# درس ۱۰: برنامه‌ریزی پویای احتمالی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

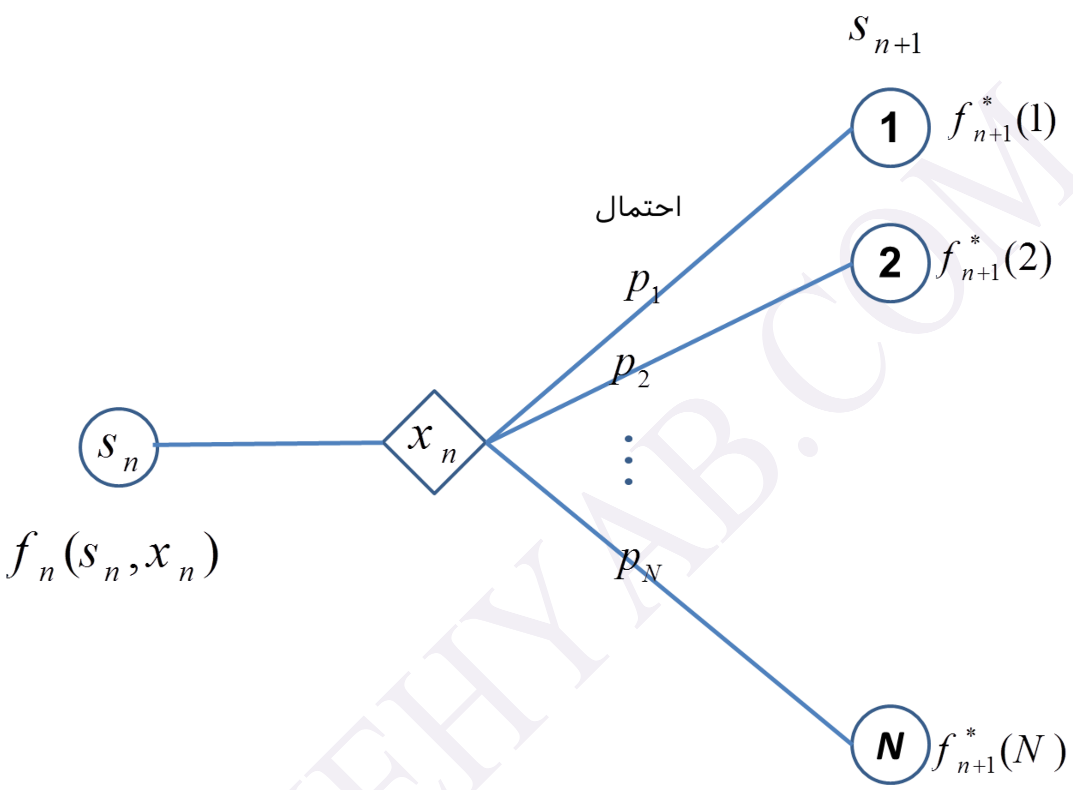
بهینه‌یاب

نخستین مرجع تحقیق در عملیات

LP IP NP NET DP

**www.behinehyab.com**

در برنامه‌ریزی پویای احتمالی، با معلوم بودن حالت و سیاست های تصمیم‌گیری هر مرحله، حالت قطعی مرحله بعد مشخص نمی‌شود، بلکه تنها تابع توزیع آن را می‌توان تعیین کرد. تصویر کلی برنامه‌ریزی پویای احتمالی به صورت زیر است.




برای تشریح مسئله، مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال: یک کارشناس آمار مدعی است که روش برنده شدن در یک سلسله مسابقه را پیدا کرده است. دوستانش این ادعا را باور نمی‌کنند و با او شرط کلانی بسته اند که نمی‌تواند با سه سکه مسابقه را شروع کرد و در پایان صاحب ۵ سکه شود. در هر دور بازی، شرکت کننده می‌تواند با هر تعداد سکه شرکت کند. اگر ببرد به همان اندازه برنده می‌شود و اگر ببازد شود همان تعداد سکه ای که شرکت کرده است از دست می‌دهد. امکان برنده شدن این کارشناس در دور بازی، $\frac{2}{3}$ برآورد شده است. با فرضی که چنین برآوردی صحیح باشد، این متخصص آمار در هر دور بازی از یک بازی سه دوره ای، با چند سکه باید شرکت کند.

**حل:**

تعداد دوره های بازی (تعداد مرحله) برابر ۳ است.

مرحله، دوره های بازی است.

متغیر تصمیم‌گیری: $x_n$ تعداد سکه هایی است که با آن در هر دور بازی شرکت می‌کند.

حالت: تعداد سکه هایی که این کارشناس آمار در هر مرحله در اختیار دارد.

تابع هدف مسئله، بیشینه کردن احتمال بردن این کارشناس است که به صورت زیر است:

$$f_n(s,x_n)=\frac{1}{3}f^*_{n+1}(s-x_n)+\frac{2}{3}f^*_{n+1}(s+x_n)$$

با توجه به موارد فوق، نتایج محاسبات به شرح ذیل است:

$n=3$

| $s$ | $f_3^*(s)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | – |
| 1 | 0 | – |
| 2 | 0 | – |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $2$ or more |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $1$ or more |
| $\geq 5$ | 1 | $0$ or $s-5$ |

در جدول فوق، نتایج محاسبات برای حالت $n=3$ آمده است. اگر $s=0$ باشد، یعنی کارشناس در این مرحله سکه ای برای بازی ندارد و لذا بازنده است. برای $s$ برابر ۱ و ۲ همین نتیجه گیری درست است. اگر $s=3$ باشد، یعنی کارسناس ۳ سکه برای بازی دارد. اگر با ۲ یا یشتر سکله بازی کند، با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده می‌شود و چون در صورت برنده شدن، بیش از ۵ سکه دارد، شرط را برده است. اگر $s=4$ باشد، کارشناس تنها کافی است که با بیش از یک سکه کند که در صورت بردن (با احتمال $\frac{2}{3}$ ) حداقل ۵ سکه خواهد داشت. اگر وی ۵ یا بیشتر از ۵ سکه داشته باشد، نیازی به بازی در این مرحله ندارد و قطعا برنده بازی است(با احتمال ۱).

$n=2$

| $s \backslash x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2^*(s)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | – | – | – | – | 0 | – |
| 1 | 0 | 0 | – | – | – | 0 | – |
| 2 | 0 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | – | – | $\frac{4}{9}$ | $1\ or\ 2$ |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | – | $\frac{2}{3}$ | $0\ or\ 2\ or\ 3$ |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | 1 |
| $\geq 5$ | 1 | – | – | – | – | 1 | 0 |

فرض کنید $x_2=0$ باشد، اگر $s=0$، به این معنا است که برای کارشناس سکه ای برای بازی باقی نمانده است و لذا احتمال بردن وی صفر است. اگر $s=1$ و $x_2=0$ باشد، کارشناس در دور ۲ بازی نمی‌کند و با یک سکه وارد مرحله ۳ می‌شود که احتمال بردن وی با ۵ سکه صفر است. برای $s=2$ همین استدلال برقرار است. اگر $s=3$ و $x_2=0$ باشد، با بازی نکردن در مرحله ۲، کارشناس می‌تواند با بازی کردن با بیش از ۲ سکه با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده شود.

اکنون فرض کنید $x_2=1$ شود. $s=0$ به این معنا است که کارشناس سکه ای برای بازی ندارد لذا نمی‌تواند اصلا بازی کند و لذا برای این حالت – استفاده شده است. فرض کنید $s=1$ و $x_2=1$ باشد. در این حالت کارشناس یک سکه دارد و با یک سکه در این مرحله شرط بندی می‌کند. در این صورت با احتمال $\frac{1}{3}$ بازنده می‌شود و در مرحله ۳ سکه ای ندارد و با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده می‌شود و ۲ سکه خواهد داشت که در هر صورت احتمال بردن شرط بندی را ندارد. بیان ریاضی عبارت قبل به صورت زیر است:

$$f_2(1,1)=\frac{1}{3}f_3^*(0)+\frac{2}{3}f_3^*(2)=\frac{1}{3}(0)+\frac{2}{3}(0)=0$$

فرض کنید $s=2$ و $x_2=1$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_2(2,1)=\frac{1}{3}f_3^*(1)+\frac{2}{3}f_3^*(3)=\frac{1}{3}(0)+\frac{2}{3}(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$$

فرض کنید $s=3$ و $x_2=1$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_2(3,1)=\frac{1}{3}f_3^*(2)+\frac{2}{3}f_3^*(4)=\frac{1}{3}(0)+\frac{2}{3}(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$$

فرض کنید $s=4$ و $x_2=1$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_2(4,1)=\frac{1}{3}f_3^*(3)+\frac{2}{3}f_3^*(5)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})+\frac{2}{3}(1)=\frac{8}{9}$$

سایر مقادیر به طریق مشابه قابل محاسبه است.

$n=1$

| $s$ \ $x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $f_1^*(s)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | 1 |

جزییات محاسبات جدول فوق در زیر آمده است.

فرض کنید $s=3$ و $x_1=0$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(3,0)=\frac{1}{3}f_2^*(3)+\frac{2}{3}f_2^*(3)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})+\frac{2}{3}(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

فرض کنید $s=3$ و $x_1=1$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(3,1)=\frac{1}{3}f_2^*(2)+\frac{2}{3}f_2^*(4)=\frac{1}{3}(\frac{4}{9})+\frac{2}{3}(\frac{8}{9})=\frac{20}{27}$$

سایر مقادیر به طرق مشابه محاسبه می‌شود.

$$f_1(3,2)=\frac{1}{3}f_2^*(1)+\frac{2}{3}f_2^*(5)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$$

$$f_1(3,3)=\frac{1}{3}f_2^*(0)+\frac{2}{3}f_2^*(6)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$$

نتایج سه جدول اخیر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$x_1^*=1\begin{cases} \text{اگر ببرد}\quad x_2^*=1\begin{cases} \text{اگر ببرد}\quad x_3^*=0 \\ \text{اگر ببازد}\quad x_3^*=2\ or\ 3 \end{cases} \\ \text{اگر ببازد}\quad x_2^*=1\ or\ 2\begin{cases} \text{اگر ببرد}\quad x_3^*=\begin{cases} 2\ or\ 3\ (if\ \ x_2^*=1) \\ 1\ or\ 2\ or\ 3\ or\ 4\ (if\ \ x_2^*=2) \end{cases} \\ \text{اگر ببازد شرط را باخته است.} \end{cases} \end{cases}$$

طبق سیاست فوق، این کارشناس با احتمال $\frac{20}{27}$ شرط را می‌برد.

**تمرین:** یک بازیکن قراراست سه دفعه بازی کند در هر دفعه او می‌تواند هر مبلغی بین صفر تا میزان موجودی نیز برنده می‌شود. به همین ترتیب در صورت باخت، پولی که شرط بندی کرده را بازنده می‌شود. در ابتدای بازی ۷۵ دلار پول دارد و هدف وی این است که در پایان ۱۰۰ دلار داشته باشند. سیاست بهینه شرط بندی چگونه باید باشد تا احتمالا این که دقیقا ۱۰۰ دلار در پایان بازی داشته باشد را حداکثر کند.

**حل:** $s_n$ میزان موجودی بازیگر در مرحله $n$-ام است.

$$n=3$$
$$0\le s_3<50\to f_3^*(s_3)=0$$

اگر $s_3<50$ باشد، حتی اگر برنده شرط بندی باشد، موجودی وی به ۱۰۰ دلار نمی‌رسد و لذا بازنده است و احتمال بردن وی صفر است.

$$50\le s_3<100\to f_3^*(s_3)=\begin{cases}0 & x_3^*\ne 100-s_3\\ 0.5 & x_3^*=100-s_3\end{cases}$$

اگر میزان شرط بندی به نحوی نباشد که در صورت برد، ۱۰۰ دلار داشته باشد، احتمال بردن وی صفر است. اما اگر به اندازه کمبود از ۱۰۰ دلار (یعنی $100-s_3$) شرط بندی کند، با احتمال ۰.۵ برنده بازی خواهد بود.

$$s_3=100\to f_3^*(s_3)=\begin{cases}0 & x_3^*>0\\ 1 & x_3^*=0\end{cases}$$

اگر موجودی وی برابر ۱۰۰ باشد، اگر شرط بندی کند در هر صورت بازنده است زیرا اگر مقدار $x_3^*>0$ شرط بندی کند، مقدار موجودی وی دیگر ۱۰۰ دلار نخواهد بود($100+x_3^*$ یا $100+x_3^*$).

$$s_3>100\to f_3^*(x_3)=\begin{cases}0 & x_3^*\ne s_3-100\\ 0.5 & x_3^*=s_3-100\end{cases}$$

اگر بازیگر مقدار $s_3-100$ شرط بندی کند، با احتمال ۰.۵ بازنده خواهد بود و در این صورت دقیقا ۱۰۰ دلار خواهد داشت. خلاصه نتایج برای $n=3$ در جدول زیر آمده است:

$n=3$

| $s_3$ | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| $0 \le s_3 < 50$ | $0$ | $x_3=0$ |
| $50 \le s_3 < 100$ | $0.5$ | $100-s_3$ |
| $s_3=100$ | $1$ | $0$ |
| $s_3>100$ | $0.5$ | $s_3-100$ |

$n=2$

$$f_2^*(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}\left[0.5f_3^*(s_2-x_2)+0.5f_3^*(s_2+x_2)\right]$$

محاسبات به صورت زیر می شود:

اگر کل را شرط بندی کند در مرحله سوم کمتر از ۵۰ دلار خواهد داشت که بازنده هست.$\rightarrow$ $0\le s_2<25$

$$25\le s_2<50\rightarrow\begin{cases}0\le x_2<50-s_2\begin{cases}win\rightarrow s_2+x_2<50\\ loose\rightarrow s_2-x_2<50\end{cases}\rightarrow 0\\ 50-s_2\le x_2<s_2\begin{cases}win\rightarrow s_2+x_2\rightarrow 50\le s_2+x_2<2s_2(<100)\rightarrow 0.5\times 0.5\\ loose\rightarrow s_2-x_2\rightarrow 0<s_2-x_2\le 2s_2-50<50\rightarrow 0.5\times 0\end{cases}\end{cases}$$

$$s_2 = 50, 0 \le x_2 < 50 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow 50 \le s_2 + x_2 < 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ loose \rightarrow 0 < s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

$$s_2 = 50, x_2 = 50 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_2 + x_2 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ loose \rightarrow s_2 - x_2 = 0 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, 0 \le x_2 < s_2 - 50 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_2 + x_2 \rightarrow 50 \le s_2 + x_2 < 25 + s_2 < 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ loose \rightarrow s_2 - x_2 \rightarrow x_2 < s_2 - 50 \rightarrow s_2 - x_2 > 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, x_2 = s_2 - 50 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_2 + x_2 > 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ loose \rightarrow s_2 - x_2 = 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, s_2 - 50 < x_2 < 100 - s_2 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_2 + x_2 \rightarrow 50 < s_2 \le s_2 + x_2 < 175 - x_2 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ loose \rightarrow s_2 - x_2 \rightarrow s_2 - 50 < x_2 \rightarrow s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

$$50 < s_2 < 75, x_2 = 100 - s_2 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow x_2 + s_2 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ loose \rightarrow \underset{2\times 50-100}{0} < s_2 - x_2 < \underset{2\times 75-100}{50} \rightarrow 0.0 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, 100 - s_2 < x_2 \le s_2 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow x_2 + s_2 > 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ loose \rightarrow s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.0 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

$n = 2$

| $s_2$ | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|
| $0 \le s_2 < 25$ | $\boxed{0}$ | $0 \le x_2 \le s_2$ |
| $25 \le s_2 < 50$ | $0$ | $0 \le x_2 < 50 - s_2$ |
| | $\boxed{0.25}$ | $50 - s_2 \le x_2 \le s_2$ |
| $s_2 = 50$ | $0.25$ | $0 \le x_2 < 50$ |
| | $\boxed{0.5}$ | $x_2 = 50$ |
| $50 < s_2 < 75$ | $\boxed{0.5}$ | $0 \le x_2 < s_2 - 50$ |
| | $\boxed{0.5}$ | $x_2 = s_2 - 50$ |
| | $0.25$ | $s_2 - 50 < x_2 < 100 - s_2$ |
| | $\boxed{0.5}$ | $x_2 = 100 - s_2$ |
| | $0.25$ | $100 - s_2 < x_2 \le s_2$ |
| $s_2 = 75$ | $0.5$ | $0 \le x_2 < 25$ |
| | $\boxed{0.75}$ | $x_2 = 25$ |
| | $0.25$ | $25 < x_2 \le 75$ |
| $75 < s_2 < 100$ | $0.5$ | $0 \le x_2 < 100 - s_2$ |
| | $\boxed{0.75}$ | $x_2 = 100 - s_2$ |
| | $0.5$ | $100 - s_2 < x_2 \le s_2 - 50$ |
| | $0.25$ | $s_2 - 50 < x_2 \le s_2$ |
| $s_2 = 100$ | $\boxed{1}$ | $x_2 = 0$ |
| | $0.5$ | $0 < x_2 \le 50$ |
| | $0.25$ | $50 < x_2 \le 100$ |
| $s_2 > 100$ | $0.5$ | $0 \le x_2 < s_2 - 100$ |
| | $\boxed{0.75}$ | $x_2 = s_2 - 100$ |
| | $0.5$ | $s_2 - 100 < x_2 \le s_2 - 50$ |
| | $0.25$ | $s_2 - 50 < x_2 \le s_2$ |

محاسبات این مرحله به صورت زیر می شود:

$$s_1 = 75, x_1 = 0 \rightarrow 0.75$$

$$s_1 = 75, 0 < x_1 < 25 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 75 < s_1 + x_1 < 100 = 0.5 \times 0.75 = \dfrac{3}{8} \\ loose \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 50 < s_1 - x_1 < 75 = 0.5 \times 0.5 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{5}{8}$$

$$s_1 = 75, x_1 = 25 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_1 + x_1 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ loose \rightarrow s_1 - x_1 = 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.75$$

$$s_1 = 75, 25 < x_1 \le 50 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 100 < s_1 + x_1 \le 125 \rightarrow 0.75 \times 0.5 \\ loose \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 25 < s_1 - x_1 \le 50 \rightarrow 0.5 \times 0.25 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$s_1 = 75, 50 < x_1 \le 75 \rightarrow \begin{cases} win \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 120 < s_1 + x_1 \rightarrow 0.5 \times 0.75 \\ loose \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 0 < s_1 - x_1 < 25 \rightarrow 0.5 \times 0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{8}$$

$$n = 1$$

$$f_1^*(75) = \max_{0 \le x_1 \le 75} \left[ 0.5 f_2^*(75 - x_1) + 0.5 f_2^*(75 + x_1) \right]$$

$$f_1(75, x_1) = \begin{cases} 0.75 & x_1 = 0 \\ \dfrac{5}{8} & 0 < x_1 < 25 \\ 0.75 & x_1 = 25 \\ 0.5 & 25 < x_1 \le 50 \\ \dfrac{3}{8} & 50 < x_1 \le 75 \end{cases}$$

$n = 1$

| $s_1$ | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|
| 75 | 0.75 | $0$ *or* $25$ |

جواب بهینه براساس محاسبات بالا به صورت زیر می‌شود:

$$x_1^* = 0 \begin{cases} x_2^* = 25 \;\; \text{بازنده} \begin{cases} x_3^* = 50 \;\; \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 \;\; \text{برنده} \end{cases} \\ x_2^* = 25 \;\; \text{برنده} \begin{cases} x_3^* = 50 \;\; \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 \;\; \text{برنده} \end{cases} \end{cases}$$

یا

$$x_1^* = 25 \begin{cases} x_2^* = 50 \;\; \text{بازنده} \begin{cases} x_3^* = 0 \;\; \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 \;\; \text{برنده} \end{cases} \\ x_2^* = 0 \;\; \text{برنده} \begin{cases} x_3^* = 0 \;\; \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 \;\; \text{برنده} \end{cases} \end{cases}$$

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی [www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com) مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**