درس ۱۳: روش حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح: روش صفحه برش

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر شمارا باشد که با کنترل تمامی آن‌ها می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای n متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n=10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n=20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n=30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود که حتی سریعترین کامپیوترها قادر به شمارش تمامی جواب‌ها نخواهند بود. حال اگر تعداد متغیرها از مقیاس میلیون باشند، دشوار به سرعت است بیشتر می‌شود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

۲) ساختار مسئله

همان طور که ملاحظه می‌شود تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از انجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملا بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش ممکن است برای حل برخی از مسائل کاربردی که مقدار بسیار بزرگی دارند مناسب باشد. ولی این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱-شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲-شاید جواب گره شده دیگر بهینه نباشد.

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad x_1 + 10x_2 \le 20 \\
&\quad x_1 \le 2 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله فوق، $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, z = 11$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

یکی از روش‌های متداول برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، روش صفحه برش یا *Cutting plane* است که در ادامه معرفی می‌شود.

روش صفحه برش Cutting plane

برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ cx \\
&x \in S = \{x \mid Ax = b, x \ge 0, \text{int}\}
\end{aligned}
$$

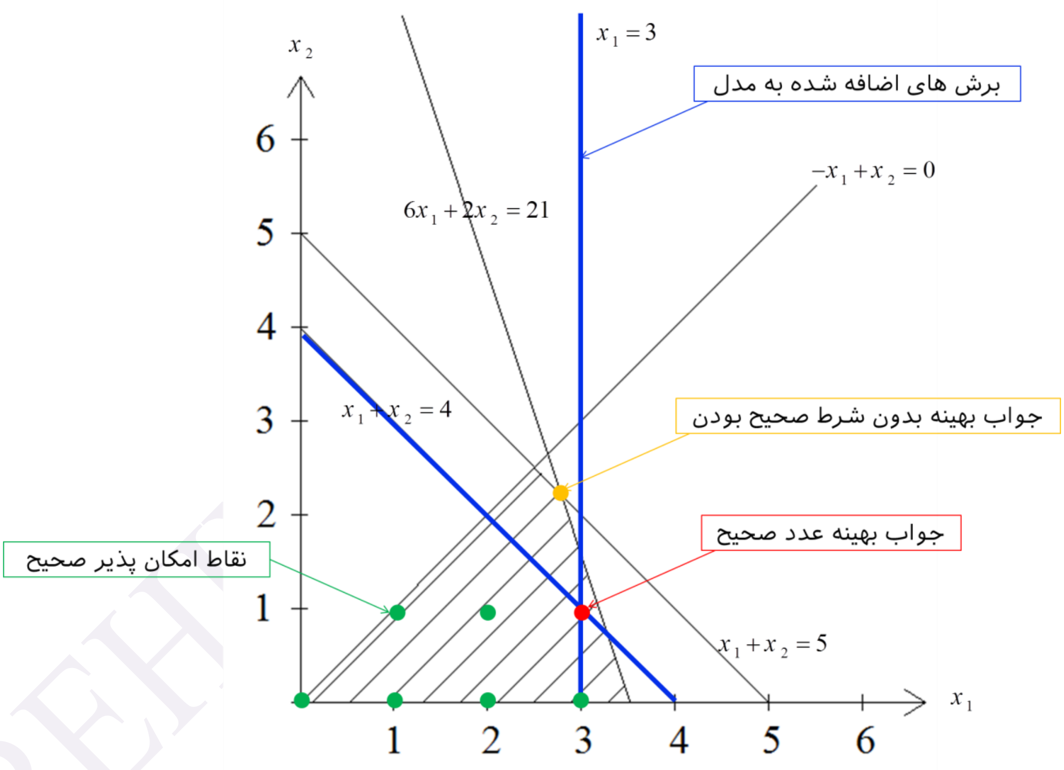
ایده روش صفحه برش اضافه کردن محدودیت‌های جدید به مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوطه به منظور حذف نقاط بهینه غیرصحیح بدون حذف نقاط صحیح S از ناحیه امکان پذیر است یعنی آزاد کردن شرط صحیح بودن از S و در عین حال اضافه کردن محدودیت‌های جدید به فرم $\bar{a}x = \bar{b}$ به نحوی که نقاط S حذف شوند. یعنی مدل زیر را حل نمائید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ cx \\
&x \in T = \{x \mid Ax = b, \bar{a}x = \bar{b}, x \ge 0\}
\end{aligned}
$$

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + x_2\\
&\quad x_1 + x_2 \le 5\\
&\quad -x_1 + x_2 \le 0\\
&\quad 6x_1 + 2x_2 \le 21\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}.
\end{aligned}
$$

با اضافه کردن محدودیت $x_1 \le 3$ و $x_1 + x_2 \le 4$ به مدل اصلی و حل مدل آزاد شده، به جواب مدل با متغیرهای عدد صحیح می‌رسیم. حل ترسیمی مدل فوق به صورت زیر می‌شود.



فرم عمومی یک برش یا cut

مدل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ cx\\
&x \in Q = \{x \mid Ax = b, x \ge 0\} \quad (1)
\end{aligned}
$$

فرض کنید که x_B یک جواب امکان پذیر پایه (نه لزوما بهینه) باشد، یعنی:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad i = 1,\dots,m \quad (2)$$

و همچنین برای جواب‌های غیرپایه داریم: $x_j = 0$. با ضرب $h \neq 0$ در رابطه (۲) داریم:

$$hx_{B_i} + \sum_{j \in N} h\bar{a}_{ij} x_j = h\bar{b}_i \quad i = 1,\dots,m$$

چون $x_j \geq 0$ و $\lfloor a \rfloor \leq a$ پس خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} \lfloor h \rfloor \leq h \rightarrow \lfloor h \rfloor x_B \leq hx_B \\ \lfloor h\bar{a} \rfloor \leq h\bar{a} \rightarrow \lfloor h\bar{a} \rfloor x \leq h\bar{a}x \end{matrix} \rightarrow \lfloor h \rfloor x_B + \sum \lfloor h\bar{a} \rfloor x \leq hx_B + \sum h\bar{a}x \rightarrow \lfloor h \rfloor x_B + \sum \lfloor h\bar{a} \rfloor x \leq h\bar{b}_i$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq h\bar{b}_i \quad i = 1,\dots,m$$

از آن جاییکه سمت چپ رابطه بالا صحیح است، لذا رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1,\dots,m$$

از طرفی با ضرب رابطه (۲) در $\lfloor h \rfloor$ و با کم کردن از رابطه فوق داریم:

$$\sum_{j \in N} \left(\lfloor h \rfloor \bar{a}_{ij} - \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor \right) x_j \geq \lfloor h \rfloor \bar{b}_i - \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1,\dots,m \quad (3)$$

رابطه فوق اساس خیلی از برش‌ها است که بستگی به نحوه انتخاب h دارد.

برش‌های کسری یا Gomory

این برش‌ها از حذف صحیح بودن متغیرها بدست می‌آید. در این قسمت $h=1$ در نظر بگیرید. در این صورت رابطه (۳) به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j\in N}\left(\bar{a}_{ij}-\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor\right)x_j \ge \bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i\rfloor$$

فرض کنید $f_{i0}=\bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i\rfloor$ و $f_{ij}=\bar{a}_{ij}-\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor$ (همان قسمت کسری $\bar{a}_{ij}$)، در این صورت :

$$\sum_{j\in N} f_{ij}x_{ij}\ge f_{i0} \quad or \quad s_i-\sum_{j\in N} f_{ij}x_{ij}=-f_{i0}, s_i\ge 0 \quad (4)$$

می‌توان x_{B_i} را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{B_i}=\bar{b}_i-\sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j=\bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i\rfloor+\lfloor \bar{b}_i\rfloor-\sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j+\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j-\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j$$

$$x_{B_i}=\underbrace{\bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i\rfloor}_{f_{io}}-\underbrace{\sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j+\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j}_{\sum f_{ij}x_{ij}}+\lfloor \bar{b}_i\rfloor-\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j$$

$$x_{B_i}=-(\overbrace{-f_{i0}+\sum_{j} f_{ij}x_j}^{s_i})+\left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor-\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j\right)$$

با توجه به این که x_{B_i} و $\lfloor \bar{b}_i\rfloor-\sum_{j\in N}\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor x_j$ عدد صحیح هستند، بنابراین s_i هم صحیح خواهند بود.

خاصیت مهم رابطه (۴) که اگر $f_{i0}>0$ باشد، با اضافه کردن برش (۴)، جواب بهینه غیرصحیح مربوط از مدل آزادشده (حذف شرط صحیح بودن متغیرهای عدد صحیح) حذف می‌شود.

نکته: محدودیت شماره (۴) را به راحتی می‌توان به جدول بهینه با متغیر پایه S اضافه کرد و با توجه به این که شرط بهینگی بدون تغییر می ماند، تنها شرط امکان پذیری برای محدودیت جدید نقض می‌شود که می‌توان از روش سیمپلکس همزاد آن را برطرف کرد.

نکته: برش (۴) را نه تنها برای ضرایب محدودیت‌ها، بلکه برای ضرایب تابع هدف هم می‌توان نوشت.

نکته: برمبنای اضافه کردن یک برش به فرم (۴) و استفاده از روش سیمپلکس همزاد تا حصول یک جواب بهینه صحیح می‌توان الگوریتمی برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح ارایه داد. البته هیچ دلیلی بر متناهی بودن این الگوریتم وجود ندارد.

نکته: برای انتخاب سطری که توسط آن برش بدست می‌آید، روش‌های ابتکاری متفاوتی وجود دارد که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$1)\ f_{r0} = \underset{i}{Max}\ \left\{\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor\right\}$$

$$2)\ \frac{f_{r0}}{\sum_j f_{rj}} = \underset{i}{Max}\ \left\{\frac{f_{i0}}{\sum_j f_{ij}}\right\}$$

$$3)\ \frac{f_{r0}}{f_{rk}} = \underset{i}{Max}\ \left\{\frac{f_{i0}}{f_{ik}}\right\} \qquad k \in \text{متغیرهای غیرپایه}$$

$$4)\ f_{r0}\frac{\bar{c}_k}{f_{rk}} = \underset{i}{Max}\ f_{i0}\left(Min\left\{\frac{\bar{c}_j}{f_{ij}}\right\}\right)$$

موارد (۲) و (۳) بر مبنای حذف بیشترین ناحیه غیرصحیح و مورد (۴) بر مبنای بیشترین مقدار کاهش تابع هدف است.

نکته: هیچ دلیل بر برتری یکی از چهار روش بر روش دیگری نیست.

نکته: در استفاده از روش سیمپلکس همزاد نیازی به نگه داشتن تمامی برش‌ها نیست. برشی که متغیر پایه آن در پایه بوده و ضریب تمامی متغیرهای آن صفر باشد می‌توان از جدول سیمپلکس حذف شود.

نکته: به علت خطاهایی که در اثر گرد کردن پیش می‌آید، نمی‌توان از این روش در کامپیوتر برای مثال‌های واقعی استفاده کرد.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش برش‌های کسری حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
&\qquad 5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

ابتدا جدول سیمپلکس نهایی را بدست می‌آوریم:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
X_3	1	0	1	1	1	0	6
X_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40
X_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1
X_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5
Z	0	1	0	0	5/4	¾	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75

جدول بهینه

برش‌های کسری براساس جدول نهایی سیمپلکس به صورت زیر است:

$$\sum_{j \in N} \left(\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor\right) x_j \ge \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

:

برش معادله ۰ (تابع هدف)

$$1)\left(\frac{5}{4}-\left\lfloor\frac{5}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(\frac{3}{4}-\left\lfloor\frac{3}{4}\right\rfloor\right)x_4 \ge 41.25-\lfloor 41.25\rfloor \rightarrow \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \ge 0.25$$

برش معادله ۱:

$$2)\left(\frac{9}{4}-\left\lfloor\frac{9}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(-\frac{1}{4}-\left\lfloor-\frac{1}{4}\right\rfloor\right)x_4 \ge 2.25-\lfloor 2.25\rfloor \rightarrow \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \ge 0.25$$

برش معادله ۲:

$$3)\left(-\frac{5}{4}-\left\lfloor-\frac{5}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(\frac{1}{4}-\left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor\right)x_4 \ge 3.75-\lfloor 3.75\rfloor \rightarrow \frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \ge 0.75$$

حال اینکه کدام برش را اضافه کرد می‌توان از اصول ۴ گانه ای که قبلا اشاره شده استفاده کرد. با فرض استفاده از اصل (۱)، برش شماره ۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \ge 0.75 \rightarrow -\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \le -0.75 \rightarrow -\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+s_1=-0.75$$

با اضافه کردن برش فوق به جدول سیمپلکس، جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	0	0.33	1.66	40
X_1	1	0	1	0	0	-1	3	0
X_2	2	0	0	1	0	0.66	-1.66	5
X_3	3	0	0	0	1	0.33	-1.33	1

جدول بهینه

همان طور که مشاهده می‌شود با یک بار تکرار عملیات سیمپلکس همزاد به جواب بهینه رسیدیم.

با توجه به این که این مدل دارای ۲ متغیر اصلی است می‌توان از روش ترسیمی هم حل کرد. برای حل ترسیمی باید تمامی برش‌ها را برحسب x_1 و x_2 در آورد.

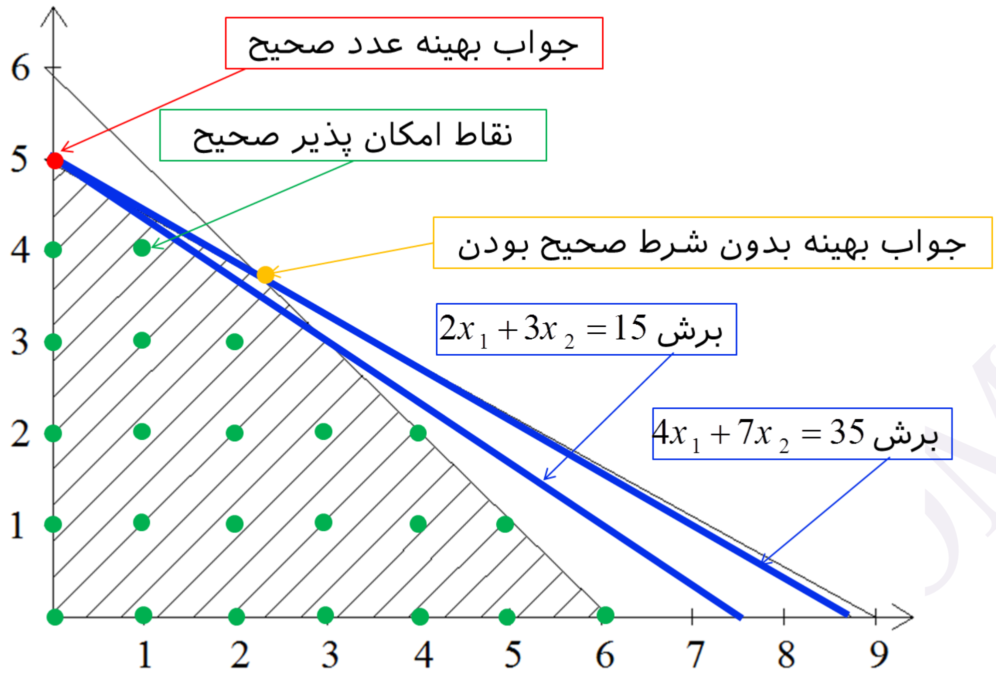
برش ۱ و ۲:

$$\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4\ge 0.25\rightarrow\frac{1}{4}(6-x_1-x_2)+\frac{3}{4}(45-5x_1-9x_2)\ge 0.25\rightarrow -4x_1-7x_2\ge -35$$
$$\rightarrow 4x_1+7x_2\le 35$$

برش ۳:

$$\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\ge 0.75\rightarrow\frac{3}{4}(6-x_1-x_2)+\frac{1}{4}(45-5x_1-9x_2)\ge 0.75\rightarrow -2x_1-3x_2\ge -15$$
$$\rightarrow 2x_1+3x_2\le 15$$

حل ترسیمی مدل فوق به صورت زیر است:



با اضافه کردن برش‌های فوق، جواب (۰,۵) جواب بهینه مسئله خواهد بود. همان طور که از شکل بالا پیدا است این برش‌ها هیچ جواب عدد صحیح از مجموعه جواب‌های امکان پذیر را حذف نمی‌کنند و فقط جواب‌های غیر صحیح کم می‌شود.

برش‌های کاملا صحیح همزاد (Dual-All-Integer cut)

در روش‌های برش‌های کسری همان طور که مشاهده شد در هر تکرار شرایط امکان پذیر و بهینگی را حفظ کردیم و به دنبال برقراری شرط صحیح بودن بودیم. همان طور که اشاره شد اشکال این روش خطاهایی که در اثر گرد کردن به وجود می‌آید، است. برای رفع این ایراد از روش دیگری استفاده می‌کنیم که در هر تکرار شرایط بهینگی (امکان پذیری همزاد) و صحیح بودن را حفظ می‌کنیم و دنبال برقرار شرط امکان پذیری هستیم و در صورت امکان ناپذیر بودن جواب، برش به مسئله اضافه می‌کنیم که جواب صحیح امکان ناپذیر را حذف نماید و امکان ناپذیری را کاهش دهد. برای حفظ بهینگی و شرط صحیح بودن می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

۱- **حفظ بهینگی:** برای این کار کافی است از روش سیمپلکس همزاد استفاده کنیم.

۲- **حفظ صحیح بودن:** برای این کار کافی است که عملیات چرخش لولا را روی عناصر ۱- انجام دهیم. برای این منظور می‌توان برش‌های خاصی در فرم عمومی را استفاده کنیم.

فرض کنید یک پایه اولیه با داده‌های کاملا صحیح برای سیمپلکس همزاد در دست است که این جواب پایه شرایط بهینگی را داراست ولی امکان پذیر نیست($b<0$). با انتخاب مناسب برای $h(0<h<1)$ از برش عمومی به فرم زیر، می‌توان برشی برای حذف این جواب امکان ناپذیر ایجاد کرد:

$$\sum_{j\in N}\left(\lfloor h\rfloor \bar{a}_{ij}-\lfloor h\bar{a}_{ij}\rfloor\right)x_j \ge \lfloor h\rfloor \bar{b}_i-\lfloor h\bar{b}_i\rfloor \quad i=1,\dots,m \quad (*)$$

در انتخاب h باید به نحوی عمل کرد که عمل چرخش لولا روی ۱- صورت گیرد. برای $0<h<1$ برش (*) به صورت زیر می‌شود($\lfloor h\rfloor=0$):

$$\sum_{j\in N}\left(\lfloor h\bar{a}_{rj}\rfloor\right)x_j \le \lfloor h\bar{b}_r\rfloor$$

با اضافه کردن متغیر کمبود s داریم:

$$s+\sum_{j\in N}\left(\lfloor h\bar{a}_{rj}\rfloor\right)x_j = \lfloor h\bar{b}_r\rfloor \quad ,s\ge 0,\text{int}$$

توجه کنید که اگر تمام $\bar{b}_r \ge 0$ باشند، جواب فعلی بهینه است لذا یک r وجود دارد که

$$b_r<0 \rightarrow \lfloor h\bar{b}_r\rfloor<0$$

بنابراین وقتی این برش با متغیر پایه s به جدول سیمپلکس اضافه می‌شود، روش سیمپلکس همزاد، s را از پایه خارج می‌کند. اگر x_k بخواهد متغیر ورودی به پایه باشد،

اولا باید $a_{rk}<0$ (طبق روش سیمپلکس همزاد)

ثانیا برای حفظ شرط صحیح بودن جواب، h را باید به نحوی انتخاب کرد که $\lfloor h\bar{a}_{rk}\rfloor=-1$

ثالثا، مقدار $\bar{c}_j$ جدید پس از انجام چرخش لولا به صورت زیر است:

$$\bar{c}_j^{new} = \bar{c}_j^{old} - \frac{\lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor}{\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor}\bar{c}_k = \bar{c}_j + \lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \bar{c}_k \geq 0$$

از آنجاییکه برای $a_{rj} < 0$ و $h > 0$، داریم $\lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \leq -1$، بنابراین یک شرط لازم برای حفظ شرط بهینگی، عبارت است از:

$$\bar{c}_k = \underset{\bar{a}_{rk} < 0}{Min}\ \bar{c}_j$$

اشاره شد که برای انتخاب h باید اولا شرط $\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor = -1$ برقرار باشد، بنابراین:

$$\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor = -1 \rightarrow -1 \leq h\bar{a}_{rk} < 0$$

$h\bar{a}_{rk} < 0 \xrightarrow{\bar{a}_{rk} < 0} h > 0$ از قبل داشتیم

$$h\bar{a}_{rk} \geq -1 \longrightarrow h \leq \frac{-1}{\bar{a}_{rk}} \leq 1$$

ثانیا برای برقراری شرط بهینگی $\bar{c}_j + \lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \bar{c}_k \geq 0$ برای مقدار h داریم:

- اگر $\bar{c}_k = 0$ باشد، هر مقداری از h را می‌توان انتخاب کرد:
- اگر $\bar{c}_k > 0$ باشد کافی است $h \leq -\dfrac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}$.

بنابراین h باید در محدوده زیر قرار بگیرید:

$$h \leq h^* = Min\left\{1, \frac{-1}{\bar{a}_{rk}}, \underset{\bar{a}_{rj} < 0}{Min} - \frac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}\right\} = \underset{\bar{a}_{rj} < 0}{Min}\left\{1, -\frac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}\right\}$$

نکته: توجه کنید که برای هر مقدار $h \le h^*$ شرایط بهینگی و صحیح بودن حفظ خواهد شد ولی بهتر است $h = h^*$ انتخاب شود تا تغییرات تابع هدف بیشتر شود.

نکته: برشی که در جدول سیمپلکس، متغیر مازاد آن در پایه با مقدار مثبت و مابقی متغیرها برابر صفر باشد را می‌توان از جدول سیمپلکس حذف کرد.

نکته: برای ایجاد این نوع از برش‌ها، باید یک جواب پایه با داده‌های صحیح که شرط بهینگی را برقرار دارد، وجود داشته باشد. به سادگی می‌توان چنین پایه را استخراج کرد. برای این منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ cx\\
&\quad Ax \le b\\
&\quad x \ge 0, \text{int}.
\end{aligned}
$$

با اضافه کردن x_s به عنوان متغیر مازاد، می‌توان یک پایه صحیح به صورت $x = 0, x_s = b$ بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
&Max\ cx\\
&\quad Ax + x_s = b\\
&\quad x \ge 0, x_s \ge 0, \text{int}.
\end{aligned}
$$

اگر این پایه در شرایط بهینگی صدق نکرد (یعنی برای یک متغیر همچون k داشته باشید $c_k < 0$)، می‌توان محدودیتی به فرم زیر به مسئله اضافه کرد(البته با فرض محدود بودن مسئله) که در آن M یک عدد بزرگ است:

$$\sum_j x_j + s = M$$

سپس x_k با کمترین c_k در تابع هدف را وارد پایه و s را از پایه خارج می‌کنیم. این کار را با انجام چرخش لولا روی ضریب ۱+ انجام می‌شود تا هم شرط صحیح بودن حفظ شود و هم شرط بهینگی برقرار شود.

الگوریتم روش برش‌های کاملا صحیح همزاد به این صورت است که : با یک جواب پایه صحیح امکان ناپذیر برای روش سیمپلکس همزاد شروع می‌کنیم و سپس هر بار برای حذف جواب امکان ناپذیر، برشی صحیح به فرم ارایه شده به مسئله اضافه می‌کنیم تا به جواب صحیح بهینه امکان پذیر برسیم.

برش کاملا صحیح اولیه(Primal-All-Integer cut)

با استفاده از روش سیمپلکس به نحوه دیگر می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح را حل کرد و آن حفظ شرایط صحیح بودن و امکان پذیری اولیه و برقراری شرط بهینگی است. برای حفظ امکان پذیری، کافی است از روش سیمپلکس اولیه و تست نسبت استفاده کرد تا امکان پذیری پایه حفظ شود. برای حفظ صحیح بودن کافی است که عملیات چرخش لولا را روی ضریب ۱+ انجام داد. اگر شرط بهینگی در جدول سیمپلکس برقرار باشد($c_j \geq 0$) مسئله حل شده است. فرض کنید $c_k < 0$ باشد و x_k متغیر ورودی به پایه و x_r متغیر خروجی از پایه باشد که از تست زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = Min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} \geq 1\right\}$$

با وارد کردن x_k به جای x_r در پایه شرط امکان پذیری باقی خواهد ماند. حال اگر $\bar{a}_{rk} = 1$ باشد، شرط صحیح بودن باقی خواهد ماند. بنابراین فرض کنید $\bar{a}_{rk} > 1$، آنگاه $h = \frac{1}{\bar{a}_{rk}} < 1$ و لذا برش عمومی به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j \in N}\left\lfloor \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor \rightarrow s + \sum_{j \in N}\left\lfloor \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor x_j = \left\lfloor \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \right\rfloor, s \geq 0, \text{int}.$$

با توجه به برش فوق می‌توان الگوریتم یافتن جواب بهینه صحیح را به صورت زیر بیان کرد.

با یک جواب امکان پذیر صحیح شروع می‌کنیم، اگر بهینه نبود یک برش برای حرکت به طرف جواب امکان پذیر صحیح دیگری با تابع هدف بهتر اضافه می‌کنیم.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**