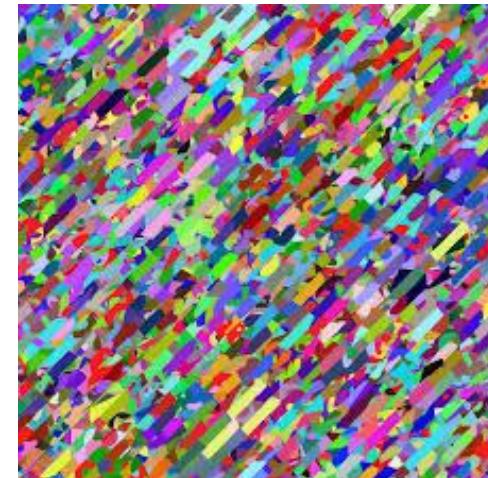
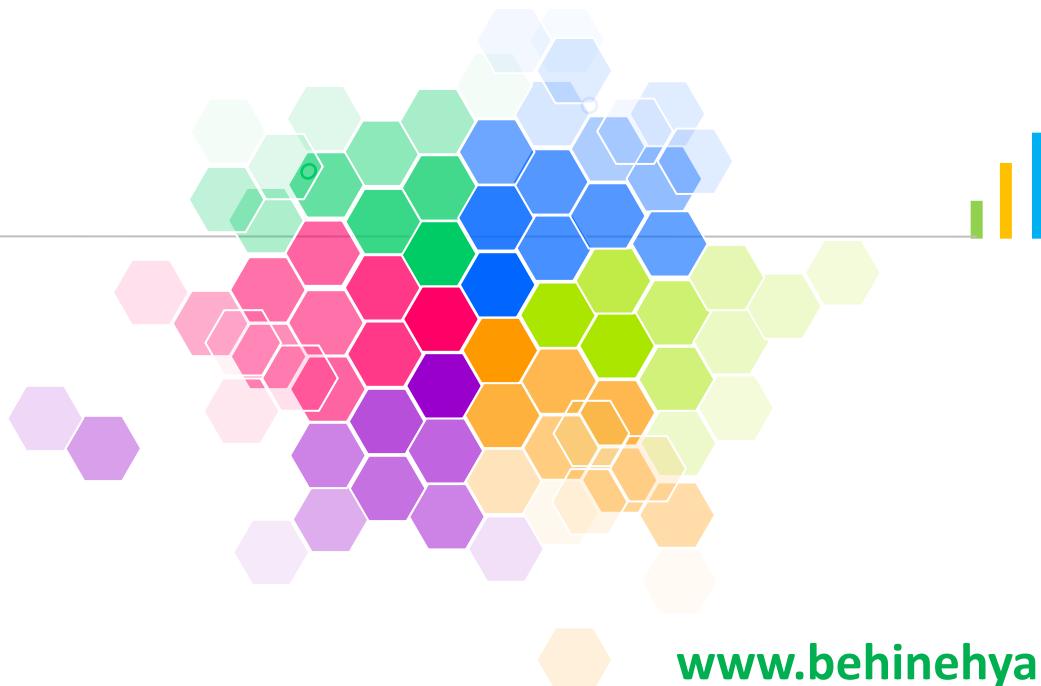


به نام خدا

درس ۰۱: برنامه ریزی پویای احتمالی



فهرست مطالب

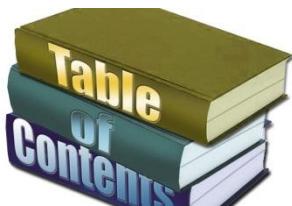


برنامه ریزی پویای احتمالی

۱

تمرین ها

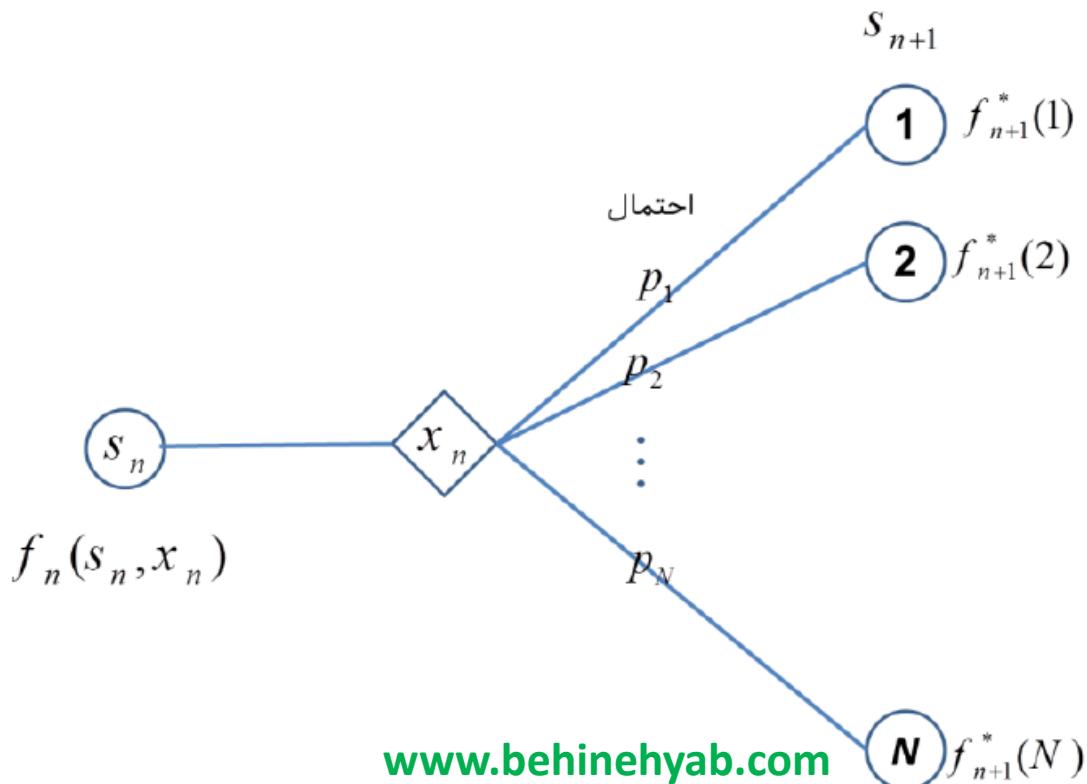
۲



برنامه ریزی پویای احتمالی



در برنامه ریزی پویای احتمالی، با معلوم بودن حالت و سیاست های تصمیم گیری هر مرحله، حالت قطعی مرحله بعد مشخص نمی شود، بلکه تنها تابع توزیع آن را می توان تعیین کرد. تصویر کلی برنامه ریزی پویای احتمالی به صورت زیر است.



تمرین



مثال: یک کارشناس آمار مدعی است که روش برنده شدن در یک سلسله مسابقه را پیدا کرده است. دوستانش این ادعا را باور نمی کنند و با او شرط کلانی بسته اند که نمی تواند با سه سکه مسابقه را شروع کرد و در پایان صاحب ۵ سکه شود. در هر دور بازی، شرکت کننده می تواند با هر تعداد سکه شرکت کند. اگر ببرد به همان اندازه برنده می شود و اگر ببازد شود همان تعداد سکه ای که شرکت کرده است از دست می دهد. امکان برنده شدن این کارشناس در دور بازی، $\frac{2}{3}$ برآورد شده است. با فرضی که چنین برآورده صحیح باشد، این متخصص آمار در هر دور بازی از یک بازی سه دوره ای، با چند سکه باید شرکت کند.

تمرین



حل:

تعداد دوره های بازی (تعداد مرحله) برابر ۳ است.

مرحله، دوره های بازی است.

متغیر تصمیم گیری: x_n تعداد سکه هایی است که با آن در هر دور بازی شرکت می کند.

حالت: تعداد سکه هایی که این کارشناس آمار در هر مرحله در اختیار دارد.

تابع هدف مسئله، بیشینه کردن احتمال بردن این کارشناس است که به صورت زیر است:

$$f_n(s, x_n) = \frac{1}{3} f_{n+1}^*(s - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(s + x_n)$$

تمرین



با توجه به موارد فوق، نتایج محاسبات به شرح ذیل است:

$n = 3$		
s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	—
1	0	—
2	0	—
3	$\frac{2}{3}$	2 or more
4	$\frac{2}{3}$	1 or more
≥ 5	1	0 or $s - 5$

تمرین

در جدول فوق، نتایج محاسبات برای حالت $n = 3$ آمده است. اگر $s = 0$ باشد، یعنی کارشناس در این مرحله سکه ای برای بازی ندارد و لذا بازنده است. برای s برابر ۱ و ۲ همین نتیجه گیری درست است. اگر $s = 3$ باشد، یعنی کارشناس ۳ سکه برای بازی دارد. اگر با ۲ یا بیشتر سکله بازی کند، با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده می شود و چون در صورت برنده شدن، بیش از ۵ سکه دارد، شرط را برده است. اگر $s = 4$ باشد، کارشناس تنها کافی است که با بیش از یک سکه کند که در صورت بردن (با احتمال $\frac{2}{3}$) حداقل ۵ سکه خواهد داشت. اگر وی ۵ یا بیشتر از ۵ سکه داشته باشد، نیازی به بازی در این مرحله ندارد و قطعاً برنده بازی است (با احتمال ۱).

تمرین



$n = 2$								
s	x_n	0	1	2	3	4	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0	—	—	—	—	—	0	—
1	0	0	—	—	—	—	0	—
2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	—	—	—	$\frac{4}{9}$	1 or 2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	—	—	$\frac{2}{3}$	0 or 2 or 3
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	—	$\frac{8}{9}$	1
≥ 5	1	—	—	—	—	—	1	0

تمرین



فرض کنید $x_2 = 0$ باشد، اگر $s = 0$ ، به این معنا است که برای کارشناس سکه ای برای بازی باقی نمانده است و لذا احتمال بردن وی صفر است. اگر $s = 1$ و $x_2 = 0$ باشد، کارشناس در دور ۲ بازی نمی کند و با یک سکه وارد مرحله ۳ می شود که احتمال بردن وی با ۵ سکه صفر است. برای $s = 2$ همین استدلال برقرار است. اگر $s = 3$ و $x_2 = 0$ باشد، با بازی نکردن در مرحله ۲، کارشناس می تواند با بازی کردن با بیش از ۲ سکه با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده شود.

تمرین



اکنون فرض کنید $x_2 = 1$ شود. به این معنا است که کارشناس سکه ای برای بازی ندارد لذا نمی تواند اصلا بازی کند و لذا برای این حالت – استفاده شده است. فرض کنید $s = 1$ و $x_2 = 1$ باشد. در این حالت کارشناس یک سکه دارد و با یک سکه در این مرحله شرط بندی می کند. در این صورت با احتمال $\frac{1}{3}$ بازندگی می شود و در مرحله ۳ سکه ای ندارد و با احتمال $\frac{2}{3}$ برنده می شود و ۲ سکه خواهد داشت که در هر صورت احتمال بردن شرط بندی را ندارد. بیان ریاضی عبارت قبل به صورت زیر است:

$$f_2(1,1) = \frac{1}{3}f_3^*(0) + \frac{2}{3}f_3^*(2) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(0) = 0$$

تمرین

فرض کنید $x_2 = 1$ و $s = 2$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می

شود:

$$f_2(2,1) = \frac{1}{3}f_3^*(1) + \frac{2}{3}f_3^*(3) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

فرض کنید $x_2 = 1$ و $s = 3$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می

شود:

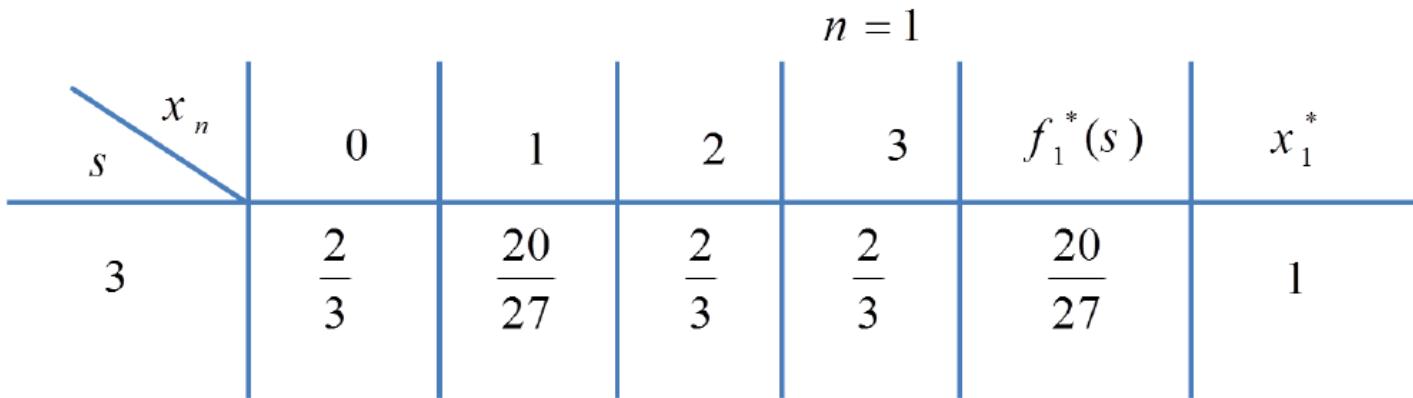
$$f_2(3,1) = \frac{1}{3}f_3^*(2) + \frac{2}{3}f_3^*(4) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

فرض کنید $x_2 = 1$ و $s = 4$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می

شود:

$$f_2(4,1) = \frac{1}{3}f_3^*(3) + \frac{2}{3}f_3^*(5) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}(1) = \frac{8}{9}$$

تمرین



جزییات محاسبات جدول فوق در زیر آمده است.

فرض کنید $x_1 = 0$ و $s = 3$ باشد، مقدار احتمال بردن بازی به صورت زیر محاسبه می

شود:

$$f_1(3,0) = \frac{1}{3}f_2^*(3) + \frac{2}{3}f_2^*(3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

تمرین



$$f_1(3,1) = \frac{1}{3}f_2^*(2) + \frac{2}{3}f_2^*(4) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{20}{27}$$

$$f_1(3,2) = \frac{1}{3}f_2^*(1) + \frac{2}{3}f_2^*(5) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$f_1(3,3) = \frac{1}{3}f_2^*(0) + \frac{2}{3}f_2^*(6) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

تمرین



نتایج سه جدول اخیر را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2^* = 1 \quad \text{اگر ببرد} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3^* = 0 \quad \text{اگر ببرد} \\ \quad \text{اگر ببازد } x_3^* = 2 \text{ or } 3 \end{array} \right. \\ \\ x_2^* = 1 \text{ or } 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3^* = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ or } 3 \text{ (if } x_2^* = 1) \\ 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4 \text{ (if } x_2^* = 2) \end{array} \right. \\ \quad \text{اگر ببازد شرط را باخته است.} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

طبق سیاست فوق، این کارشناس با احتمال $\frac{20}{27}$ شرط را می برد.

تمرین



تمرین: یک بازیکن قرار است سه دفعه بازی کند در هر دفعه او می‌تواند هر مبلغی بین صفر تا میزان موجودی نیز برنده می‌شود. به همین ترتیب در صورت باخت، پولی که شرط بندی کرده را باز نده می‌شود. در ابتدای بازی ۷۵ دلار پول دارد و هدف وی این است که در پایان ۱۰۰ دلار داشته باشند. سیاست بهینه شرط بندی چگونه باید باشد تا احتمالاً این که دقیقاً ۱۰۰ دلار در پایان بازی داشته باشد را حداکثر کند.

تمرین



حل: s_n میزان موجودی بازیگر در مرحله n -ام است.

$$n = 3$$

$$0 \leq s_3 < 50 \rightarrow f_3^*(s_3) = 0$$

اگر $s_3 < 50$ باشد، حتی اگر برنده شرط بندی باشد، موجودی وی به ۱۰۰ دلار نمی‌رسد و لذا بازنده است و احتمال بردن وی صفر است.

$$50 \leq s_3 < 100 \rightarrow f_3^*(s_3) = \begin{cases} 0 & x_3^* \neq 100 - s_3 \\ 0.5 & x_3^* = 100 - s_3 \end{cases}$$

اگر میزان شرط بندی به نحوی نباشد که در صورت برد، ۱۰۰ دلار داشته باشد، احتمال بردن وی صفر است. اما اگر به اندازه کمبود از ۱۰۰ دلار (یعنی $s_3 - 100$) شرط بندی کند، با احتمال ۵٪ برنده بازی خواهد بود.

تمرین



$$s_3 = 100 \rightarrow f_3^*(s_3) = \begin{cases} 0 & x_3^* > 0 \\ 1 & x_3^* = 0 \end{cases}$$

اگر موجودی وی برابر ۱۰۰ باشد، اگر شرط بندی کند در هر صورت بازنده است زیرا
اگر مقدار $x_3^* > 0$ شرط بندی کند، مقدار موجودی وی دیگر ۱۰۰ دلار نخواهد بود)

$.(100 + x_3^*)$ یا $100 + x_3^*$

$$s_3 > 100 \rightarrow f_3^*(x_3) = \begin{cases} 0 & x_3^* \neq s_3 - 100 \\ 0.5 & x_3^* = s_3 - 100 \end{cases}$$

اگر بازیگر مقدار $s_3 - 100$ شرط بندی کند، با احتمال ۰.۵ بازنده خواهد بود و در این صورت دقیقا ۱۰۰ دلار خواهد داشت.

تمرین



خلاصه تایج برای $n = 3$ در جدول زیر آمده است:

$n = 3$		
s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
$0 \leq s_3 < 50$	0	$x_3 = 0$
$50 \leq s_3 < 100$	0.5	$100 - s_3$
$s_3 = 100$	1	0
$s_3 > 100$	0.5	$s_3 - 100$

تمرین



$$25 \leq s_2 < 50 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_2 < 50 - s_2 \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 < 50 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 < 50 \end{cases} \rightarrow 0 \\ 50 - s_2 \leq x_2 < s_2 \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 \rightarrow 50 \leq s_2 + x_2 < 2s_2 (< 100) \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 \rightarrow 0 < s_2 - x_2 \leq 2s_2 - 50 < 50 \rightarrow 0.5 \times 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$s_2 = 50, 0 \leq x_2 < 50 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow 50 \leq s_2 + x_2 < 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow 0 < s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

$$s_2 = 50, x_2 = 50 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 = 0 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, 0 \leq x_2 < s_2 - 50 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 \rightarrow 50 \leq s_2 + x_2 < 25 + s_2 < 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 \rightarrow x_2 < s_2 - 50 \rightarrow s_2 - x_2 > 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, x_2 = s_2 - 50 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 > 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 = 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, s_2 - 50 < x_2 < 100 - s_2 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_2 + x_2 \rightarrow 50 < s_2 \leq s_2 + x_2 < 175 - x_2 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 \rightarrow s_2 - 50 < x_2 \rightarrow s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.5 \times 0.0 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

$$50 < s_2 < 75, x_2 = 100 - s_2 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow x_2 + s_2 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ \text{loose} \rightarrow \frac{0}{2 \times 50 - 100} < s_2 - x_2 < \frac{50}{2 \times 75 - 100} \rightarrow 0.0 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$50 < s_2 < 75, 100 - s_2 < x_2 \leq s_2 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow x_2 + s_2 > 100 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \\ \text{loose} \rightarrow s_2 - x_2 < 50 \rightarrow 0.0 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.25$$

تمرین



$$n = 2$$

$$f_2^*(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [0.5f_3^*(s_2 - x_2) + 0.5f_3^*(s_2 + x_2)]$$

$n = 2$		
s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$0 \leq s_2 < 25$	[0]	$0 \leq x_2 \leq s_2$
$25 \leq s_2 < 50$	0 [0.25]	$0 \leq x_2 < 50 - s_2$ $50 - s_2 \leq x_2 \leq s_2$
$s_2 = 50$	0.25 [0.5]	$0 \leq x_2 < 50$ $x_2 = 50$
$50 < s_2 < 75$	[0.5]	$0 \leq x_2 < s_2 - 50$
	[0.5]	$x_2 = s_2 - 50$
	0.25 [0.5]	$s_2 - 50 < x_2 < 100 - s_2$ $x_2 = 100 - s_2$
	0.25	$100 - s_2 < x_2 \leq s_2$

تمرین



$n = 2$		
s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$s_2 = 75$	0.5	$0 \leq x_2 < 25$
	0.75	$x_2 = 25$
	0.25	$25 < x_2 \leq 75$
$75 < s_2 < 100$	0.5	$0 \leq x_2 < 100 - s_2$
	0.75	$x_2 = 100 - s_2$
	0.5	$100 - s_2 < x_2 \leq s_2 - 50$
$s_2 = 100$	0.25	$s_2 - 50 < x_2 \leq s_2$
	1	$x_2 = 0$
	0.5	$0 < x_2 \leq 50$
$s_2 > 100$	0.25	$50 < x_2 \leq 100$
	0.5	$0 \leq x_2 < s_2 - 100$
	0.75	$x_2 = s_2 - 100$
	0.5	$s_2 - 100 < x_2 \leq s_2 - 50$
	0.25	$s_2 - 50 < x_2 \leq s_2$

تمرین



$$s_1 = 75, x_1 = 0 \rightarrow 0.75$$

$$s_1 = 75, 0 < x_1 < 25 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 75 < s_1 + x_1 < 100 = 0.5 \times 0.75 = \frac{3}{8} \\ \text{lose} \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 50 < s_1 - x_1 < 75 = 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{5}{8}$$

$$s_1 = 75, x_1 = 25 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_1 + x_1 = 100 \rightarrow 0.5 \times 1 \\ \text{lose} \rightarrow s_1 - x_1 = 50 \rightarrow 0.5 \times 0.5 \end{cases} \rightarrow 0.75$$

$$s_1 = 75, 25 < x_1 \leq 50 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 100 < s_1 + x_1 \leq 125 \rightarrow 0.75 \times 0.5 \\ \text{lose} \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 25 < s_1 - x_1 \leq 50 \rightarrow 0.5 \times 0.25 \end{cases} \rightarrow 0.5$$

$$s_1 = 75, 50 < x_1 \leq 75 \rightarrow \begin{cases} \text{win} \rightarrow s_1 + x_1 \rightarrow 120 < s_1 + x_1 \rightarrow 0.5 \times 0.75 \\ \text{lose} \rightarrow s_1 - x_1 \rightarrow 0 < s_1 - x_1 < 25 \rightarrow 0.5 \times 0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{8}$$

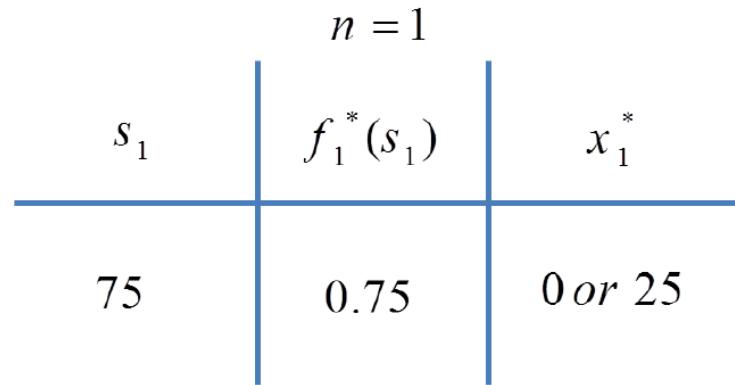
تمرین



$$n = 1$$

$$f_1^*(75) = \max_{0 \leq x_1 \leq 75} [0.5f_2^*(75 - x_1) + 0.5f_2^*(75 + x_1)]$$

$$f_1(75, x_1) = \begin{cases} 0.75 & x_1 = 0 \\ \frac{5}{8} & 0 < x_1 < 25 \\ 0.75 & x_1 = 25 \\ 0.5 & 25 < x_1 \leq 50 \\ \frac{3}{8} & 50 < x_1 \leq 75 \end{cases}$$



جواب بهینه براساس محاسبات بالا به صورت زیر می شود:

تمرین



$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 0 & \\ x_2^* = 25 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 & \text{برنده} \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 25 & \\ x_2^* = 0 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 & \text{برنده} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 0 & \\ x_2^* = 25 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 50 & \text{برنده} \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 0 & \\ x_2^* = 50 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 & \text{برنده} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 0 & \\ x_2^* = 0 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 50 & \text{برنده} \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 0 & \\ x_2^* = 0 & \text{بازنده} \\ x_3^* = 0 & \text{برنده} \end{array} \right.$$

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com