درس ۳: نظریه همزادی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

از جمله مهترین نتایجی که در دوره‌های نخستین توسعه برنامه‌ریزی خطی بدست آمد، شناخت مفهوم دوگانگی و شاخه‌های مربوط به آن بوده است. در مطالعه‌های اولیه نشان داده شد که هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگر که مسئله همزاد[1] (*Dual problem*) نامیده می‌شود، ارتباط دارد. برای روشن شدن موضوع مسئله اولیه به شکل استاندارد به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m \\
&\qquad x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

اگر y_i را متغیر همزاد هر محدودیت در نظر بگیریم، مسئله همزاد مدل فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1,\dots,n. \\
&\qquad y_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

قبل از تبدیل مسائل برنامه ریزی خطی به فرم ثانویه، باید تابع هدف و محدودیت ها هماهنگ باشند یعنی برای مسائل اولیه، حداکثر کردن باید با محدودیت های کوچکتر یا مساوی باشد.

نوشتن مسئله همزاد از مدل اولیه

گام های لازم برای نوشتن مسئله همزاد، هر گاه مسئله اولیه فاقد محدودیت تساوی یا متغیر آزاد در علامت باشد به صورت زیر خواهد بود:

[1] در ادبیات فارسی تحقیق در عملیات با عناوین: دوگان یا ثانویه هم نامیده می شود.

گام۱) اگر تابع هدف مسئله اولیه حداکثر کردن باشد، محدودیت های مسئله همزاد را به صورت کوچکتر یا مساوی در می اوریم.

گام۲) اگر محدودیت های مسئله اولیه از نوع $\le$ باشد، محدودیت های مسئله همزاد از نوع $\le$ خواهد بود.

گام۳) برای هر محدودیت در مسئله اولیه یک متغیر در مسئله همزاد در نظر می گیریم.

گام۴) ضرایب تابع هدف مسئله همزاد از اعداد سمت راست مسئله اولیه تشکیل می شود.

گام۵) اعداد سمت راست محدودیت های مسئله همزاد از ضرایب تابع هدف مسئله اولیه بدست می آید.

گام۶) تمام متغیرهای مسئله اولیه و همزاد غیرمنفی هستند.

مثال: مدل همزاد مدل زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 6x_1 + 6x_2 &\le 36 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

نحوه ایجاد مدل همزاد در شکل زیر نمایش داده شده است. در صورت این که محدودیت ها به صورت کوچکتر یا مساوی، متغیرها نامنفی و تابع هدف به صورت ماکزیمم باشد، به صورت زیر می توان مدل همزاد را ایجاد کرد.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= \boxed{4}\,x_1 + \boxed{5}\,x_2 \\ \boxed{1}\,x_1 + \boxed{2}\,x_2 &\le \boxed{10} \\ \boxed{6}\,x_1 + \boxed{6}\,x_2 &\le \boxed{36} \\ \boxed{8}\,x_1 + \boxed{4}\,x_2 &\le \boxed{40} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Min Y &= \boxed{10}\,y_1 + \boxed{36}\,y_2 + \boxed{40}\,y_3 \\ \boxed{1}\,y_1 + \boxed{6}\,y_2 + \boxed{8}\,y_3 &\ge \boxed{4} \\ \boxed{2}\,y_1 + \boxed{6}\,y_2 + \boxed{4}\,y_3 &\ge \boxed{5} \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

مسئله همزاد برای فرم های دیگر

برای نوشتن مسئله همزاد در صورتی که مسئله اولیه محدودیت هایی به صورت تساوی داشته باشد، هر محدودیت به صورت تساوی با دو محدودیت با همان متغیرها و ضرایب یکی به صورت بزرگتر یـا مسـاوی و دیگری به صورت کوچکتر یا مساوی جایگزین می شود. سپس با ضرب کردن محدودیت بزرگتر یا مساوی در منهای یک، هر دو محدودیت به صورت کوچکتر یا مساوی در خواهد آمد.

مثال: مدل همزاد مسئله زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 = 5 \\ & 3x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

حل: محدودیت اول معادل است با دو محدودیت نامساوی مشخص شده زیر:

$$2x_1 + x_2 = 5 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 5 \rightarrow -2x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

حال مسئله چنین می شود:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & -2x_1 - x_2 \le -5 \\ & 3x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

در صورتیکه متغیر مسئله همزاد با سه محدودیت فوق را با y_1 y_2 y_3 نشان دهیم، مسئله همزاد به شکل زیر در می آید.

$$\begin{aligned} Min\,Y &= 5y_1 - 5y_2 + 6y_3 \\ & 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - y_3 \ge 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

با اعمال تغیر در مسئله فوق، $y_4=y_1-y_2$ ، y_4 متغیری آزاد در علامت می شود. چون حاصل تفاضل دو مقدار نامنفی y_2 و y_1 می تواند مثبت یا منفی باشد، لذا داریم:

$$\begin{aligned} Min\,Y &= 5y_4 + 6y_3 \\ & 2y_4 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_4 - y_3 \ge 2 \\ & y_3 \ge 0, y_4 : Unrestricted \end{aligned}$$

پس به عنوان یک قاعده می توان گفت:

هر گاه در مسئله اولیه یک محدودیت به صورت تساوی برقرار باشد، متغیر مربوط به آن محدودیت در مسئله همزاد به صورت آزاد در علامت است.

نوشتن مسئله همزاد در صورتیکه مسئله اولیه متغیر آزاد در علامت داشته باشد به این صورت عمل می کنیم که برای متغیرهای آزاد در علامت x_j، تغییر متغیر تفاضل دو متغیر نامنفی $(x_j'-x_j'')$ انجام می شود.

مثال: مدل همزاد مسئله زیر را بنویسید.

$$
\begin{aligned}
Max\ \ Z &= 3x_1 + x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \le 4 \\
& 3x_1 - x_2 \le 6 \\
& x_2 \ge 0, x_1\text{:Unrestricted}
\end{aligned}
$$

حل:

متغیر آزاد در علامت x_1 را به صورت x_2-x_3 تغییر متغیر می دهیم.

$$
\begin{aligned}
Max\ \ Z &= 3x_3 - 3x_4 + x_2 \\
& 2x_3 - 2x_4 + x_2 \le 4 \\
& 3x_3 - 3x_4 - x_2 \le 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

به این ترتیب می توان مسئله همزاد را به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
Min\, Y &= 4y_1 + 6y_2 \\
& 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\
& -2y_1 - 3y_2 \ge -3 \\
& y_1 - y_2 \ge 1 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

محدودیت اول را می توان با محدودیت تساوی جایگزین کرد. فرم نهایی مسئله چنین است:

$$
\begin{aligned}
Min\, Y &= 4y_1 + 6y_2 \\
& 2y_1 + 3y_2 = 3 \\
& y_1 - y_2 \ge 1 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

پس به عنوان یک قاعده می توان گفت:

هر گاه در مسئله اولیه یک متغیر به صورت آزاد در علامت باشد، محدودیت مربوط به آن متغیر در مسئله همزاد به صورت تساوی است.

مثال: مدل اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad x_1 \qquad\qquad \le 4 \qquad (y_1) \\
&\quad (2)\quad \qquad 2x_2 \le 12 \qquad (y_2) \\
&\quad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \qquad (y_3) \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,2.
\end{aligned}$$

مدل همزاد مدل فوق را بنویسید.

حل:

$$\begin{aligned}
&Min\ y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad y_1 \qquad\quad + 3y_3 \ge 3 \\
&\quad (2)\quad \qquad 2y_2 \ + 2y_2 \ge 5 \\
&\qquad\quad y_i \ge 0 \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

جواب بهینه دو مدل فوق به صورت زیر است:

نام مدل	متغیرهای اصلی	قیمت سایه
مدل اولیه	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$	$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$
مدل همزاد	$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$	$s_1 = 2$ $s_2 = 6$

مشاهده: همان طور که در جدول فوق مشاهده می‌شود، مقدار بهینه قیمت سایه[۲] محدودیت های مدل اولیه با مقدار بهینه متغیرهای اصلی مدل همزاد برابر است که در ادبیات تحقیـق در عملیـات بـه آن قضـیه همزادی گفته می‌شود. همین طور مقدار بهینه متغیرهای اصلی مدل اولیه با مقدار بهینه قیمت سـایه مـدل همزاد برابر است. این دو مدل دارای خاصیت های مهمی هستند که در ادامه به آن‌ها خـواهیم پرداخـت. در جدول زیر کلیه جواب‌های اساسی مدل اولیه و همزاد برای این مثال آورده شده است.

مسئله همزاد			مسئله اولیه		
موجه؟	جواب اساسی	مقدار تابع هدف	موجه؟	جواب اساسی	ردیف
خیر	(0,0,0,-3,-5)	0	بله	(0,0,4,12,18)	1
خیر	(3,0,0,0,-5)	12	بله	(4,0,0,12,6)	2
خیر	(0,0,1,0,-3)	18	خیر	(6,0,-2,12,0)	3
خیر	(-4.5,0,2.5,0,0)	27	بله	(4,3,0,6,0)	4
خیر	(0,2.5,0,-3,0)	30	بله	(0,6,4,0,6)	5
بله	(0,1.5,1,0,0)	36	بله	(2,6,2,0,0)	6
بله	(3,2.5,0,0,0)	42	خیر	(4,6,0,0,-6)	7
بله	(0,0,2.5,4.5,0)	45	خیر	(0,9,4,-6,0)	8

از جدول فوق مشاهده می‌شود که تنها در یک مورد جواب‌های مسئله اولیه و همزاد موجه هستند و در مابقی حالات یکی از دو مسئله غیر موجه هستند. در جوابی که هر دو مسئله موجه هستند، به جواب بهینـه رسیده‌ایم.

مشاهده: اگر یک جواب اساسی در مسائل اولیه و همزاد امکان پذیر باشـد، آن جـواب اساسـی، جـواب اساسی بهینه است.

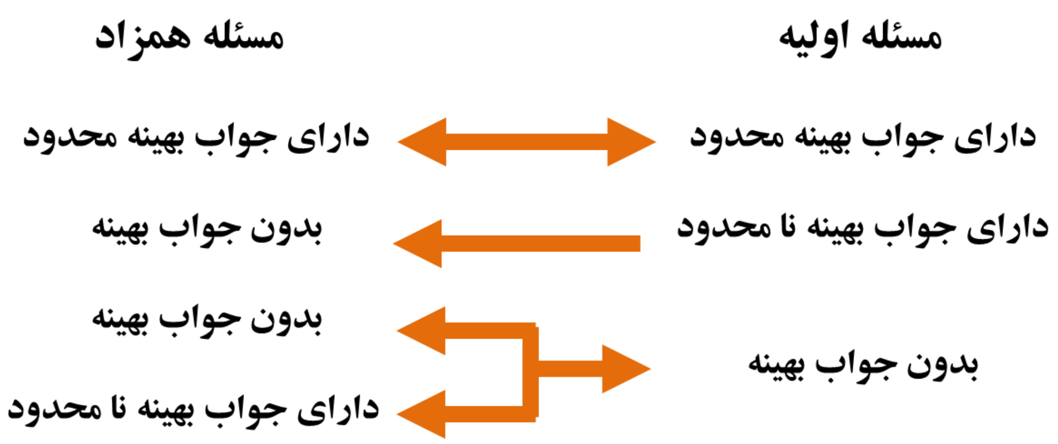
[۲] برای مطالعه مفهوم قیمت سایه به جزوه درس دوم (روش سیمپلکس اولیه) مراجعه کنید.

روابط بین جواب های مسئله اولیه و همزاد

هر گاه مسئله اولیه جواب بهینه محدود داشته باشد، در این حالت مسئله همزاد نیز دارای جواب بهینه محدود است. اما اگر مسئله اولیه دارای مقدار تابع هدف بهینه نامحدود باشد، مسئله همزاد بدون جواب بهینه است. هر دو مسئله نیز می توانند بدون جواب بهینه باشند ولی هر دو مسئله نمی توانند دارای جواب بهینه نامحدود باشند.

نکته: یک مسئله وقتی فاقد جواب بهینه است که بدون منطقه موجود باشد و به عبارتی دارای جواب موجه نباشد.

خلاصه موارد ارایه شده به صورت زیر بیان می شود.



تمرین: یک مدل با دو متغیر و دو محدودیت عملکردی بسازید که مدل اولیه جواب نامحدود داشته باشد. از طریق ترسیمی نشان دهید که مسئله همزاد امکان ناپذیر است.

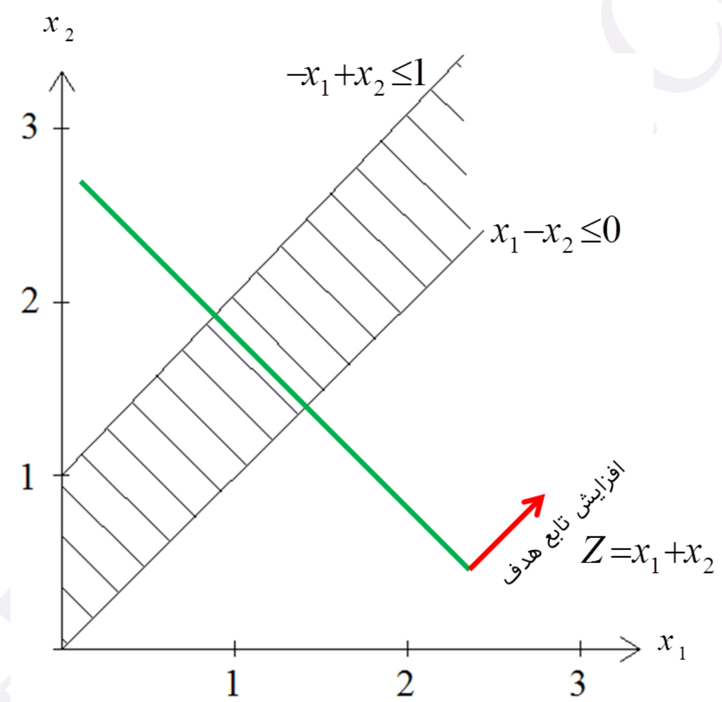
حل:

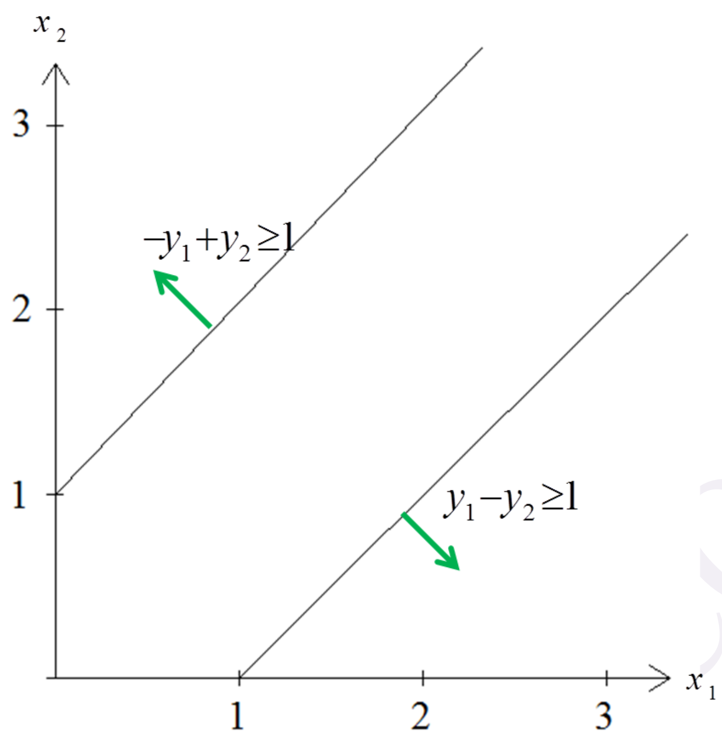
$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = x_1 + x_2\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad -x_1 + x_2 \le 1 \qquad (y_1)\\
&\quad (2)\quad x_1 - x_2 \le 0 \qquad (y_2)\\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

اگر $x_1 = x_2 = c$ و c به سمت بینهایت میل کند، آنگاه $Z = 2c$ و لذا تابع هدف به سـمت بینهایـت می رود. همزاد مدل فوق به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
& Min\ y_0 = y_1 \\
& s.t. \\
& \quad (1) \quad -y_1 + y_2 \geq 1 \\
& \quad (2) \quad\ \ y_1 - y_2 \geq 1 \\
& \qquad\quad y_i \geq 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

حل ترسیمی مدل‌های اولیه و همزاد به صورت زیر است.





واضح است که محدوده امکان پذیر مدل همزاد تهی است.

تمرین: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 6x_1 + 8x_2 \\ &s.t. \\ &\quad (1) \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ &\quad (2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ &\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

الف) مدل همزاد مدل فوق را بسازید.

ب) مدل اولیه و مدل همزاد را به صورت ترسیمی حل کنید.

پ) با استفاده از قسمت ب، جواب‌های اساسی تکمیلی برای هر دو مسئله را بدست آورید.

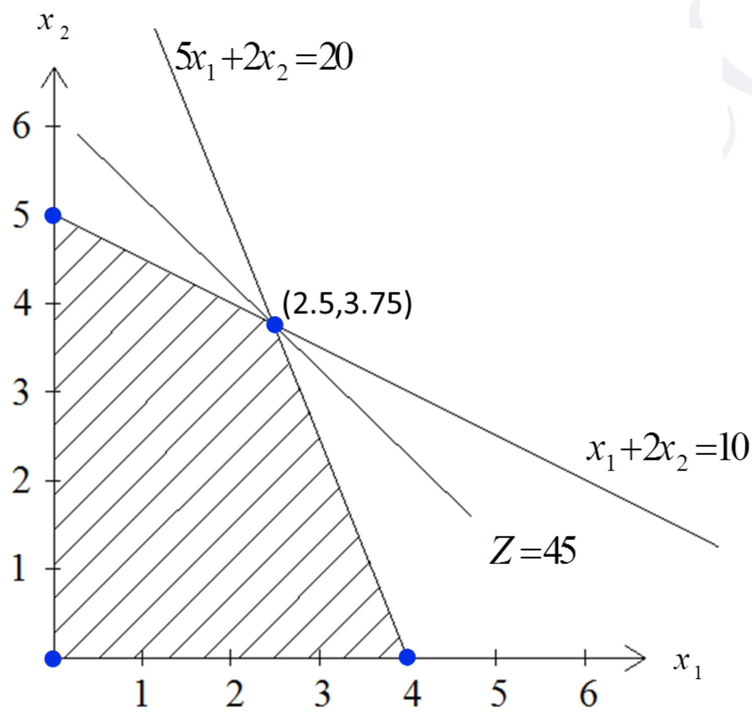
ت) با استفاده از روش سیمپلکس، در هر گام جواب اساسی اولیه و جواب اساسی همزاد را بدست آورید.

حل:ا

الف)

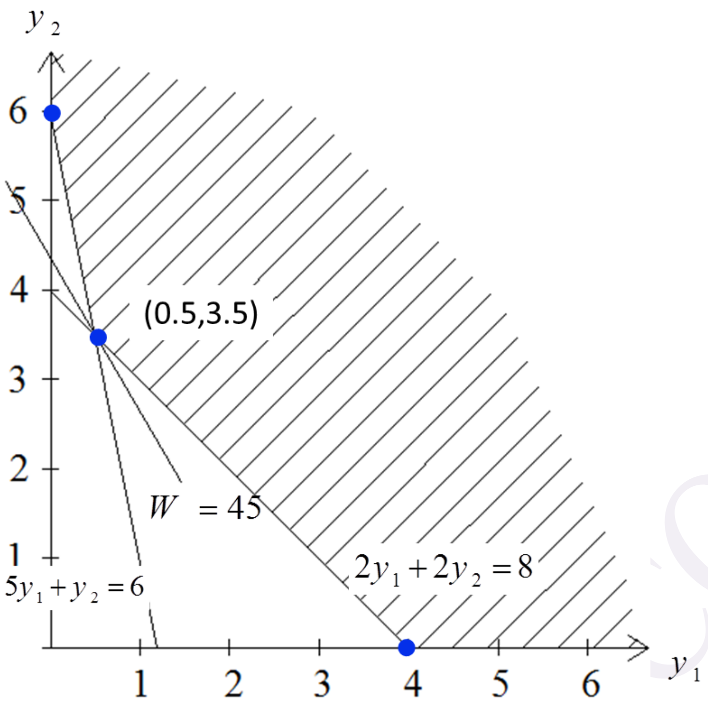
$$\begin{aligned}
&Min \quad W = 20y_1 + 10y_2 \\
&s.t. \\
&(1) \quad 5y_1 + y_2 \geq 6 \\
&(2) \quad 2y_1 + 2y_2 \geq 8 \\
&\quad y_i \geq 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

ب) حل ترسیمی مدل اولیه به صورت زیر است.



جواب بهینه برابر $(x_1^*, x_2^*) = (2.5, 3.75)$ و مقدار تابع هدف بهینه برابر با $Z^* = 45$ است.

حل ترسیمی مدل همزاد به صورت زیر است.



$(y_1^*, y_2^*) = (0.5, 3.5)$ جواب بهینه مدل همزاد است که مقدار تابع هدف $W = 45$ است.

پ) جواب اساسی برای مدل‌های اولیه و همزاد با استفاده از دو شکل بالا به صورت زیر می‌شود.

مسئله همزاد			مسئله اولیه		
موجه؟	جواب اساسی	Z	موجه؟	جواب اساسی	ردیف
خیر	(0,4,-2,0)	40	بله	(0,5,10,0)	1
خیر	(0,0,-6,-8)	0	بله	(0,0,20,10)	2
خیر	(1.2,0,0,-28/5)	24	بله	(4,0,0,6)	3
بله	(0.5,3.5,0,0)	45	بله	(2.5,3.75,0,0)	4
بله	(4,0,14,0)	80	خیر	(0,10,0,-10)	5
بله	(0,6,0,4)	60	خیر	(10,0,-3,0)	6

ت)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست	جدول غیر بهینه
Z	0	1	-6	-8	0	0	0	
X_3	1	0	5	2	1	0	20	20/2
X_4	2	0	1	2	0	1	10	10/2 کمینه

جواب اساسی اولیه= $(0,0,20,10)$

جواب اساسی همزاد= $(0,0,-6,-8)$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست	جدول غیر بهینه
Z	0	1	-2	0	0	4	40	
X_3	1	0	4	0	1	-1	10	10/4 کمینه
X_2	2	0	0.5	1	0	0.5	5	5/0.5

جواب اساسی اولیه= $(0,5,10,0)$

جواب اساسی همزاد= $(0,4,-2,0)$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست	جدول بهینه
Z	0	1	0	0	0.5	3.5	45	
X_1	1	0	1	0	0.25	-0.25	2.5	
X_2	2	0	0	1	-0.13	0.625	3.75	

جواب اساسی اولیه= $(2.5,3.75,0,0)$

جواب اساسی همزاد= $(0.5,3.5,0,0)$

روش سیمپلکس همزاد

روش سیمپلکس همزاد را می‌توان عکس روش سیمپلکس اولیه دانست. روش سیمپلکس اولیه مستقیما با جواب‌های امکان پذیر سروکار دارد و سعی می‌کند تا با ایجاد شرایط بهینگی به طرف جواب بهینه نزدیک

شود. در مقابل روش سیمپلکس همزاد با جواب‌هایی کار می‌کند که شرط بهینگی دارند و با کوشش در جهت موجه کردن آن‌ها، به جواب‌های موجه بهینه نزدیک شود.

روش سیمپلکس همزاد در بعضی از شرایط مخصوص فوق العاده مفید واقع می‌شود. گاهی بدست آوردن یک جواب اساسی موجه ابتدایی مستلزم اضافه کردن تعداد زیاد متغیر مصنوعی است. در چنین مواردی، ممکن است شروع کردن از یک جواب بهینه غیرموجه، استفاده از روش سیمپلکس همزاد آسان تر باشد.

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Max\ \ Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1,\dots,m \\ &\qquad\quad x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

مدل فوق را با اضافه کردن متغیرهای کمبود S_i به فرم استاندرد به صورت زیر در می‌آوریم.

$$\begin{aligned} &Max\ \ Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad i=1,\dots,m \\ &\qquad\quad x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

با توجه به مدل فوق، بیان رسمی‌آین روش به صورت زیر می‌شود:

گام ۰: در مسئله فوق، $c_j \ge 0$ برای تمامی j ها برقرار باشد. اگر برقرار نبود با تغییر متغیر این شرط برقرار شود.

گام ۱: اگر به ازای $i=1,\dots,m$ رابطه $b_i \geq 0$ برقرار باشد، توقف کنید زیرا به جواب بهینه حاصل شده است. در صورتیکه $b_i < 0$ باشد، به گام ۲ می رویم.

گام ۲: سطر لولا (یعنی متغیر که از پایه حذف می‌شود) را با استفاده از رابطه زیر انتخاب کنید.

$$\bar{b}_r = \underset{i}{Min}\{b_i \mid b_i < 0\}$$

اگر تمامی ضرایب متغیرها در سطر r-ام نامنفی باشد($a_{rj} \geq 0 \quad \forall j=1,\dots,n$)، توقف کنید زیرا مسئله امکان ناپذیر است. اگر به ازای مقادیر $j=1,\dots,n$ داشته باشیم $a_{rj} < 0$ برقرار باشد، به گام (۳) بروید.

گام ۳: ستون s را طبق رابطه زیر تعیین کنید.

$$\frac{c_s}{a_{rs}} = \underset{j}{Min}\left\{\frac{c_j}{|a_{rj}|} \mid a_{rj} < 0\right\}$$

در این گام متغیر ورودی به پایه تعیین می‌شود.

گام ۴: متغیر S را جایگزین متغیر پایه موجود در سطر r کنید و دوباره فرم استاندارد مدل را با عمل چرخش لولا استاندارد کنید.

گام ۵: به گام ۱ بروید.

برای روشن شدن الگوریتم فوق، مثال زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \qquad x_1 \qquad + 3x_3 \geq 3 \\
&\quad (2) \qquad\quad 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

برای آغاز حل، می‌بایستی محدودیت ها به صورت $\leq$ و سپس با اضافه کردن متغیرهای کمبود، فرم محدودیت ها به صورت تساوی درآید. در این صورت مدل به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad -x_1 \qquad -3x_3 + x_4 \qquad = -3 \\
&\quad (2) \qquad -2x_2 \quad -2x_3 \qquad + x_5 = -5 \\
&\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5.
\end{aligned}$$

جواب اساسی مدل فوق به صورت $(0,0,0,-3,-5)$ و $Z = 0$ است. چون متغیرهای x_4 و x_5 نامثبت هستند، لذا این جواب اساسی غیرموجه است. اجرای روش سیمپلکس همزاد به صورت زیر می‌شود.

تکرار	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
0	Z	0	1	4	12	18	0	0	0	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_5	2	0	0	-2	-2	0	1	-5	
1	Z	0	1	4	0	6	0	6	-30	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_2	2	0	0	1	1	0	-0.5	2.5	
2	Z	0	1	2	0	0	2	6	-36	جدول بهینه
	X_3	1	0	0.33	0	1	-0.33	0	1	
	X_2	2	0	-0.33	1	0	0.33	-0.5	1.5	

تکرار۰: متغیر x_5 را به دلیل این که ۵>۳ به عنوان متغیر ورودی به پایه انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب متغیر خروجی از جواب پایه، از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم چون $(\frac{12}{2} < \frac{18}{2})$ لذا متغیر x_2 به عنوان متغیر خروجی از جواب پایه انتخاب می‌شود. برای خروج x_2 از پایه و ورود x_5 به پایه، سطر معادله ۲ را بر ۲- تقسیم می‌کنیم.

تکرار۱: شرط توقف را کنترل می‌کنیم. چون ۳- بزرگتر از صفر نیست، لذا شرط امکان پذیری جواب برقرار نیست. x_4 به عنوان متغیر خروجی از پایه و با توجه به آزمون نسبت چون $(\frac{4}{1} > \frac{6}{3})$ است لذا متغیر x_3 وارد پایه می‌شود. برای انجام این تغییرات در جداول سیمپلکس، سطر معادله ۱ را بر ۳- تقسیم می‌کنیم.

تکرار۲: چون سمت راست معادله نامنفی است لذا شرط امکان پذیری برقرار است و لذا به جواب بهینه رسیدیم و الگورتیم متوقف می‌شود.

تمرین: مسئله زیر را با استفاده از روش سیمپلکس همزاد حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \qquad 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 25 \\
&\quad (2) \qquad 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 40 \\
&\quad (3) \qquad 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 20 \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4.
\end{aligned}
$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad -Z = -7x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \qquad -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 + x_5 = -25 \\
&\quad (2) \qquad -8x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_6 = -40 \\
&\quad (3) \qquad -3x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 + x_7 = -20 \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7.
\end{aligned}
$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	-1	7	2	5	4	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	-2	-4	-7	-1	1	0	0	-25	
X_6	2	0	-8	-4	-6	-4	0	1	0	-40	
X_7	3	0	-3	-8	-1	-4	0	0	1	-20	
Z	0	-1	3	0	2	2	0	0.5	0	-4	جدول بهینه
X_5	1	0	6	0	-1	3	1	-1	0	3	
X_2	2	0	2	1	1.5	1	0	-0.25	0	2	
X_7	3	0	13	0	11	4	0	-2	1	12	

تمرین: مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 15x_1 + 10x_2 \\ &s.t. \\ &\quad (1) \qquad 3x_1 + x_2 \le 40 \\ &\quad (2) \qquad x_1 + x_2 \le 20 \\ &\quad (3) \qquad 5x_1 + 3x_2 \le 90 \\ &\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,2. \end{aligned}$$

الف) این مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس اولیه حل نمایید. در هر تکرار جواب اساســی آن را در مسئله همزاد مشخص کنید.

ب) مسئله همزاد این مسئله را با استفاده از روش سمیپلکس همزاد حـل نماییـد. سلسـله جـواب‌هـای اساسی حال را با جواب‌های اساسی در قسمت اول مقایسه کنید.

حل:

الف)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	جواب اولیه	جواب همزاد
Z	0	1	-15	-10	0	0	0	0	جدول غیر بهینه	(0,0,0,-15,-10)
X_3	1	0	3	1	1	0	0	40	(0,0,40,20,90)	
X_4	2	0	1	1	0	1	0	20		
X_5	3	0	5	3	0	0	1	90		
Z	0	1	0	-5	5	0	0	200	جدول غیر بهینه	(5,0,0,0-5)
X_1	1	0	1	0.33	0.33	0	0	40/3	(40/3,0,0,20/3,70/3)	
X_4	2	0	0	0.66	-0.33	1	0	20/3		
X_5	3	0	0	1.33	-1.66	0	1	70/3		
Z	0	1	0	0	2.5	7.5	0	250	جدول بهینه	(2.5,7.5,0,0,0)
X_1	1	0	1	0	0.5	-0.5	0	10	(10,10,0,0,10)	
X_2	2	0	0	1	-0.5	1.5	0	10		
X_5	3	0	0	0	-1	-2	1	10		

ب) مدل همزاد به صورت زیر است:

$$Min \quad Z = 40y_1 + 20y_2 + 90y_3$$
$$s.t.$$
$$(1) \qquad 3y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 15$$
$$(2) \qquad y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10$$
$$y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3.$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	طرف سمت راست	جواب همزاد	جواب اولیه
Z	0	-1	40	20	90	0	0	0		
Y_4	1	0	-3	-1	-5	1	0	-15	(0,0,0,-15,-10)	(0,0,40,20,90)
Y_5	2	0	-1	-1	-3	0	1	-10	جدول غیر بهینه	
Z	0	1	0	20/3	70/3	40/3	0	-200		
Y_1	1	0	1	0.33	1.66	-0.33	0	5	(5,0,0,0-5)	(40/3,0,0,20/3, 70/3)
Y_5	2	0	0	-0.66	-1.33	-0.33	1	-5	جدول غیر بهینه	
Z	0	1	0	0	10	10	10	-250		
Y_1	1	0	1	0	1	-0.5	0.5	2.5	(2.5,7.5,0,0,0)	(10,10,0,0,10)
Y_2	2	0	0	1	2	0.5	-1.5	7.5	جدول بهینه	

جواب بهینه مدل همزاد $(2.5, 7.5, 0)$ و $Z = 250$ است.

تمرین: مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Max \quad Z = -5x_1 - 10x_2$$
$$s.t.$$
$$(1) \qquad 2x_1 + x_2 \leq 40$$
$$(2) \qquad x_2 \geq 15$$
$$(3) \qquad -2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2.$$

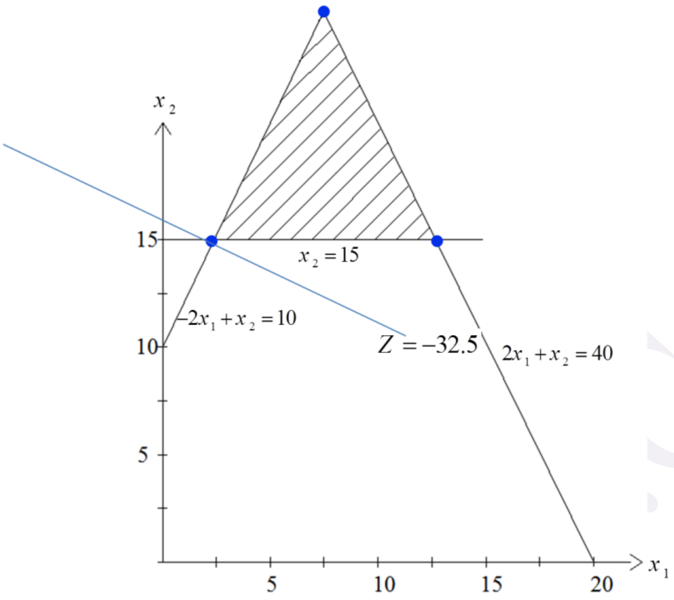
الف) مدل فوق را به صورت ترسیمی حل نمایید.

ب) مدل فوق را به روش سیمپلکس همزاد حل نمایید.

پ) مسیر حرکت جدول سیمپلکس همزاد را در شکل نشان دهید.

حل:

الف)

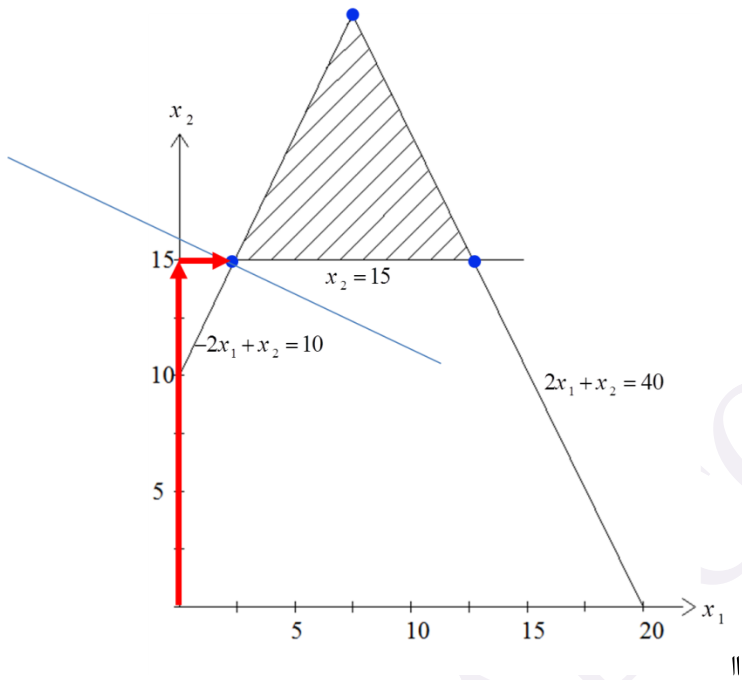


ب)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	1	2	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	2	1	1	0	0	40	
X_4	2	0	0	-1	0	1	0	-15	
X_5	3	0	-2	1	0	0	1	10	
Z	0	1	2	0	0	2	0	-30	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	0	0	1	1	0	25	
X_2	2	0	0	1	0	-1	0	15	
X_5	3	0	-2	0	0	1	1	-5	
Z	0	1	0	0	0	2.5	0.5	-32.5	جدول بهینه
X_3	1	0	0	0	1	2	1	20	
X_2	2	0	0	1	0	-1	0	15	
X_1	3	0	1	0	0	-0.5	-0.5	2.5	

جواب بهینه برابر $(x_1, x_2) = (2.5, 15)$ و $Z = -32.5$ است.

پ) مسیر حرکت جدول سیملکس همزاد در شکل به صورت زیر است: $(0,0) \rightarrow (0,15) \rightarrow (2.5,15)$



الگوریتم سیمپلکس اولیه-همزاد

این الگوریتم مانند حالت قبل برای مسائلی کاربرد دارد که غیرموجه (به دلیل وجود اعداد منفی در سمت راست محدودیت ها) و غیربهینه(به دلیل وجود اعداد منفی در سطر صفر) باشد. مزیت این الگوریتم نسبت به روش های قبلی این است که دیگر نیازی به اضافه کردن متغیر مصنوعی نیست. الگوریتم اولیه-همزاد مبتنی بر مفاهیم الگوریتم سیمپلکس اولیه و همزاد است.

نکته: الگوریتم های دیگری با عنوان الگوریتم اولیه-همزاد وجود دارند که علی رغم تشابه اسمی، از نظر روش حل و کارایی الگوریتم تفاوت های عمده ای با یکدیگر دارند.

گام های الگوریتم سیمپلکس اولیه-همزاد

گام ۱) مانند شکل استاندارد روش سیمپلکس تمامی محدودیت های مسئله را به شکل کوچکتر یا مساوی و تابع هدف به صورت ماکزیمم تبدیل کنید.

گام ۲) بعد از اضافه کردن متغیرهای کمکی به محدودیت ها، مسئله را وارد جدول سیمپلکس کنید.

گام۳) میزان تغییر تابع هدف را با محاسبه اثر به کارگیری سیمپلکس اولیه یا سیمپلکس همزاد به طریق زیر محاسبه کنید:

الف) اثر سیمپلکس اولیه: این اثر وقتی بررسی می شود که در سطر صفر متغیری با ضریب منفی وجود داشته باشد و عدد ستون لولا و مقدار سمت راست مقابل این عدد، غیرمنفی باشد. این اثر به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\left|\frac{b_i \times c_j}{a_{ij}}\right|$$

ب) اثر سیمپلکس همزاد: این اثر وقتی محاسبه شدنی است که متغیری در سطر صفر با ضریب غیرمنفی وجود داشته باشد و عدد ستون لولا و مقدار سمت راست مقابل این عدد منفی باشند. این اثر مشابه بند الف و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\left|\frac{b_i \times c_j}{a_{ij}}\right|$$

گام ۴) بزرگترین قدر مطلق محاسبه شده مربوط به اثر سیمپلکس اولیه و همزاد را انتخاب کرده و طبق الگوریتم های اولیه یا همزاد عمل می کنیم. اگر امکان به کارگیری سیمپلکس و یا سیمپلکس همزاد نباشد، به انتهای عملیات رسیده اید، در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

مثال: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= -3x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 3x_1 + x_2 &\ge 9 \\ 7x_1 + 5x_2 &\le 35 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

حل:

براساس گام های ۱ و ۲، مسئله را به صورت زیر تبدیل می کنیم.

$$
\begin{aligned}
Max\quad Z &= -3x_1 + 6x_2 \\
-x_1 - 2x_2 + s_1 &= -6 \\
-3x_1 - x_2 + s_2 &= -9 \\
7x_1 + 5x_2 + s_3 &= 35 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

اثر سیمپلکس اولیه با توجه به وجود ضریب منفی x_2 در سطر صفر (۶-) و وجود تنها عدد مثبت در این ستون یعنی ($a_{32}=5$) و عدد مثبت سمت راست آن $b_3=35$ به طریق زیر محاسبه می شود:

$$\text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left|\frac{35\times 6}{5}\right| = 42$$

اثر سیمپلکس همزاد براساس ضریب مثبت x_1 در سطر تابع هدف (عدد ۳)، و اعداد منفی ستون زیر آن و $b_1=-6$ و $b_2=-9$ محاسبه می شود.

$$\text{اثر سیمپلکس همزاد} = \left|\frac{(-6)\times 3}{(-1)}\right| = 18$$

$$\text{اثر سیمپلکس همزاد} = \left|\frac{(-9)\times 3}{(-3)}\right| = 9$$

از آن جا که بزرگترین اثر محاسبه شده از میان سه اثر فوق مربوط به سیمپلکس اولیه است، محاسبات جدید به روش سیمپلکس اولیه انجام می شود. محاسبات این مرحله در جدول ۱ انجام شده است.

جدول ۱

ستون سیمپلکس اولیه

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	طرف سمت راست
Z	0	1	3	-6	0	0	0	0
s_1	1	0	-1	-2	1	0	0	-6
s_2	2	0	-3	-1	0	1	0	-9
s_3	3	0	7	5	0	0	1	35

سطر سیمپلکس اولیه

در جدول ۲ چون عددی منفی در سطر صفر وجود ندارد، امکان و محاسبه اثر سیمپلکس اولیه نیست. اما از آن جا که تنها عدد منفی مربوط به متغیر اساسی s_2 یعنی ۲- است و در سطر ۲ تنها عدد منفی ۱.۶- است و $\frac{57}{5} > 0$، محاسبه اثر سیمپلکس همزاد امکان پذیر است. این اثر که تنها اثر نیز است به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{اثر سیمپلکس همزاد} = \left| \frac{(-2)\times(\frac{57}{5})}{(-\frac{8}{5})} \right| = 14.25$$

جدول ۲

ستون سیمپلکس همزاد

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	طرف سمت راست
Z	0	1	$\frac{57}{5}$	0	0	0	$\frac{6}{5}$	42
s_1	1	0	$\frac{9}{5}$	0	1	0	$\frac{2}{5}$	8
s_2	2	0	$-\frac{8}{5}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$	-2
x_2	3	0	$\frac{7}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	7

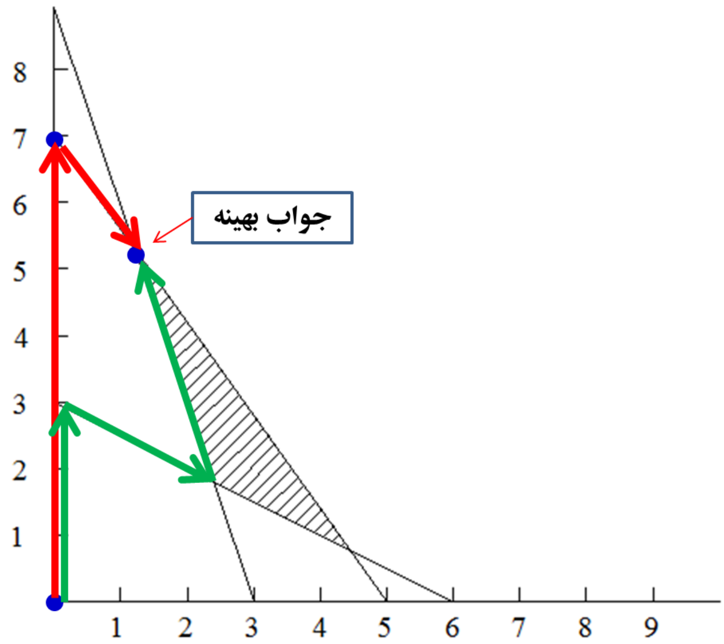
سطر سیمپلکس همزاد

در جدول ۳، از ان جا که هیچ عدد منفی در سطر صفر وجود ندارد، امکان محاسبه اثر سیمپلکس اولیه نیست و به همین ترتیب جون در سمت راست نیز تمامی اعداد مثبت هستند، اثـر سـیمپلکس همـزاد هـم محاسبه شدنی نیست. پس به جدول نهایی و عملیات به پایان رسیده است.

جدول ۳

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	$\frac{57}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{111}{4}$
s_1	1	0	0	0	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{23}{4}$
x_1	2	0	1	0	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$
x_2	3	0	0	1	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{21}{4}$

در مقایسه تعداد تکرارهای این الگوریتم با الگوریتم های سیمپلکس اولیه و همزاد، مشاهده می شود که تعداد تکرار در اینجا کمتر از تعداد تکرارهای الگوریتم های رایج است. در شکل زیر عملکرد این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم سیمپلکس اولیه نمایش داده شده است. در روش **سیمپلکس اولیه – همزاد** بعـد از **دو** تکرار به جواب بهینه می رسیم که با **خط قرمز** مسیر رسیدن به جواب بهینه نمایش داده شـده اسـت. اگـر این مسئله را با استفاده از **الگوریتم سیمپلکس اولیه** حل نماییم، پس از **سه تکرار** به جواب بهینـه مـی رسیم که مشخصا یک تکرار بیش از الگوریتم سیمپلکس اولیه – همزاد است. در شکل زیر بـا **خـط سـبز**، مسیر رسیدن به جواب بهینه با استفاده از الگوریتم سیمپلکس اولیه نشان داده شده است.



حالات خاص در الگوریتم اولیه – همزاد

در این الگوریتم مانند الگوریتم سیمپلکس اولیه، ممکن است که حالات خاصی رخ دهد که در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

الف) حالت تبهگنی:

نشانه این حالت مشابه الگوریتم سیمپلکس است. برای مطالعه نحوه خارج شده از حالت تبهگنی، به درس ۲ مراجعه کنید.

ب) وجود جواب بهینه نامحدود:

نشانه این حالت وجود اعداد نامثبت(منفی یا صفر) در ستون لولای حداقل یک متغیر ورودی است.

برای روشن شدن موضوع، مثالی می زنیم.

$$\begin{aligned} Min \quad Z &= -3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ -x_1 + x_2 \qquad &\ge 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max \quad -Z &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ x_1 - x_2 \quad\quad &\le -3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max \quad -Z &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 \quad\quad &= 10 \\ x_1 - x_2 \quad\quad + s_2 &= -3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \; s_1, \; s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

نمایش جدولی مدل فوق به صورت زیر است:

ستون سیمپلکس اولیه

جدول ۱

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	-1	-3	1	-2	0	0	0
s_1	1	0	1	-1	2	1	0	10
s_2	2	0	1	-1	0	0	1	-3

سطر سیمپلکس اولیه

اثر سیمپلکس اولیه$= \left| \dfrac{(10)\times(-3)}{1} \right| = 30$

اثر سیمپلکس همزاد$= \left| \dfrac{(-3)\times 1}{-1} \right| = 3$

اثر سیمپلکس اولیه حداکثر اثر را خواهد داشت. پس مسئله از طریق سیمپلکس اولیه حل می شود.

جدول ۲

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	-1	0	-2	4	3	0	30
x_1	1	0	1	-1	2	1	0	10
s_2	2	0	0	0	-2	-1	1	-13

با توجه به ستون زیر x_2 می توان توقف کرد. نبودن عدد مثبت در این ستون نشانه نامحدود بودن مقدار بهینه تابع هدف است.

حالت سوم: جواب بهینه چندگانه

نشانه وجود جواب بهینه چندگانه، همان نشانه روش سیمپلکس اولیه است. برای این منظور به **درس ۲** مراجعه کنید.

حالت چهارم: فقدان منطقه موجه

در روش سیمپلکس، وجود یک متغیر مصنوعی با مقدار غیر صفر در جدول بهینه، بیانگر حالت خاص نداشتن منطقه موجود است. در الگوریتم سیمپلکس اولیه – همزاد به دلیل عدم وجود متغیر مصنوعی این روش میسر نیست. نشانه این حالت در الگوریتم اولیه – همزاد در عدم امکان تعیین سطر لولا یا ستون لولا به کمک روش سیمپلکس اولیه یا سیمپلکس همزاد است. برای این منظور مثالی می زنیم.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 6x_1+3x_2 \\ x_1+x_2 &\geq 10 \\ 2x_1+3x_2 &\leq 12 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 6x_1+3x_2 \\ -x_1-x_2+s_1 \quad &= -10 \\ 2x_1+3x_2 \quad +s_2 &= 12 \\ x_1,x_2,s_1,s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

چون در سطر صفر عددی وجود ندارد لذا اثر سیمپلکس همزاد محاسبه نمی شود. جدول تکرار اول بـه صورت زیر می شود.

ستون سیمپلکس اولیه

جدول ۱

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-6	-3	0	0	0
s_1	1	0	-1	-1	1	0	-10
s_2	2	0	2	3	0	1	12

سطر سیمپلکس اولیه

اثر سیمپلکس اولیه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\text{اثر سیمپلکس اولیه}=\left|\frac{(12)\times(-6)}{2}\right|=36$$

پس متغیر s_2 از پایه خارج و متغیر x_1 وارد پایه می شود. جدول تکرار دوم به صورت زیر می شود.

جدول ۲

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	6	0	3	36
s_1	1	0	0	0.5	1	0.5	-4
x_1	2	0	1	1.5	0	0.5	6

سطر سیمپلکس همزاد

تمامی اعداد سطر صفر نامنفی هستند لذا امکان محاسبه اثر سیمپلکس اولیه نیست. همچنین چون عدد منفی در سطر سیمپلکس همزاد وجود ندارد لذا امکان اثر سیمپلکس همزاد هم نیست و **لذا این مسئله جواب ندارد.**

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**