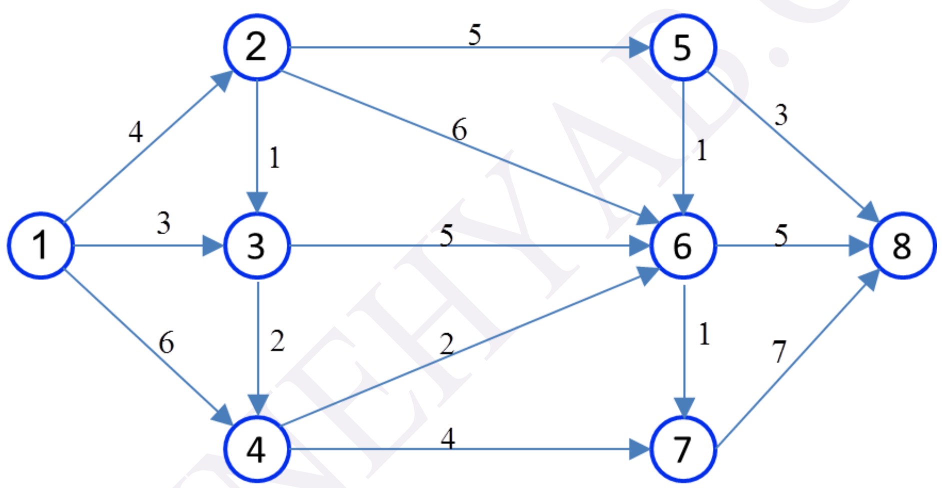
راننده یک اتوبوس مسافربری برای رساندن مسافرین خود از شهر مبدا (*X*) به شهر مقصد (*Z*) کوتاهترین مسیر را انتخاب کرده است که در طی آن از شهرهای *U*،*V* و *W* عبور می‌کند. فرض کنید در یک

هفته خاص، برای رفتن به شهر U مانعی وجود دارد، بنابراین راننده اتوبوس در نظر دارد از دومین کوتاهترین مسیر استفاده کند. این مثال نشان می‌دهد که گاهی اوقات لازم است که دومین، سومین یا به طور عمومیk امین کوتاهترین مسیر تعیین شد. برای تعیین k-امین مسیر کوتاه، تغییری به صورت زیر در گام دوم روش ساده کوتاهترین مسیر ایجاد می‌شود.

$$m_j^{(k)} = \underset{i \in S}{Mink}\,\{m_i^{(r)} + d_{ij}\} \quad = 1, 2, \ldots, j-1;\ j = 2, 3, \ldots, n; 1 \le r \le k$$

که در آن منظور از $Mink$ انتخاب k-امین مقدار حداقل در داخل $\{\}$ است.

مثال: یکمین، دومین، سومین مسیر کوتاه بین گره‌های ۱ و ۸ را در شبکه زیر تعیین کنید.



حل: چنانچه به روش ساده کوتاهترین فاصله عمل شود، کوتاهترین فاصله (یکمین فاصله کوتاه) تا هر گره بدست می‌آید:

$$m_1^{(1)} = 0 \quad , \quad m_2^{(1)} = 4 \quad , \quad m_3^{(1)} = 3 \quad , \quad m_3^{(1)} = 5$$
$$m_5^{(1)} = 9 \quad , \quad m_6^{(1)} = 7 \quad , \quad m_7^{(1)} = 8 \quad , \quad m_8^{(1)} = 12$$

در خصوص دومین فاصله کوتاه، برای گره مبدا همچنان کد برابر با صفر اختصاص می‌یابد.

$$m_1^{(2)} = 0$$

فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می‌شود و بنابراین دومین فاصله کوتاه بین گره‌های ۱ و ۲ وجود ندارد:

$m_2^{(2)} = -$

اما برای گره ۳ می‌توان نوشت:

$$m_3^{(2)} = Min2\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}\}$$
$$= Min2\{0+3, 0+3, 4+1, -\} = 5$$

برای سایر گره‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$m_4^{(2)} = Min2\{m_1^{(1)} + d_{14}, m_1^{(2)} + d_{14}, m_3^{(1)} + d_{34}, m_3^{(2)} + d_{34}\}$$
$$= Min2\{0+6, 0+6, 3+2, 5+2\} = 6$$

$m_5^{(2)} = -$

$$m_6^{(2)} = Min2\{m_2^{(1)} + d_{26}, m_2^{(2)} + d_{26}, m_3^{(1)} + d_{36}, m_3^{(2)} + d_{36}, m_4^{(1)} + d_{46}, m_4^{(2)} + d_{46}, m_5^{(1)} + d_{56}, m_5^{(2)} + d_{56}\}$$
$$= Min2\{4+6, -, 3+5, 5+5, 5+2, 6+2, 9+1, -\} = 8$$
$$m_7^{(2)} = Min2\{m_4^{(1)} + d_{47}, m_4^{(2)} + d_{47}, m_6^{(1)} + d_{67}, m_6^{(2)} + d_{67}\}$$
$$= Min2\{5+4, 6+4, 7+1, 8+1\} = 9$$

$$m_8^{(2)} = Min2\{m_5^{(1)} + d_{58}, m_5^{(2)} + d_{58}, m_6^{(1)} + d_{68}, m_6^{(2)} + d_{68}, m_7^{(1)} + d_{78}, m_7^{(2)} + d_{78}\}$$
$$= Min2\{9+3, -, 7+5, 8+5, 8+7, 9+7\} = 13$$

سومین فاصله کوتاه از گره مبدا تا خودش نیز برابر با صفر است:

$m_1^{(3)} = 0$

چون فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می‌شود، بنابراین سومین فاصله کوتاه بین گره‌های ۱ و ۲ نیز وجود ندارد.

$m_2^{(3)} = -$

در مورد گره ۳ داریم:

$$m_3^{(3)} = Min3\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_1^{(3)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}, m_2^{(3)} + d_{23}\}$$
$$= Min3\{0+3, 0+3, 0+3, 4+1, -, -\} = 5$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} m_4^{(3)} &= Min3\{m_1^{(1)}+d_{14}, m_1^{(2)}+d_{14}, m_1^{(3)}+d_{14}, m_3^{(1)}+d_{34}, m_3^{(2)}+d_{34}, m_3^{(3)}+d_{34}\} \\ &= Min3\{0+6, 0+6, 0+6, 3+2, 5+2, 5+2\} = 7 \end{aligned}$$

$$m_5^{(3)} = -$$

$$\begin{aligned} m_6^{(3)} &= Min3\{m_2^{(1)}+d_{26}, m_2^{(2)}+d_{26}, m_2^{(3)}+d_{26}, m_3^{(1)}+d_{36}, m_3^{(2)}+d_{36}, m_3^{(3)}+d_{36}, m_4^{(1)}+d_{46}, m_4^{(2)} \\ &\quad +d_{46}, m_4^{(3)}+d_{46}, m_5^{(1)}+d_{56}, m_5^{(2)}+d_{56}, m_5^{(3)}+d_{56}\} \\ &= Min3\{4+6, -, -, 3+5, 5+5, 5+5, 5+2, 6+2, 7+2, 9+1, -\} = 9 \\ m_7^{(3)} &= Min3\{m_4^{(1)}+d_{47}, m_4^{(2)}+d_{47}, m_4^{(3)}+d_{47}, m_6^{(1)}+d_{67}, m_6^{(2)}+d_{67}, m_6^{(3)}+d_{67}\} \\ &= Min3\{5+4, 6+4, 7+4, 7+1, 8+1, 9+1\} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_8^{(3)} &= Min3\{m_5^{(1)}+d_{58}, m_5^{(2)}+d_{58}, m_5^{(3)}+d_{58}, m_6^{(1)}+d_{68}, m_6^{(2)}+d_{68}, m_6^{(3)}+d_{68}, \\ &\quad m_7^{(1)}+d_{78}, m_7^{(2)}+d_{78}, m_7^{(3)}+d_{78}\} \\ &= Min3\{9+3, -, -, 7+5, 8+5, 9+5, 8+7, 9+7, 10+7\} = 14 \end{aligned}$$

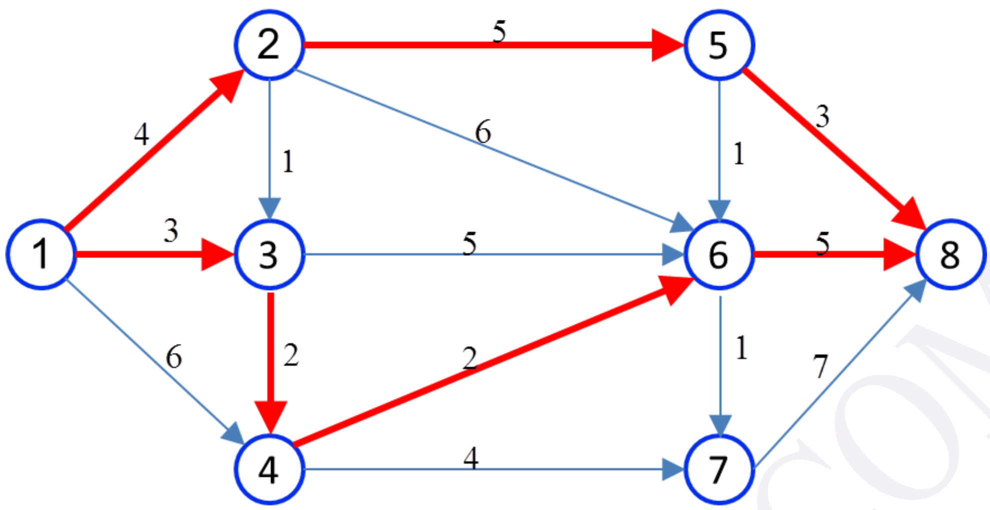
دومین و سومین مسیر کوتاه بین گره‌های ۱ تا ۸ با استفاده حرکت برگشت تعیین می‌شود. برای دومین مسیر کوتاه دو جواب و برای سومین مسیر کوتاه یک جواب وجود دارد:

دومین مسیر کوتاه: $1 \to 3 \to 6 \to 8 \quad \& \quad 1 \to 4 \to 6 \to 8$

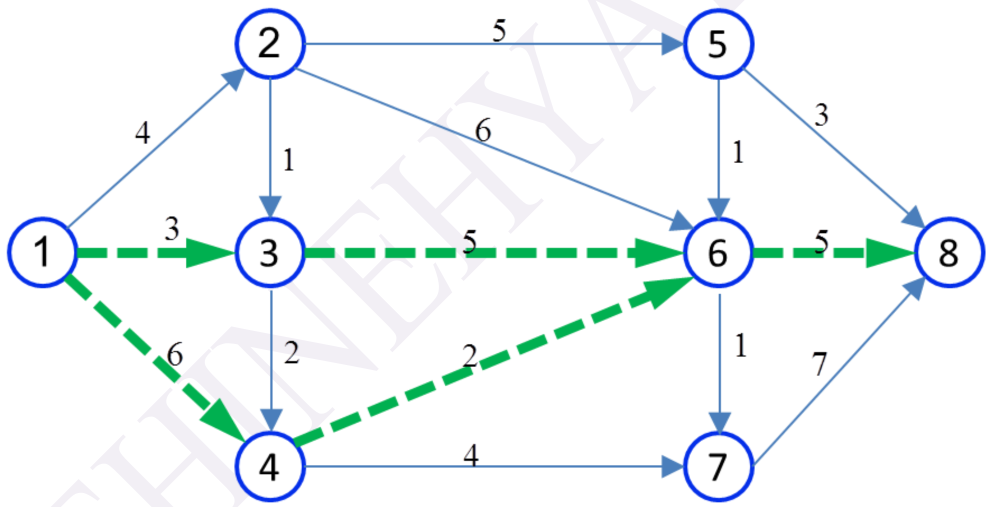
سومین مسیر کوتاه : $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8$

در شکل‌های زیر سه نوع مسیر نمایش داده شده است:

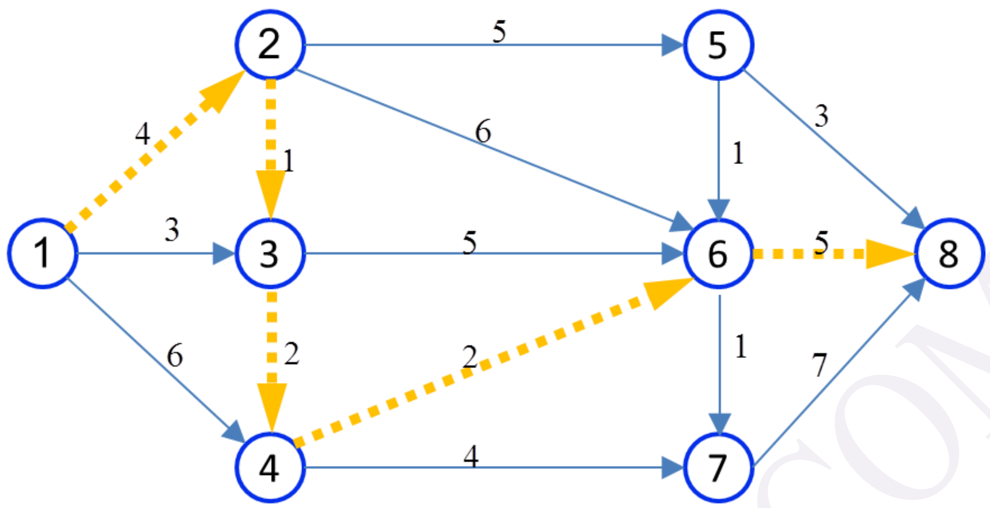
کوتاهترین مسیرها:



دومین مسیرهای کوتاه



سومین مسیر کوتاه



شبکه‌های دارای حلقه

در این شبکه‌ها حلقه وجود دارد، به این معنی که بین تعدادی از گره‌ها یک کمان برای رفت و یک کمان دیگر برای برگشت وجود دارد. در این جا برای حل مسایل در شبکه‌های حلقه دار (یافتن کوتاهترین مسیر) دو روش بیان می‌شود:

روش دیکسترا

روش دیکسترا *Dijkestra* به نام ابداع کننده آن موسوم است و در آن به هر گره دو کد اختصاص می‌یابد:

m_i : کوتاهترین فاصله گره *i* از گره مبدا حرکت تا مرحله جاری الگوریتم که به آن کد موقت گفته می‌شود زیر ممکن است در مراحل بعدی، فاصله کوتاهترین نیز بدست آید.

M_i: کوتاهترین فاصله مطلق گره *i* از گره مبدا حرکت که کد دایم نام دارد زیر در مراحل بعدی نیز فاصله کوتاهتر از آن بدست نخواهد آمد.

الگوریتم دیکسترا به صورت زیر است:

گام ۱: کد دایم برابر با صفر به گره شروع اختصاص دهید($M_1 = 0$)

گام ۲: به گره‌های مجاور گره‌هایی که کد دایم گرفته اند، با استفاده از رابطه زیر کد موقت اختصاص دهید:

$$m_j = M_i + d_{ij}$$

که در آن d_{ij} فاصله مستقیم از گره i با کد دایم تا گره j که بایستی به آن کد موقت اختصاص یابد، است:

چنانچه گره‌ای پیش از این کد موقت گرفته است، آن کد با کد موقت جدید مقایسه و کد کوچکتر برگزیده می‌شود. سپس از بین کلیه گره‌هایی که تاکنون کد موقت گرفته اند، گره‌ای که کوچکترین کد را دارد، آن کد را به کد دایم تبدیل کنید. اکنون به گره‌های مجاور گره‌ای که کد دایم گرفته، کد موقت اختصاص و همین طور ادامه دهید.

گام ۳: هنگامی‌که گره پایان (مقصد) کد دایم گرفت، متوقف شوید. M_n نشان دهنده کوتاهترین فاصله گره پایان از گره شروع است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهرین مسیر، از روش حرکت برگشت با رابطه زیر استفاده کنید:

$$M_i = M_j - d_{ij}$$

روش جامع کوتاهترین مسیر

دیکسترا روش آسانی برای تعیین کوتاهترین مسیر در شبکه است، اما ضعف روش در این است که با هر بار اجرای الگوریتم، فقط کوتاهترین فاصله بین دو گره مبدا و مقصد مشخص می‌شود. اما با اجرای الگوریتم روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره‌ها از یکدیگر قابل محاسبه است.

اگر شبکه مورد نظر *n* گره داشته باشد، گره شروع با شماره ۱ و گره پایان با شماره *n* مشخص و سایر گره‌ها نیز به ترتیب صعودی از گره شروع تا پایان شماره گذاری می‌شوند.

در این روش دو ماتریس فاصله (D) و مسیر (P) تعریف می‌شود. d_{ij} نشان دهنده فاصله گره i از گره j و p_{ij} مسیر رسیدن از گره i به گره j است. هر گاه مسیر مستقیمی‌برای رسیدن از یک گره به گره دیگر وجود نداشته باشد، فاصله بین آن‌ها ∞ در نظر گرفته می‌شود و مسیر بین آن‌ها نیز با علامت تیره"-" مشخص خواهد شد. لازم به ذکر است ممکن است فاصله رفت از یک گره به گره دیگر یعنی d_{ij} با فاصله برگشت یعنی d_{ji} یکی نباشد.

به عنوان مثال d_{12} فاصله گره ۱ تا ۲ است.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{2} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، p_{12} مسیر رسیدن از گره ۱ به گره ۲ است.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{2} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

در هر مرحلهj ($j=1,2,3,\dots,n$)، گره j به عنوان واسط در نظر گرفته می‌شود و فاصله و مسیر رسیدن بین هر دو گره غیر از گره j با استفاده از این واسطه بدست می‌آید. اگر این فاصله از فاصله قبلی کمتر باشد، جایگزین آن می‌شود و در غیر این صورت فاصله قبلی همچنان حفظ می‌شود. به بیان دیگر، ماتریس‌های مرحله $j-1$ یعنی D_{j-1} و P_{j-1} توسط روابط زیر به ماتریس‌های مرحله j یعنی D_j و P_j تبدیل خواهند شد.

$$d_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} d_{ik} & if\ \ d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk} \\ d_{ij} + d_{jk} & if\ \ d_{ik} > d_{ij} + d_{jk} \end{array} \right\} = Min(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk}), i \ne j \ne k$$

$$p_{ik} = \begin{cases} p_{ik} & if\ \ d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk} \\ p_{ij} & if\ \ d_{ik} > d_{ij} + d_{jk} \end{cases}$$

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**