

درس ۱۳: روش حل مسائل

برنامه ریزی عدد صحیح:

روش صفحه برش

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر شمارا باشد که با کنترل تمامی آن‌ها می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای n متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n = 10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n = 20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n = 30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود که حتی سریعترین کامپیوترها قادر به شمارش تمامی جواب‌ها نخواهند بود. حال اگر تعداد متغیرها از مقیاس میلیون باشند، دشوار به سرعت است بیشتر می‌شود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

(۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

(۲) ساختار مسئله

همان طور که ملاحظه می‌شود تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از آنجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملاً بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش ممکن است برای حل برخی از مسائل کاربردی که مقدار بسیار بزرگی دارند مناسب باشد. ولی این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱- شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲- شاید جواب گره شده دیگر بهینه نباشد.

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مسئله فوق، $z = 11, x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد

صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه

مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

یکی از روش‌های متداول برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، روش صفحه برش یا *Cutting plane*

است که در ادامه معرفی می‌شود.

روش صفحه برش *Cutting plane*

برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } cx$$

$$x \in S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0, \text{int}\}$$

ایده روش صفحه برش اضافه کردن محدودیت‌های جدید به مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوطه به منظور

حذف نقاط بهینه غیرصحیح بدون حذف نقاط صحیح S از ناحیه امکان پذیر است یعنی آزاد کردن شرط

صحیح بودن از S و در عین حال اضافه کردن محدودیت‌های جدید به فرم $\bar{a}x = \bar{b}$ به نحوی که نقاط S

حذف شوند. یعنی مدل زیر را حل نمائید.

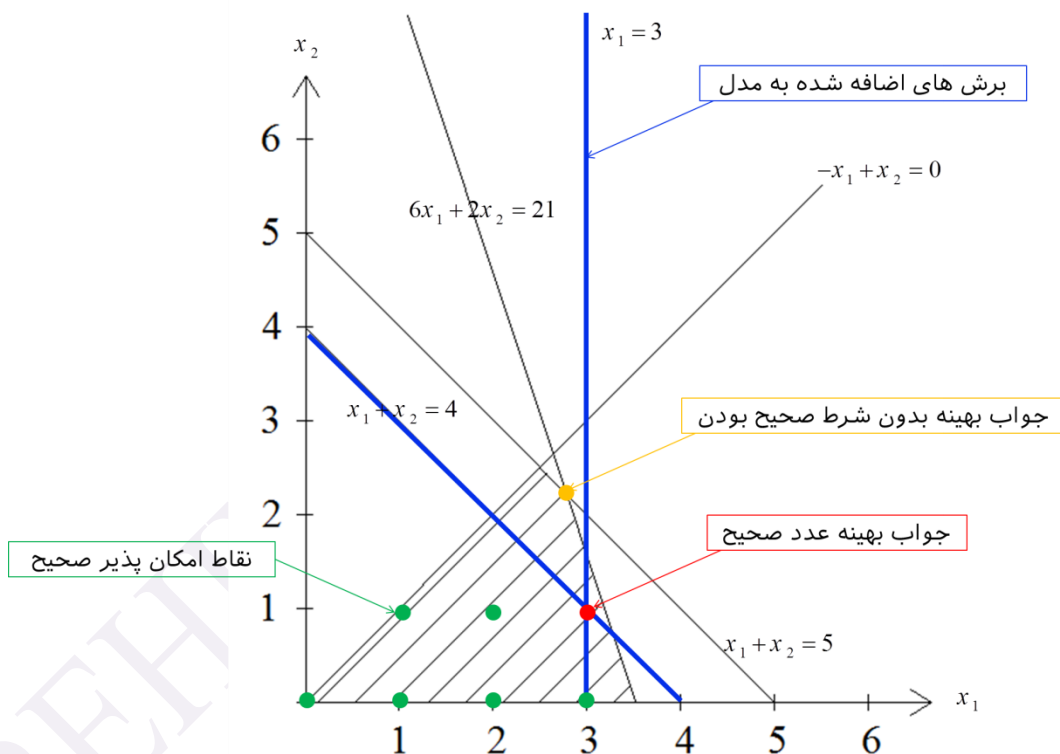
$$\text{Max } cx$$

$$x \in T = \{x \mid Ax = b, \bar{a}x = \bar{b}, x \geq 0\}$$

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

با اضافه کردن محدودیت $x_1 \leq 3$ و $x_1 + x_2 \leq 4$ به مدل اصلی و حل مدل آزاد شده، به جواب مدل با متغیرهای عدد صحیح می‌رسیم. حل ترسیمی مدل فوق به صورت زیر می‌شود.



فرم عمومی یک برش یا cut

مدل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } & cx \\ & x \in Q = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad (1) \end{aligned}$$

فرض کنید که x_B یک جواب امکان پذیر پایه (نه لزوما بهینه) باشد، یعنی:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

و همچنین برای جواب‌های غیرپایه داریم: $x_j = 0$. با ضرب $h \neq 0$ در رابطه (۲) داریم:

$$hx_{B_i} + \sum_{j \in N} h\bar{a}_{ij} x_j = h\bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

چون $x_j \geq 0$ و $\lfloor a \rfloor \leq a$ پس خواهیم داشت:

$$\lfloor h \rfloor \leq h \rightarrow \lfloor h \rfloor x_{B_i} \leq hx_{B_i} \rightarrow \lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq hx_{B_i} + \sum h\bar{a}_{ij} x_j \rightarrow \lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq h\bar{b}_i$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq h\bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

از آن جایکه سمت چپ رابطه بالا صحیح است، لذا رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, \dots, m$$

از طرفی با ضرب رابطه (۲) در $\lfloor h \rfloor$ و با کم کردن از رابطه فوق داریم:

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h \rfloor \bar{a}_{ij} - \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \lfloor h \rfloor \bar{b}_i - \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

رابطه فوق اساس خیلی از برش‌ها است که بستگی به نحوه انتخاب h دارد.

برش‌های کسری یا Gomory

این برش‌ها از حذف صحیح بودن متغیرها بدست می‌آید. در این قسمت $h=1$ در نظر بگیرید. در این صورت رابطه (۳) به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

فرض کنید $f_{ij} = \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor$ و $f_{i0} = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$ (همان قسمت کسری $\bar{a}_{ij}$)، در این صورت:

$$\sum_{j \in N} f_{ij} x_j \geq f_{i0} \quad \text{or} \quad s_i - \sum_{j \in N} f_{ij} x_j = -f_{i0}, s_i \geq 0 \quad (4)$$

می‌توان x_{B_i} را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor + \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j$$

$$x_{B_i} = \underbrace{\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor}_{f_{i0}} - \underbrace{\sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j}_{\sum f_{ij} x_j} + \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j$$

$$x_{B_i} = \underbrace{-(-f_{i0} + \sum_j f_{ij} x_j)}_{s_i} + \left(\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \right)$$

با توجه به این که x_{B_i} و $\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j$ عدد صحیح هستند، بنابراین s_i هم صحیح خواهند بود.

خاصیت مهم رابطه (۴) که اگر $f_{i0} > 0$ باشد، با اضافه کردن برش (۴)، جواب بهینه غیر صحیح مربوط از مدل آزاد شده (حذف شرط صحیح بودن متغیرهای عدد صحیح) حذف می‌شود.

نکته: محدودیت شماره (۴) را به راحتی می‌توان به جدول بهینه با متغیر پایه S اضافه کرد و با توجه به این که شرط بهینگی بدون تغییر می‌ماند، تنها شرط امکان پذیری برای محدودیت جدید نقض می‌شود که می‌توان از روش سیمپلکس همزاد آن را برطرف کرد.

نکته: برش (۴) را نه تنها برای ضرایب محدودیت‌ها، بلکه برای ضرایب تابع هدف هم می‌توان نوشت.

نکته: بر مبنای اضافه کردن یک برش به فرم (۴) و استفاده از روش سیمپلکس همزاد تا حصول یک جواب بهینه صحیح می‌توان الگوریتمی برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح ارایه داد. البته هیچ دلیلی بر متناهی بودن این الگوریتم وجود ندارد.

نکته: برای انتخاب سطری که توسط آن برش بدست می‌آید، روش‌های ابتکاری متفاوتی وجود دارد که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$1) f_{r0} = \text{Max}_i \{ \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \}$$

$$2) \frac{f_{r0}}{\sum_j f_{rj}} = \text{Max}_i \left\{ \frac{f_{i0}}{\sum_j f_{ij}} \right\}$$

$$3) \frac{f_{r0}}{f_{rk}} = \text{Max}_i \left\{ \frac{f_{i0}}{f_{ik}} \right\} \quad k \in \text{متغیرهای غیر پایه}$$

$$4) f_{r0} \frac{\bar{c}_k}{f_{rk}} = \text{Max}_i f_{i0} \left(\text{Min} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{f_{ij}} \right\} \right)$$

موارد (۲) و (۳) بر مبنای حذف بیشترین ناحیه غیر صحیح و مورد (۴) بر مبنای بیشترین مقدار کاهش تابع هدف است.

نکته: هیچ دلیل بر برتری یکی از چهار روش بر روش دیگری نیست.

نکته: در استفاده از روش سیمپلکس همزاد نیازی به نگه داشتن تمامی برش‌ها نیست. برشی که متغیر پایه آن در پایه بوده و ضریب تمامی متغیرهای آن صفر باشد می‌توان از جدول سیمپلکس حذف شود.

نکته: به علت خطاهایی که در اثر گرد کردن پیش می‌آید، نمی‌توان از این روش در کامپیوتر برای مثال‌های واقعی استفاده کرد.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش برش‌های کسری حل نمایید.

$$\text{Max } z = 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

ابتدا جدول سیمپلکس نهایی را بدست می‌آوریم:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	6
x_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40
x_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1
x_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5
Z	0	1	0	0	5/4	3/4	41.25
x_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25
x_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75

جدول بهینه

برش‌های کسری براساس جدول نهایی سیمپلکس به صورت زیر است:

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

:

برش معادله ۰ (تابع هدف)

$$1) \left(\frac{5}{4} - \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor \right) x_3 + \left(\frac{3}{4} - \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor \right) x_4 \geq 41.25 - \lfloor 41.25 \rfloor \rightarrow \frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 \geq 0.25$$

برش معادله ۱:

$$2) \left(\frac{9}{4} - \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor \right) x_3 + \left(-\frac{1}{4} - \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor \right) x_4 \geq 2.25 - \lfloor 2.25 \rfloor \rightarrow \frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 \geq 0.25$$

برش معادله ۲:

$$3) \left(-\frac{5}{4} - \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor \right) x_3 + \left(\frac{1}{4} - \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor \right) x_4 \geq 3.75 - \lfloor 3.75 \rfloor \rightarrow \frac{3}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 \geq 0.75$$

حال اینکه کدام برش را اضافه کرد می‌توان از اصول ۴ گانه ای که قبلاً اشاره شده استفاده کرد. با فرض

استفاده از اصل (۱)، برش شماره ۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{3}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 \geq 0.75 \rightarrow -\frac{3}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 \leq -0.75 \rightarrow -\frac{3}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 + s_1 = -0.75$$

با اضافه کردن برش فوق به جدول سیمپلکس، جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	3/4	0	41.25
X ₁	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X ₂	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S ₁	3	0	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	0	0.33	1.66	40
X ₁	1	0	1	0	0	-1	3	0
X ₂	2	0	0	1	0	0.66	-1.66	5
X ₃	3	0	0	0	1	0.33	-1.33	1

جدول بهینه

همان طور که مشاهده می شود با یک بار تکرار عملیات سیمپلکس همزاد به جواب بهینه رسیدیم.

با توجه به این که این مدل دارای ۲ متغیر اصلی است می توان از روش ترسیمی هم حل کرد. برای حل

ترسیمی باید تمامی برش ها را برحسب x_1 و x_2 در آورد.

برش ۱ و ۲:

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq 0.25 \rightarrow \frac{1}{4}(6 - x_1 - x_2) + \frac{3}{4}(45 - 5x_1 - 9x_2) \geq 0.25 \rightarrow -4x_1 - 7x_2 \geq -35$$

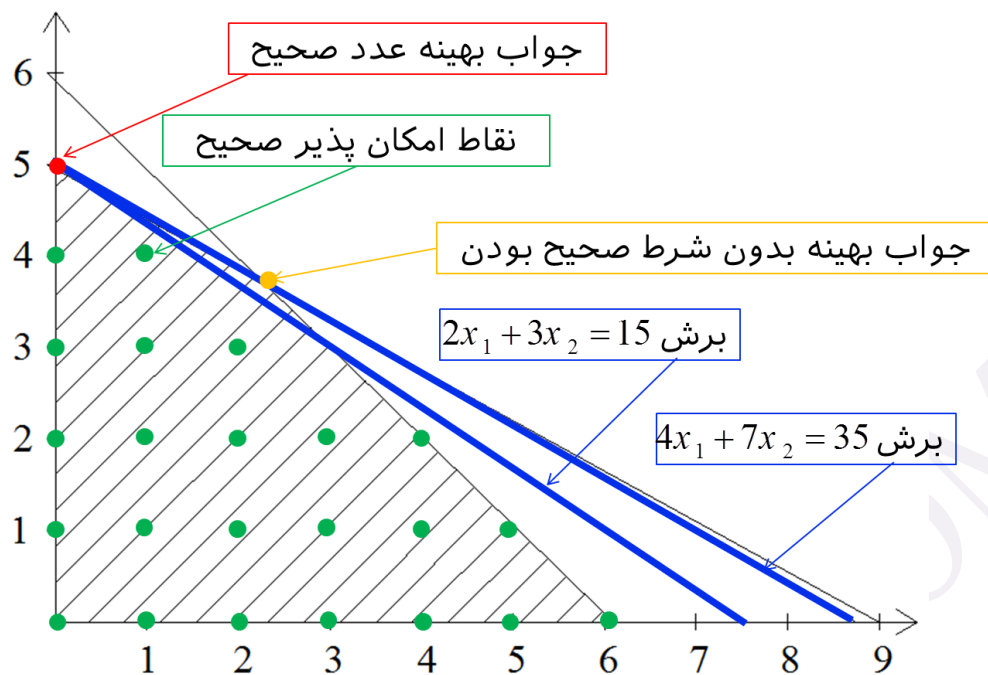
$$\rightarrow 4x_1 + 7x_2 \leq 35$$

برش ۳:

$$\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 0.75 \rightarrow \frac{3}{4}(6 - x_1 - x_2) + \frac{1}{4}(45 - 5x_1 - 9x_2) \geq 0.75 \rightarrow -2x_1 - 3x_2 \geq -15$$

$$\rightarrow 2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

حل ترسیمی مدل فوق به صورت زیر است:



با اضافه کردن برش‌های فوق، جواب (۰, ۵) جواب بهینه مسئله خواهد بود. همان طور که از شکل بالا پیدا است این برش‌ها هیچ جواب عدد صحیح از مجموعه جواب‌های امکان پذیر را حذف نمی‌کنند و فقط جواب‌های غیر صحیح کم می‌شود.

برش‌های کاملاً صحیح همزاد (Dual-All-Integer cut)

در روش‌های برش‌های کسری همان طور که مشاهده شد در هر تکرار شرایط امکان پذیر و بهینگی را حفظ کردیم و به دنبال برقراری شرط صحیح بودن بودیم. همان طور که اشاره شد اشکال این روش خطاهایی که در اثر گرد کردن به وجود می‌آید، است. برای رفع این ایراد از روش دیگری استفاده می‌کنیم که در هر تکرار شرایط بهینگی (امکان پذیری همزاد) و صحیح بودن را حفظ می‌کنیم و دنبال برقرار شرط امکان پذیری هستیم و در صورت امکان ناپذیر بودن جواب، برش به مسئله اضافه می‌کنیم که جواب صحیح امکان ناپذیر را حذف نماید و امکان ناپذیری را کاهش دهد. برای حفظ بهینگی و شرط صحیح بودن می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

۱- **حفظ بهینگی:** برای این کار کافی است از روش سیمپلکس همزاد استفاده کنیم.

۲- **حفظ صحیح بودن:** برای این کار کافی است که عملیات چرخش لولا را روی عناصر ۱- انجام دهیم. برای این منظور می‌توان برش‌های خاصی در فرم عمومی را استفاده کنیم.

فرض کنید یک پایه اولیه با داده‌های کاملاً صحیح برای سیمپلکس همزاد در دست است که این جواب پایه شرایط بهینگی را داراست ولی امکان پذیر نیست ($b < 0$). با انتخاب مناسب برای h ($0 < h < 1$) از برش عمومی به فرم زیر، می‌توان برشی برای حذف این جواب امکان ناپذیر ایجاد کرد:

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h \rfloor \bar{a}_{ij} - \lfloor h \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \lfloor h \rfloor \bar{b}_i - \lfloor h \bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, \dots, m \quad (*)$$

در انتخاب h باید به نحوی عمل کرد که عمل چرخش لولا روی ۱- صورت گیرد. برای $0 < h < 1$ برش (*) به صورت زیر می‌شود ($\lfloor h \rfloor = 0$):

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h \bar{a}_{rj} \rfloor) x_j \leq \lfloor h \bar{b}_r \rfloor$$

با اضافه کردن متغیر کمبود s داریم:

$$s + \sum_{j \in N} (\lfloor h \bar{a}_{rj} \rfloor) x_j = \lfloor h \bar{b}_r \rfloor, \quad s \geq 0, \text{int}$$

توجه کنید که اگر تمام $\bar{b}_r \geq 0$ باشند، جواب فعلی بهینه است لذا یک r وجود دارد که

$$b_r < 0 \rightarrow \lfloor h \bar{b}_r \rfloor < 0$$

بنابراین وقتی این برش با متغیر پایه s به جدول سیمپلکس اضافه می‌شود، روش سیمپلکس همزاد، s را از پایه خارج می‌کند. اگر x_k بخواهد متغیر ورودی به پایه باشد،

اولا باید $a_{rk} < 0$ (طبق روش سیمپلکس همزاد)

ثانیا برای حفظ شرط صحیح بودن جواب، h را باید به نحوی انتخاب کرد که $\lfloor h \bar{a}_{rk} \rfloor = -1$

ثالثا، مقدار $\bar{c}_j$ جدید پس از انجام چرخش لولا به صورت زیر است:

$$\bar{c}_j^{new} = \bar{c}_j^{old} - \left[\frac{h\bar{a}_{rj}}{h\bar{a}_{rk}} \right] \bar{c}_k = \bar{c}_j + \left[h\bar{a}_{rj} \right] \bar{c}_k \geq 0$$

از آنجاییکه برای $a_{rj} < 0$ و $h > 0$ ، داریم $\left[h\bar{a}_{rj} \right] \leq -1$ ، بنابراین یک شرط لازم برای حفظ شرط بهینگی، عبارت است از:

$$\bar{c}_k = \text{Min}_{\bar{a}_{rk} < 0} \bar{c}_j$$

اشاره شد که برای انتخاب h باید اولاً شرط $\left[h\bar{a}_{rk} \right] = -1$ برقرار باشد، بنابراین:

$$\left[h\bar{a}_{rk} \right] = -1 \rightarrow -1 \leq h\bar{a}_{rk} < 0$$

$$h\bar{a}_{rk} < 0 \xrightarrow{\bar{a}_{rk} < 0} h > 0 \text{ از قبل داشتیم}$$

$$h\bar{a}_{rk} \geq -1 \rightarrow h \leq \frac{-1}{\bar{a}_{rk}} \leq 1$$

ثانیا برای برقراری شرط بهینگی $\bar{c}_j + \left[h\bar{a}_{rj} \right] \bar{c}_k \geq 0$ برای مقدار h داریم:

• اگر $\bar{c}_k = 0$ باشد، هر مقداری از h را می‌توان انتخاب کرد:

$$\bullet \text{ اگر } \bar{c}_k > 0 \text{ باشد کافی است } h \leq - \frac{\left[\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right]}{\bar{a}_{rj}}.$$

بنابراین h باید در محدوده زیر قرار بگیرد:

$$h \leq h^* = \text{Min} \left\{ 1, \frac{-1}{\bar{a}_{rk}}, \text{Min}_{\bar{a}_{rj} < 0} - \frac{\left[\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right]}{\bar{a}_{rj}} \right\} = \text{Min}_{\bar{a}_{rj} < 0} \left\{ 1, - \frac{\left[\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right]}{\bar{a}_{rj}} \right\}$$

نکته: توجه کنید که برای هر مقدار $h \leq h^*$ شرایط بهینگی و صحیح بودن حفظ خواهد شد ولی بهتر است $h = h^*$ انتخاب شود تا تغییرات تابع هدف بیشتر شود.

نکته: برشی که در جدول سیمپلکس، متغیر مازاد آن در پایه با مقدار مثبت و مابقی متغیرها برابر صفر باشد را می‌توان از جدول سیمپلکس حذف کرد.

نکته: برای ایجاد این نوع از برش‌ها، باید یک جواب پایه با داده‌های صحیح که شرط بهینگی را برقرار دارد، وجود داشته باشد. به سادگی می‌توان چنین پایه را استخراج کرد. برای این منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

با اضافه کردن x_s به عنوان متغیر مازاد، می‌توان یک پایه صحیح به صورت $x = 0, x_s = b$ بدست آورد.

$$\begin{aligned} \text{Max } cx \\ Ax + x_s = b \\ x \geq 0, x_s \geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

اگر این پایه در شرایط بهینگی صدق نکرد (یعنی برای یک متغیر همچون k داشته باشید $c_k < 0$)، می‌توان محدودیتی به فرم زیر به مسئله اضافه کرد (البته با فرض محدود بودن مسئله) که در آن M یک عدد بزرگ است:

$$\sum_j x_j + s = M$$

سپس x_k با کمترین c_k در تابع هدف را وارد پایه و s را از پایه خارج می‌کنیم. این کار را با انجام چرخش لولا روی ضریب $+1$ انجام می‌شود تا هم شرط صحیح بودن حفظ شود و هم شرط بهینگی برقرار شود.

الگوریتم روش برش‌های کاملاً صحیح همزاد به این صورت است که: با یک جواب پایه صحیح امکان ناپذیر برای روش سیمپلکس همزاد شروع می‌کنیم و سپس هر بار برای حذف جواب امکان ناپذیر، برشی صحیح به فرم ارایه شده به مسئله اضافه می‌کنیم تا به جواب صحیح بهینه امکان پذیر برسیم.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از طریق روش برش‌های کاملاً صحیح همزاد حل نمایید.

$$\text{Max } z = 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

برای بدست آوردن یک پایه صحیح که شرط بهینگی در آن برقرار باشد، می‌توان از محدودیت

$\sum_j x_j \leq M$ استفاده کرد. ولی محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ به این فرم است و نیازی به اضافه

کردن این محدودیت نیست. به عبارت دیگر کافی است متغیر x_3 را از پایه خارج کرد و متغیر x_2

(کمترین ضریب در فرم استاندارد جدول سیمپلکس) را به پایه اضافه کرد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
X ₃	1	0	1	1	1	0	6
X ₄	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	3	0	8	0	48
X ₂	1	0	1	1	1	0	6
X ₄	2	0	-4	0	-9	1	-9

ملاحظه می‌شود که اکنون به یک پایه صحیح با برقراری شرط بهینگی رسیدیم. چون -9 ، منفی

است لذا با سطر شماره ۲، برش را درست می‌کنیم. چون $c_k = \min_{a_{ij} < 0} c_j = 3$ ، لذا متغیر x_1 وارد

پایه می‌شود. برای محاسبه h^* داریم:

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-4}, \frac{-\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor}{-9} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{9} \right\} = \frac{2}{9}$$

بنابراین برش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s + \sum_{j \in N} \left\lfloor h \bar{a}_{rj} \right\rfloor x_j = \left\lfloor h \bar{b}_r \right\rfloor$$

$$s + \left\lfloor -4 \times \frac{2}{9} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor -9 \times \frac{2}{9} \right\rfloor x_3 = \left\lfloor \frac{2}{9} \times -9 \right\rfloor$$

$$s - x_1 - 2x_3 = -2$$

برش فوق را به جدول سیمپلکس اضافه می‌کنیم.

طرف سمت راست	S	X ₄	X ₃	X ₂	X ₁	Z	شماره معادله	متغیر اساسی
48	0	0	8	0	3	1	0	Z
6	0	0	1	1	1	0	1	X ₂
-9	0	1	-9	0	-4	0	2	X ₄
-2	1	0	-2	0	-1	0	3	S
42	3	0	2	0	0	1	0	Z
4	1	0	-1	1	0	0	1	X ₂
-1	-4	1	-1	0	0	0	2	X ₄
2	-1	0	2	0	1	0	3	X ₁

با توجه به این که به یک جواب امکان ناپذیر رسیدیم، یک برش جدید باید اضافه کرد:

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-4}, -\frac{\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{-1} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$s' + \left[-1 \times \frac{1}{4} \right] x_3 + \left[1 \times \frac{1}{4} \right] x_4 + \left[-4 \times \frac{1}{4} \right] s = \left[-1 \times \frac{1}{4} \right] \rightarrow s' - x_3 - s = -1$$

طرف سمت راست	S'	S	X ₄	X ₃	X ₂	X ₁	Z	شماره معادله	متغیر اساسی
42	0	3	0	2	0	0	1	0	Z
4	0	1	0	-1	1	0	0	1	X ₂
-1	0	-4	1	-1	0	0	0	2	X ₄
2	0	-1	0	2	0	1	0	3	X ₁
-1	1	-1	0	-1	0	0	0	4	S'
40	2	1	0	0	0	0	1	0	Z
5	-1	2	0	0	1	0	0	1	X ₂
0	-1	-3	1	0	0	0	0	2	X ₄
0	2	-3	0	0	0	1	0	3	X ₁
1	-1	1	0	1	0	0	0	4	X ₃

جدول بهینه

برش کاملاً صحیح اولیه (Primal-All-Integer cut)

با استفاده از روش سیمپلکس به نحوه دیگر می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح را حل کرد و آن حفظ شرایط صحیح بودن و امکان پذیری اولیه و برقراری شرط بهینگی است. برای حفظ امکان پذیری، کافی است از روش سیمپلکس اولیه و تست نسبت استفاده کرد تا امکان پذیری پایه حفظ شود. برای حفظ صحیح بودن کافی است که عملیات چرخش لولا را روی ضریب $+1$ انجام داد. اگر شرط بهینگی در جدول سیمپلکس برقرار باشد ($c_j \geq 0$) مسئله حل شده است. فرض کنید $c_k < 0$ باشد و x_k متغیر ورودی به پایه و x_r متغیر خروجی از پایه باشد که از تست زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} \geq 1 \right\}$$

با وارد کردن x_k به جای x_r در پایه شرط امکان پذیری باقی خواهد ماند. حال اگر $\bar{a}_{rk} = 1$ باشد، شرط صحیح بودن باقی خواهد ماند. بنابراین فرض کنید $\bar{a}_{rk} > 1$ ، آنگاه $h = \frac{1}{\bar{a}_{rk}} < 1$ و لذا برش عمومی به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j \in N} \left\lfloor \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor \rightarrow s + \sum_{j \in N} \left\lfloor \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor x_j = \left\lfloor \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor, s \geq 0, \text{int.}$$

با توجه به برش فوق می‌توان الگوریتم یافتن جواب بهینه صحیح را به صورت زیر بیان کرد.

با یک جواب امکان پذیر صحیح شروع می‌کنیم، اگر بهینه نبود یک برش برای حرکت به طرف جواب امکان پذیر صحیح دیگری با تابع هدف بهتر اضافه می‌کنیم.

مثال: مدل زیر را از روش برش‌های کاملاً صحیح اولیه حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
 & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{int.}
 \end{aligned}$$

برش اول:

$$s_1 + \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{2}{6} \right\rfloor x_2 = \left\lfloor \frac{21}{6} \right\rfloor \rightarrow s_1 + x_1 = 3$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0	0	5
x_4	2	0	-1	1	0	1	0	0	0
x_5	3	0	6	2	0	0	1	0	21
s_1	4	0	1	0	0	0	0	1	3
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	6
x_3	1	0	0	1	1	0	0	-1	2
x_4	2	0	0	1	0	1	0	1	3
x_5	3	0	0	2	0	0	1	-6	3
x_1	4	0	1	0	0	0	0	1	3

برش دوم:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{-6}{2} \right\rfloor s_1 + s_2 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \rightarrow s_2 + x_2 - 3s_1 = 1$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	0	6
X ₃	1	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
X ₄	2	0	0	1	0	1	0	1	0	3
X ₅	3	0	0	2	0	0	1	-6	0	3
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
S ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	7
X ₃	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1

برش سوم:

$$\left[\frac{2}{2} \right] s_1 + \left[\frac{-1}{2} \right] s_2 + s_3 = \left[\frac{0}{2} \right] = 0 \rightarrow s_3 + s_1 - s_2 = 0$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	7
X ₃	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	0	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	0	1
S ₃	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	7
X ₃	1	0	0	-2	1	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	3	-4	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	0	-2	3	1
S ₁	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0

جدول بهینه

تمرین: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \text{int.}
 \end{aligned}$$

الف) مدل فوق را از طریق اضافه کردن برش‌های کسری گومری حل نمایید.

ب) مدل فوق را از طریق اضافه کردن برش‌های تمام صحیح اولیه حل نمایید.

پ) مدل فوق را از طریق اضافه کردن برش‌های تمام صحیح همزاد حل نمایید.

حل:

فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
 & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{int.}
 \end{aligned}$$

الف) برش کسری (برش گومری)

برش ۱:

$$x_2 + 1.5x_3 - 0.25x_5 = 2.25$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (1.5 - \lfloor 1.5 \rfloor) x_3 + (-0.25 - \lfloor -0.25 \rfloor) x_5 \geq 3.25 - \lfloor 3.25 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.5x_3 + 0.75x_5 \geq 0.25 \rightarrow s_1 - 0.5x_3 - 0.75x_5 = -0.25$$

$$-2x_3 + x_4 + 0.5x_5 = 0.5$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (-2 - \lfloor -2 \rfloor) x_3 + (0.5 - \lfloor 0.5 \rfloor) x_5 \geq 0.5 - \lfloor 0.5 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.5x_5 \geq 0.5 \rightarrow s_2 - 0.5x_5 = -0.5$$

$$x_1 - 0.5x_3 + 0.25x_5 = 2.75$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (-0.5 - \lfloor -0.5 \rfloor) x_3 + (0.25 - \lfloor 0.25 \rfloor) x_5 \geq 2.75 - \lfloor 2.75 \rfloor$$

$$0.5x_3 + 0.25x_5 \geq 0.75 \rightarrow s_3 - 0.5x_3 - 0.25x_5 = -0.75$$

برای این که بهترین برش را برای اضافه کردن به جدول سیمپلکس انتخاب کنیم، از اصول ارایه شده در

درس استفاده می‌کنیم. براساس اصل ۱، برش ۳ برای اضافه شدن به جدول سیمپلکس انتخاب می‌شود. با

اضافه کردن برش فوق به جدول سیمپلکس نتایج به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0.50	0	0.25	0	7.75
X ₂	1	0	0	1	1.5	0	-0.25	0	2.25
X ₄	2	0	0	0	-2	1	0.5	0	0.5
X ₁	3	0	1	0	-0.5	0	0.25	0	2.75
S ₃	4	0	0	0	-0.5	0	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	7
X ₂	1	0	0	1	2	0	0	-1	3
X ₄	2	0	0	0	-3	1	0	2	-1
X ₁	3	0	1	0	-1	0	0	1	2
X ₅	4	0	0	0	2	0	1	-4	3
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	7
X ₂	1	0	0	1	0	0.66	0	0.33	2.33
X ₃	2	0	0	0	1	-0.33	0	-0.66	0.33
X ₁	3	0	1	0	0	-0.33	0	0.33	2.33
X ₅	4	0	0	0	0	0.66	1	-2.66	2.33

جدول بهینه

برش ۲:

$$*\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 + x_2 = \frac{7}{3}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(\frac{2}{3} - \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \right) x_4 + \left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \right) s_3 \geq \frac{7}{3} - \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow s_4 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 = -\frac{1}{3}$$

$$*-\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}s_3 + x_3 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(-\frac{1}{3} - \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor \right) x_4 + \left(-\frac{2}{3} - \left\lfloor -\frac{2}{3} \right\rfloor \right) s_3 \geq \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow s_4 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 = -\frac{1}{3}$$

$$*-\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 + x_1 = \frac{7}{3}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(-\frac{1}{3} - \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor \right) x_4 + \left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \right) s_3 \geq \frac{7}{3} - \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow s_4 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 = -\frac{1}{3}$$

$$*\frac{2}{3}x_4 - \frac{8}{3}s_3 + x_5 = \frac{7}{3}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(\frac{2}{3} - \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \right) x_4 + \left(-\frac{8}{3} - \left\lfloor -\frac{8}{3} \right\rfloor \right) s_3 \geq \frac{7}{3} - \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow s_4 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 = -\frac{1}{3}$$

تمامی برش‌های فوق یک برش هستند لذا برش $s_4 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_3 = -\frac{1}{3}$ را اضافه می‌کنیم. با اضافه

کردن برش فوق، جدول سیمپلکس به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₃	S ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
X ₂	1	0	0	1	0	0.66	0	0.33	0	2.33
X ₃	2	0	0	0	1	-0.33	0	-0.66	0	0.33
X ₁	3	0	1	0	0	-0.33	0	0.33	0	2.33
X ₅	4	0	0	0	0	0.66	1	-2.66	0	2.33
S ₄	5	0	0	0	0	-0.66	0	-0.33	1	-0.33
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	2
X ₃	2	0	0	0	1	0	0	-0.5	-0.5	0.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	0.5	-0.5	2.5
X ₅	4	0	0	0	0	0	1	-3	1	2
X ₄	5	0	0	0	0	1	0	0.5	-1.5	0.5

جدول بهینه

برش ۳:

$$* -\frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 + x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor \right) s_3 + \left(-\frac{1}{2} - \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor \right) s_4 \geq \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow s_5 - \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 = -\frac{1}{2}$$

$$* \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 + x_1 = \frac{5}{2}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right) s_3 + \left(-\frac{1}{2} - \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor \right) s_4 \geq \frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow s_5 - \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 = -\frac{1}{2}$$

$$* \frac{1}{2}s_3 - \frac{3}{2}s_4 + x_4 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right) s_3 + \left(-\frac{3}{2} - \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor \right) s_4 \geq \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow s_5 - \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 = -\frac{1}{2}$$

هر سه برش فوق یکسان هستند و لذا برش $s_5 - \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 = -\frac{1}{2}$ اضافه می شود. با اضافه کردن برش

فوق به جدول سیмпلکس خواهیم داشت.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₃	S ₄	S ₅	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	7
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
X ₃	2	0	0	0	1	0	0	-0.5	-0.5	0	0.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	0.5	-0.5	0	2.5
X ₅	4	0	0	0	0	0	1	-3	1	0	2
X ₄	5	0	0	0	0	1	0	0.5	-1.5	0	0.5
S ₅	6	0	0	0	0	0	0	-0.5	-0.5	1	-0.5
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	7
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	2	1
X ₃	2	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	3
X ₅	4	0	0	0	0	0	1	-4	0	2	1
X ₄	5	0	0	0	0	1	0	2	0	-3	2
S ₄	6	0	0	0	0	0	0	1	1	-2	1

جدول بهینه

جواب بهینه صحیح از جدول آخر بدست می‌آید. جواب بهینه برابر $x = (3, 1)$ و $z = 7$ است.

ب) حل از روش برش‌های تمام صحیح اولیه

برش اول:

$$s_1 + \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{2}{6} \right\rfloor x_2 = \left\lfloor \frac{21}{6} \right\rfloor \rightarrow s_1 + x_1 = 3$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0	0
X ₃	1	0	1	1	1	0	0	0	5
X ₄	2	0	-1	1	0	1	0	0	0
X ₅	3	0	6	2	0	0	1	0	21
S ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	3
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	6
X ₃	1	0	0	1	1	0	0	-1	2
X ₄	2	0	0	1	0	1	0	1	3
X ₅	3	0	0	2	0	0	1	-6	3
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	3

برش دوم:

$$\left[\frac{2}{2} \right] x_2 + \left[\frac{-6}{2} \right] s_1 + s_2 = \left[\frac{3}{2} \right] \rightarrow s_2 + x_2 - 3s_1 = 1$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	0	6
X ₃	1	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
X ₄	2	0	0	1	0	1	0	1	0	3
X ₅	3	0	0	2	0	0	1	-6	0	3
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
S ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	7
X ₃	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1

برش سوم:

$$\left[\frac{2}{2} \right] s_1 + \left[\frac{-1}{2} \right] s_2 + s_3 = \left[\frac{1}{2} \right] = 0 \rightarrow s_3 + s_1 - s_2 = 0$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	7
X ₃	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	0	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	0	1
S ₃	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	7
X ₃	1	0	0	-2	1	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	3	-4	2
X ₅	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X ₁	4	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	3
X ₂	5	0	0	1	0	0	0	0	-2	3	1
S ₁	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0

جدول بهینه

جواب بهینه صحیح امکان پذیر از جدول آخر بدست می‌آید. جواب بهینه برابر $x = (3, 1)$ و $z = 7$ است.

پ) حل از طریق برش‌های تمام صحیح همزاد

برای بدست آوردن یک پایه صحیح که شرط بهینگی در آن برقرار باشد، می‌توان از محدودیت‌ها به فرم $\sum x_i \leq M$ استفاده کرد. ولی چون محدودیت اول به این فرم است دیگر نیازی به اضافه کردن محدودیت فوق‌الذکر نیست. به عبارت دیگر کافی است متغیر x_3 از پایه خارج و متغیر x_1 (که کمترین ضریب در تابع هدف را دارد) وارد پایه شود. محاسبات این کار در شکل زیر آمده است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0
X ₃	1	0	1	1	1	0	0	5
X ₄	2	0	-1	1	0	1	0	0
X ₅	3	0	6	2	0	0	1	21
Z	0	1	0	1	2	0	0	10
X ₁	1	0	0	1	1	0	0	5
X ₄	2	0	0	2	1	1	0	5
X ₅	3	0	1	-4	-6	0	1	-9

ملاحظه می‌شود که یک پایه صحیح بهینه امکان ناپذیر داریم. چون $-9 < 0$ است، لذا برش را برای سطر شماره ۳ می‌سازیم.

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-4}, -\frac{\left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor}{-6} \right\} = \frac{1}{4}$$

برش به صورت زیر می‌شود.

$$s_1 + \left[-4 \times \frac{1}{4} \right] x_2 + \left[-6 \times \frac{1}{4} \right] x_3 = \left[\frac{1}{4} \times (-9) \right]$$

$$s_1 - x_2 - 2x_3 = -3$$

با اضافه کردن برش فوق در جدول سیمپلکس داریم.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	1	2	0	0	0	10
X ₁	1	0	0	1	1	0	0	0	5
X ₄	2	0	0	2	1	1	0	0	5
X ₅	3	0	1	-4	-6	0	1	0	-9
S ₁	4	0	0	-1	-2	0	0	1	-3
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	7
X ₁	1	0	0	0	-1	0	0	1	2
X ₄	2	0	0	0	-3	1	0	2	-1
X ₅	3	0	1	0	2	0	1	-4	3
X ₂	4	0	0	1	2	0	0	-1	3

با توجه به این که $-1 < 0$ است لذا برای سطر ۲-م یک برش ساخته می‌شود. چون x_3 کمترین مقدار

را در میان متغیرهای غیر اساسی دارد، این متغیر وارد پایه می‌شود. برای محاسبه h^* داریم.

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$s_2 + \left[\frac{1}{3} \times -3 \right] x_3 + \left[\frac{1}{3} \times 2 \right] s_1 = \left[\frac{1}{3} \times -1 \right]$$

$$s_2 - x_3 = -1$$

در جدول زیر، برش فوق به محدودیت‌ها اضافه می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
X ₁	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	2
X ₄	2	0	0	0	-3	1	0	2	0	-1
X ₅	3	0	1	0	2	0	1	-4	0	3
X ₂	4	0	0	1	2	0	0	-1	0	3
S ₂	5	0	0	0	-1	0	0	0	1	-1
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
X ₁	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	3
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	2	-3	2
X ₅	3	0	1	0	0	0	1	-4	2	1
X ₂	4	0	0	1	0	0	0	-1	2	1
X ₃	5	0	0	0	1	0	0	0	-1	1

جدول بهینه

در جدول فوق، به یک جواب پایه امکان پذیر صحیح بهینه رسیدم. لذا فرایند اضافه کردن برش متوقف می شود و به جواب بهینه رسیدم. جواب بهینه برابر $x = (3, 1)$ و $z = 7$ است.

تمرین: مدل برنامه ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{int.}$$

الف) مسئله فوق را به روش اضافه کردن برش کسری گومری حل نمایید.

ب) مسئله فوق را به روش اضافه کردن برش کاملاً صحیح همزاد حل نمایید.

حل:

فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 \leq 11$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 \leq 13$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \text{int.}$$

(الف)

$$x_1 + 0.4x_4 - 0.2x_5 = 1.8$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (0.4 - \lfloor 0.4 \rfloor) x_4 + (-0.2 - \lfloor -0.2 \rfloor) x_5 \geq 1.8 - \lfloor 1.8 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.4x_4 + 0.8x_5 \geq 0.8$$

$$-0.1x_4 + x_2 + 0.3x_5 = 2.3$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (-0.1 - \lfloor -0.1 \rfloor) x_4 + (0.3 - \lfloor 0.3 \rfloor) x_5 \geq 2.3 - \lfloor 2.3 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.9x_4 + 0.3x_5 \geq 0.3$$

$$x_3 - 0.9x_4 - 0.3x_5 + x_6 = 0.7$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (-0.9 - \lfloor -0.9 \rfloor) x_4 + (-0.3 - \lfloor -0.3 \rfloor) x_5 \geq 0.7 - \lfloor 0.7 \rfloor$$

$$0.1x_4 + 0.7x_5 \geq 0.7$$

از میان سه برش بالا، برش نخست انتخاب می‌شود.

$$0.4x_4 + 0.8x_5 \geq 0.8 \rightarrow -0.4x_4 - 0.8x_5 + s_1 = -0.8$$

با اضافه کردن برش فوق خواهیم داشت.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	0	19.4
X ₁	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	0	2.3
X ₃	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0	0.7
S ₁	4	0	0	0	0	-0.4	-0.8	0	1	-0.8
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0.5	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0.5	0	-0.25	2.5
X ₃	3	0	0	0	1	0	1.5	1	-2.25	2.5
X ₄	4	0	0	0	0	1	2	0	-2.5	2

براساس جدول بالا، برای معادلات شماره ۲ و ۳ می‌توان برش کسری را تولید کرد.

$$x_2 + 0.5x_5 - 0.25s_1 = 2.5$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (0.5 - \lfloor 0.5 \rfloor) x_5 + (-0.25 - \lfloor -0.25 \rfloor) s_1 \geq 2.5 - \lfloor 2.5 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.5x_5 + 0.75s_1 \geq 0.5$$

$$1.5x_5 + x_3 - 2.25s_1 = 2.5$$

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \rightarrow (1.5 - \lfloor 1.5 \rfloor) x_5 + (-2.25 - \lfloor -2.25 \rfloor) s_1 \geq 2.5 - \lfloor 2.5 \rfloor$$

$$\rightarrow 0.5x_5 + 0.75s_1 \geq 0.5$$

هر دو برش یکسان هستند. لذا برش $-0.5x_5 - 0.75s_1 + s_2 = -0.5$ به جدول سیмпلیکس اضافه

می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0.5	0	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0.5	0	-0.25	0	2.5
X ₃	3	0	0	0	1	0	1.5	1	-2.25	0	2.5
X ₄	4	0	0	0	0	1	2	0	-2.5	0	2
S ₂	5	0	0	0	0	0	-0.5	0	-0.75	1	-0.5
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0.5	0	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	2.5	-2	2
X ₂	2	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	2
X ₃	3	0	0	0	1	0	0	1	4.5	3	1
X ₄	4	0	0	0	0	1	0	0	0.5	4	0
X ₅	5	0	0	0	0	0	1	0	1.5	-2	1

جدول بهینه

(ب) حل از طریق برش‌های کاملاً صحیح همزاد

برای بدست آوردن یک پایه صحیح که شرط بهینگی در آن برقرار باشد، می‌توان از محدودیت به فرم

$$\sum_{i=1}^3 x_i = M \text{ استفاده می‌شود. متغیر } x_7 \text{ از پایه خارج و } x_2 \text{ (به دلیل کمترین مقدار ضریب تابع هدف)}$$

وارد پایه می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	طرف سمت راست
Z	0	1	-4	-5	-1	0	0	0	0	0
X ₄	1	0	3	2	0	1	0	0	0	10
X ₅	2	0	1	4	0	0	1	0	0	11
X ₆	3	0	3	3	1	0	0	1	0	13
X ₇	4	0	1	1	1	0	0	0	1	10
Z	0	1	1	0	4	0	0	0	5	50
X ₄	1	0	1	0	-2	1	0	0	-2	-10
X ₅	2	0	-3	0	-4	0	1	0	-4	-29
X ₆	3	0	0	0	-2	0	0	1	-3	-17
X ₂	4	0	1	1	1	0	0	0	1	10

ملاحظه می‌شود که یک پایه صحیح بهینه بدست آمده است. لذا برای معادله شماره ۲، یک برش می

سازیم و چون x_1 کمترین ضریب در تابع هدف را دارد، x_1 وارد پایه می‌شود.

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-3}, -\frac{\left\lfloor \frac{4}{1} \right\rfloor}{-4}, \frac{\left\lfloor \frac{5}{1} \right\rfloor}{-4} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{4} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$s_1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \times -3 \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \times -4 \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{1}{3} \times -3 \right\rfloor x_7 = \left\lfloor \frac{1}{3} \times -29 \right\rfloor$$

$$s_1 - x_1 - 2x_3 - x_7 = -10$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s_1	طرف سمت راست
Z	0	1	1	0	4	0	0	0	5	0	50
x_4	1	0	1	0	-2	1	0	0	-2	0	-10
x_5	2	0	-3	0	-4	0	1	0	-4	0	-29
x_6	3	0	0	0	-2	0	0	1	-3	0	-17
x_2	4	0	1	1	1	0	0	0	1	0	10
s_1	5	0	-1	0	-2	0	0	0	-1	1	-10
Z	0	1	0	0	2	0	0	0	4	1	40
x_4	1	0	0	0	-4	1	0	0	-3	1	-20
x_5	2	0	0	0	2	0	1	0	-1	-3	1
x_6	3	0	0	0	-2	0	0	1	-3	0	-17
x_2	4	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0
x_1	5	0	1	0	2	0	0	0	1	-1	10
Z	0	1	0	2	0	0	0	0	4	3	40
x_4	1	0	0	-4	0	1	0	0	-3	-3	-20
x_5	2	0	0	2	0	0	1	0	-1	-1	1
x_6	3	0	0	-2	0	0	0	1	-3	-2	-17
x_3	4	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0
x_1	5	0	1	2	0	0	0	0	1	1	10

برای معادله شماره ۱ می‌توان یک برش ایجاد کنیم و متغیر x_2 به دلیل کمترین ضریب در تابع هدف

وارد پایه می‌شود.

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-4}, -\frac{\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor}{-4}, \frac{\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{-4} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$s_2 + \left\lfloor \frac{1}{4} \times -4 \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{1}{4} \times -3 \right\rfloor x_7 + \left\lfloor \frac{1}{4} \times -3 \right\rfloor x_7 = \left\lfloor \frac{1}{4} \times -20 \right\rfloor$$

$$s_2 - x_2 - x_7 - s_1 = -5$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	2	0	0	0	0	4	3	0	40
X ₄	1	0	0	-4	0	1	0	0	-3	-3	0	-20
X ₅	2	0	0	2	0	0	1	0	-1	-1	0	1
X ₆	3	0	0	-2	0	0	0	1	-3	-2	0	-17
X ₃	4	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	0
X ₁	5	0	1	2	0	0	0	0	1	1	0	10
S ₂	6	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1	1	-5
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	2	30
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	-4	0
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	-3	-3	2	-9
X ₆	3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-2	-7
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	5
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	2	0
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	1	1	-1	5

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-3}, -\frac{\left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor}{-3} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$s_3 + \left\lfloor \frac{1}{3} \times -3 \right\rfloor x_7 + \left\lfloor \frac{1}{3} \times -3 \right\rfloor s_1 = \left\lfloor \frac{1}{3} \times -9 \right\rfloor$$

$$s_3 - x_7 - s_1 = -3$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	S ₁	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	2	0	30
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	-4	0	0
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	-3	-3	2	0	-9
X ₆	3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-2	0	-7
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	5
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	2	0	0
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	1	1	-1	0	5
S ₃	7	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	-3
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	27
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-4	1	-3
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-3	0
X ₆	3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-2	0	-7
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	5
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	3
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	2
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	3
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	20
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-4	1	-3
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-3	0
X ₇	3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	2	0	7
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-3	0	-2
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	3
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	2
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-2	-1	-4

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-2} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$s_4 + \left[\frac{1}{2} \times -2 \right] s_2 + \left[\frac{1}{2} \times -1 \right] s_3 = \left[\frac{1}{2} \times -4 \right]$$

$$s_4 - s_2 - s_3 = -2$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	20
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-4	1	0	-3
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-3	0	0
X ₇	3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	7
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-3	0	0	-2
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	3
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	2
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-2	-1	0	-4
S ₄	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	-2
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	20
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-4	5
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-5	2	-4
X ₇	3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-2	2	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3	-3	4
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	-1
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	4
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	-2	0
S ₂	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	2

$$h^* = \min \left\{ 1, \frac{-1}{-5} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{5} \right\} = \frac{1}{5}$$

$$s_5 + \left[\frac{1}{5} \times -5 \right] s_3 = \left[\frac{1}{5} \times -4 \right]$$

$$s_5 - s_3 = -1$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	20
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-4	0	5
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-5	2	0	-4
X ₇	3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-2	2	0	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3	-3	0	4
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	0	-1
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	4
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	-2	0	0
S ₂	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	2
S ₅	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	19
X ₄	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4	5	0
X ₅	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	1
X ₇	3	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	2	-2	5
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-3	3	1
X ₁	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	2
X ₂	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	2
S ₁	7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-2	-1	1
S ₂	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	1
S ₃	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1

جدول فوق به جواب بهینه می‌رسد.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**