به نام خدا

درس ۱۳: حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح: روش صفحه برش

فهرست مطالب

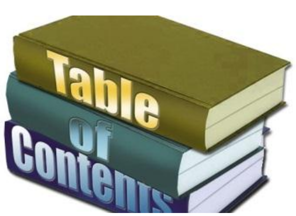
۱ مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

۲ روش صفحه برش

۳ روش صفحه برش گومری یا کسری

۴ روش صفحه برش کاملا صحیح همزاد

۵ روش صفحه برش کاملا صحیح اولیه



مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در **فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله** است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر **شمارا** باشد که با کنترل **تمامی** *آن‌ها* می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای *n* متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n = 10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n = 20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n = 30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

۲) ساختار مسئله

مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از انجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملا بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱-شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲-شاید جواب گرد شده دیگر بهینه نباشد.

مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 10x_2 \le 20 \\
&\qquad x_1 \le 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله فوق، $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, z = 11$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

روش صفحه برش

برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ cx$$

$$x \in S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0, \text{int}\}$$

ایده روش صفحه برش اضافه کردن محدودیت‌های جدید به مسئله برنامه‌ریزی خطـی مربوطه به منظور حذف نقاط بهینه غیرصحیح بدون حذف نقاط صحیح از ناحیه S امکان پذیر است.

$$Max\ cx$$

$$x \in T = \left\{x \mid Ax = b, \bar{a}x = \bar{b}, x \geq 0\right\}$$

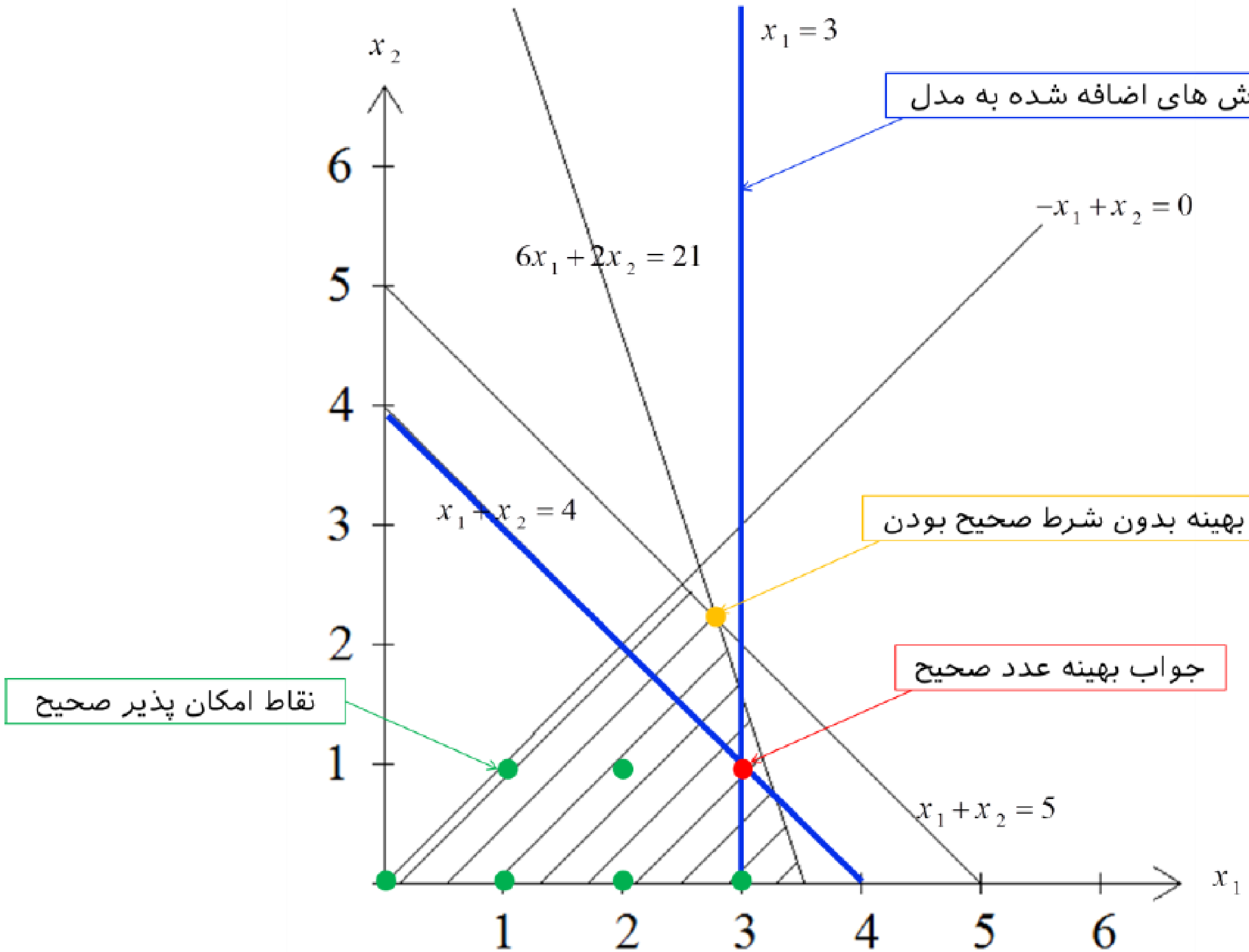
روش صفحه برش

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + x_2 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 5 \\
&\qquad -x_1 + x_2 \le 0 \\
&\qquad 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}.
\end{aligned}$$

با اضافه کردن محدودیت $x_1 \le 3$ و $x_1 + x_2 \le 4$ به مدل اصلی و حل مدل آزاد شده، بـه جواب مدل با متغیرهای عدد صحیح می‌رسیم.

روش صفحه برش



$x_1 = 3$
برش های اضافه شده به مدل
$-x_1 + x_2 = 0$
$6x_1 + 2x_2 = 21$
$x_1 + x_2 = 4$
جواب بهینه بدون شرط صحیح بودن
جواب بهینه عدد صحیح
نقاط امکان پذیر صحیح
$x_1 + x_2 = 5$
x_1
x_2
1
2
3
4
5
6

روش صفحه برش

مدل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max\ cx \\ &x \in Q = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad (1) \end{aligned}$$

فرض کنید که x_B یک جواب امکان پذیر پایه (نه لزوما بهینه) باشد، یعنی:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

و همچنین برای جواب‌های غیرپایه داریم: $x_j = 0$. با ضرب $h \neq 0$ در رابطه (۲)

داریم:

$$hx_{B_i} + \sum_{j \in N} h\bar{a}_{ij} x_j = h\bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

روش صفحه برش

چون $x_j \geq 0$ و $\lfloor a \rfloor \leq a$ پس خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} \lfloor h \rfloor \leq h \rightarrow \lfloor h \rfloor x_B \leq h x_{B_i} \\ \lfloor h\bar{a} \rfloor \leq h\bar{a} \rightarrow \lfloor h\bar{a} \rfloor x_j \leq h\bar{a}x_j \end{array} \rightarrow \lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_j \lfloor h\bar{a} \rfloor x_j \leq h x_{B_i} + \sum_j h\bar{a}x_j$$

$$\rightarrow \lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_j h\bar{a}x_j \leq h\bar{b}_i$$

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq h\bar{b}_i \quad i = 1, \ldots, m$$

روش صفحه برش

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \le h\bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

از آن جاییکه سمت چپ رابطه بالا صحیح است، لذا رابطه فوق را مـی‌تـوان بـه صـورت زیر هم نوشت:

$$\lfloor h \rfloor x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, \dots, m$$

از طرفی با ضرب رابطه (۲) در $\lfloor h \rfloor$ و با کم کردن از رابطه فوق داریم:

$$\sum_{j \in N} \left(\lfloor h \rfloor \bar{a}_{ij} - \lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor \right) x_j \ge \lfloor h \rfloor \bar{b}_i - \lfloor h\bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

روش صفحه برش گومری یا کسری

در این قسمت $h=1$ در نظر بگیرید. در این صورت رابطه (3) به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j\in N}\left(\bar{a}_{ij}-\lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor\right)x_j \geq \bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

فرض کنید $f_{i0}=\bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i \rfloor$ و $f_{ij}=\bar{a}_{ij}-\lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor$ در این صورت :

$$\sum_{j\in N} f_{ij}x_{ij} \geq f_{i0} \quad or \quad s_i-\sum_{j\in N} f_{ij}x_{ij}=-f_{i0}, s_i \geq 0 \quad (4)$$

روش صفحه برش گومری یا کسری

خاصیت مهم رابطه (۴) که اگر $f_{i0} > 0$ باشد، با اضافه کردن بـرش (۴)، جـواب بهینـه غیرصحیح مربوط از مدل آزادشده حذف می‌شود.

نکته: محدودیت شماره (۴) را به راحتی می‌توان به جدول بهینه با متغیر پایه S اضافه کرد و با توجه به این که شرط بهینگی بدون تغییر می مانـد، تنهـا شـرط امکـان پـذیری برای محدودیت جدید نقـض مـی‌شـود کـه مـی‌تـوان از روش سـیمپلکس همـزاد آن را برطرف کرد.

نکته: برش (۴) را نه تنها برای ضرایب محدودیت‌ها، بلکه برای ضرایب تابع هدف هم می‌توان نوشت.

روش صفحه برش گومری یا کسری

نکته: برای انتخاب سطری که توسط آن برش بدست می‌آید، روش‌های ابتکاری متفاوتی وجود دارد که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$1)\ f_{r0} = \underset{i}{Max}\left\{\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor\right\}$$

$$2)\ \frac{f_{r0}}{\sum_j f_{rj}} = \underset{i}{Max}\left\{\frac{f_{i0}}{\sum_j f_{ij}}\right\}$$

$$3)\ \frac{f_{r0}}{f_{rk}} = \underset{i}{Max}\left\{\frac{f_{i0}}{f_{ik}}\right\} \qquad k \in \text{متغیرهای غیرپایه}$$

$$4)\ f_{r0}\frac{\bar{c}_k}{f_{rk}} = \underset{i}{Max}\, f_{i0}\left(Min\left\{\frac{\bar{c}_j}{f_{ij}}\right\}\right)$$

موارد (۲) و (۳) بر مبنای حذف بیشترین ناحیه غیرصحیح و مورد (۴) بر مبنای بیشترین مقدار کاهش تابع هدف است.

روش صفحه برش گومری یا کسری

نکته: در استفاده از روش سیمپلکس همزاد نیازی به نگه داشتن تمامی برش‌ها نیست. برشی که متغیر پایه آن در پایه بوده و ضریب تمامی متغیرهای آن صفر باشد می‌توان از جدول سیمپلکس حذف شود.

نکته: به علت خطاهایی که در اثر گرد کردن پیش می‌آید، نمی‌توان از این روش در کامپیوتر برای مثال‌های واقعی استفاده کرد.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش برش‌های کسری حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
&\qquad 5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

روش صفحه برش گومری یا کسری

ابتدا جدول سیمپلکس نهایی را بدست می‌آوریم:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
X_3	1	0	1	1	1	0	6
X_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40
X_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1
X_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5
Z	0	1	0	0	5/4	¾	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75

جدول بهینه

روش صفحه برش گومری یا کسری

برش‌های کسری براساس جدول نهایی سیمپلکس به صورت زیر است:

$$\sum_{j\in N}\left(\bar{a}_{ij}-\lfloor \bar{a}_{ij}\rfloor\right)x_j \geq \bar{b}_i-\lfloor \bar{b}_i\rfloor$$

برش معادله ۰ (تابع هدف)

$$1)\left(\frac{5}{4}-\left\lfloor\frac{5}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(\frac{3}{4}-\left\lfloor\frac{3}{4}\right\rfloor\right)x_4 \geq 41.25-\lfloor 41.25\rfloor \rightarrow \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \geq 0.25$$

برش معادله ۱:

$$2)\left(\frac{9}{4}-\left\lfloor\frac{9}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(-\frac{1}{4}-\left\lfloor-\frac{1}{4}\right\rfloor\right)x_4 \geq 2.25-\lfloor 2.25\rfloor \rightarrow \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \geq 0.25$$

برش معادله ۲:

$$3)\left(-\frac{5}{4}-\left\lfloor-\frac{5}{4}\right\rfloor\right)x_3+\left(\frac{1}{4}-\left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor\right)x_4 \geq 3.75-\lfloor 3.75\rfloor \rightarrow \frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \geq 0.75$$

با استفاده از اصل (۱)، برش شماره ۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq 0.75\rightarrow -\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4\leq -0.75\rightarrow -\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+s_1=-0.75$$

با اضافه کردن برش فوق به جدول سیمپلکس، جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	0	0.33	1.66	40
X_1	1	0	1	0	0	-1	3	0
X_2	2	0	0	1	0	0.66	-1.66	5
X_3	3	0	0	0	1	0.33	-1.33	1

روش صفحه برش گومری یا کسری

با توجه به این که این مدل دارای ۲ متغیر اصلی است می‌توان از روش ترسیمی هم حل کرد. برای حل ترسیمی باید تمامی برش‌ها را برحسب x_1 و x_2 در آورد.

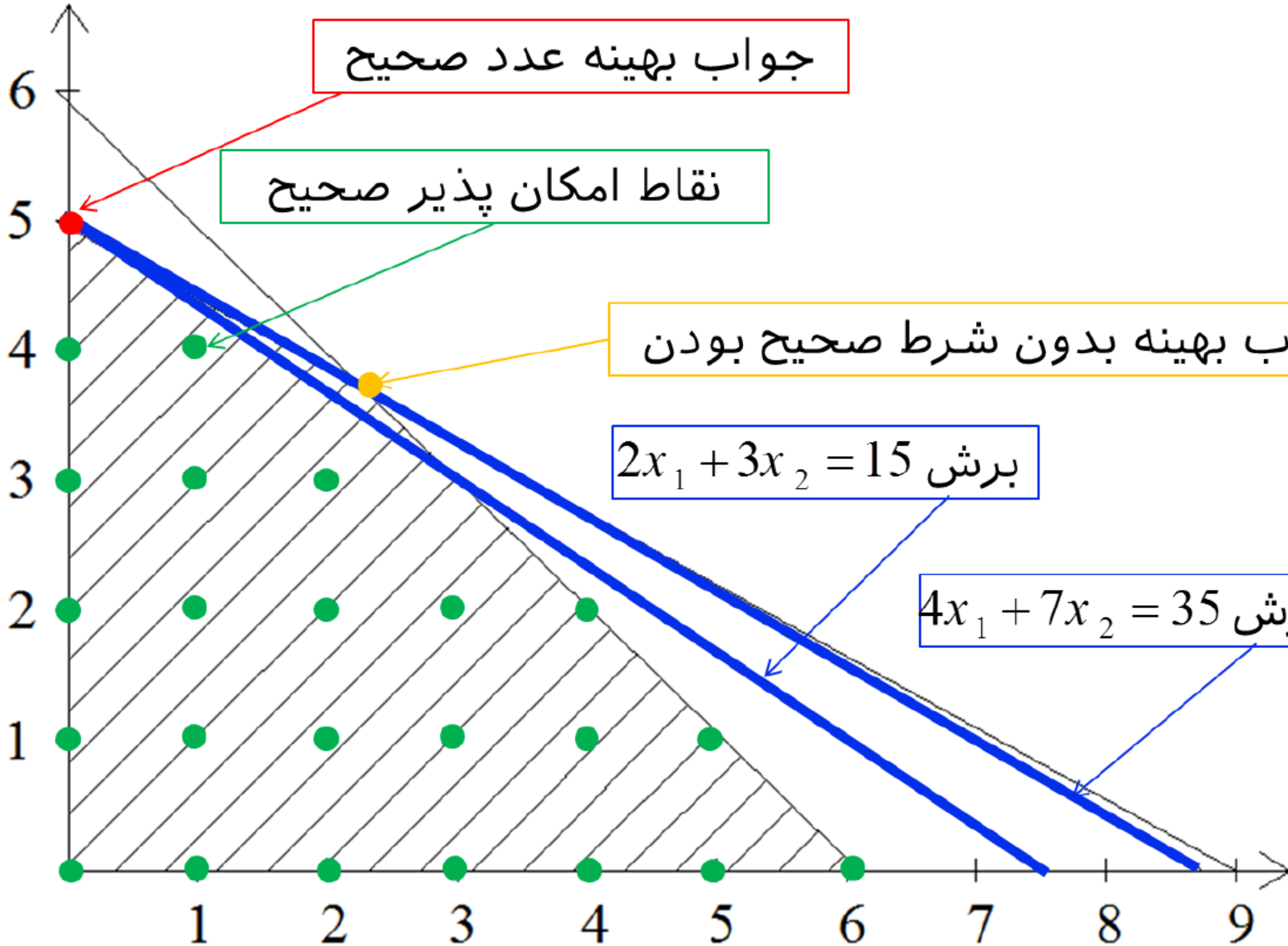
برش ۱ و ۲:

$$\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4\geq 0.25\rightarrow\frac{1}{4}(6-x_1-x_2)+\frac{3}{4}(45-5x_1-9x_2)\geq 0.25\rightarrow -4x_1-7x_2\geq -35$$
$$\rightarrow 4x_1+7x_2\leq 35$$

برش ۳:

$$\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq 0.75\rightarrow\frac{3}{4}(6-x_1-x_2)+\frac{1}{4}(45-5x_1-9x_2)\geq 0.75\rightarrow -2x_1-3x_2\geq -15$$
$$\rightarrow 2x_1+3x_2\leq 15$$

روش صفحه برش گومری یا کسری



روش برش کاملا صحیح همزاد

همان طور که اشاره شد اشکال این روش خطاهایی که در اثر گرد کردن به وجود می‌آید، است. برای رفع این ایراد از روش دیگری استفاده می‌کنیم که در هر تکرار شرایط بهینگی و صحیح بودن را حفظ می‌کنیم و دنبال برقرار شرط امکان پذیری هستیم. در صورت امکان ناپذیر بودن جواب، برش به مسئله اضافه می‌کنیم که جواب صحیح امکان ناپذیر را حذف نماید و امکان ناپذیری را کاهش دهد.

۱- حفظ بهینگی: برای این کار کافی است از روش سیمپلکس همزاد استفاده کنیم.

۲- حفظ صحیح بودن: برای این کار کافی است که عملیات چرخش لولا را روی عناصر ۱- انجام دهیم.

روش برش کاملا صحیح همزاد

فرض کنید یک پایه اولیه با داده‌های کاملا صحیح بـرای سـیمپلکس همـزاد در دسـت است که این جواب پایه شرایط بهینگی را داراست ولی امکان پذیر نیسـت($b<0$). بـا انتخاب مناسب برای h $(0<h<1)$ از برش عمومی به فرم زیر، مـی‌تـوان برشـی بـرای حذف این جواب امکان ناپذیر ایجاد کرد:

$$\sum_{j\in N}\left(\lfloor h\rfloor \bar{a}_{ij}-\lfloor h\bar{a}_{ij}\rfloor\right)x_j \ge \lfloor h\rfloor \bar{b}_i-\lfloor h\bar{b}_i\rfloor \quad i=1,\dots,m \quad (*)$$

در انتخاب h باید به نحوی عمل کرد که عمل چرخش لولا روی $\underline{-1}$ صورت گیرد. برای $0<h<1$ برش (*) به صورت زیر می‌شود($\lfloor h\rfloor=0$):

$$\sum_{j\in N}\left(\lfloor h\bar{a}_{rj}\rfloor\right)x_j \le \lfloor h\bar{b}_r\rfloor$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

با اضافه کردن متغیر کمبود s داریم:

$$s+\sum_{j\in N}\left(\left\lfloor h\bar{a}_{rj}\right\rfloor\right)x_j=\left\lfloor h\bar{b}_r\right\rfloor \quad ,s\geq 0,\text{int}$$

توجه کنید که اگر تمام $\bar{b}_r\geq 0$ باشند، جواب فعلی بهینه است لذا یک r وجود دارد که

$$b_r<0\rightarrow\left\lfloor h\bar{b}_r\right\rfloor<0$$

بنابراین وقتی این برش با متغیر پایه s به جدول سیمپلکس اضافه می‌شود، روش سیمپلکس همزاد، s را از پایه خارج می‌کند. اگر x_k بخواهد متغیر ورودی به پایه باشد،

روش برش کاملا صحیح همزاد

اولا باید $a_{rk} < 0$ (طبق روش سیمپلکس همزاد)

ثانیا برای حفظ شرط صحیح بودن جواب، h را باید به نحوی انتخاب کرد که

$$\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor = -1$$

ثالثا، مقدار $\bar{c}_j$ جدید پس از انجام چرخش لولا به صورت زیر است:

$$\bar{c}_j^{new} = \bar{c}_j^{old} - \frac{\lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor}{\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor}\bar{c}_k = \bar{c}_j + \lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \bar{c}_k \geq 0$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

از انجاییکه برای $a_{rj} < 0$ و $h > 0$، داریم $\lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \le -1$، بنابراین یـک شـرط لازم بـرای حفظ شرط بهینگی، عبارت است از:

$$\bar{c}_k = \underset{\bar{a}_{rk}<0}{Min}\ \bar{c}_j$$

اشاره شد که برای انتخاب h باید اولا شرط $\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor = -1$ برقرار باشد، بنابراین:

$$\lfloor h\bar{a}_{rk} \rfloor = -1 \rightarrow -1 \le h\bar{a}_{rk} < 0$$

$h\bar{a}_{rk} < 0 \xrightarrow{\bar{a}_{rk}<0} h > 0$ از قبل داشتیم

$$h\bar{a}_{rk} \ge -1 \longrightarrow h \le \frac{-1}{\bar{a}_{rk}} \le 1$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

ثانیا برای برقراری شرط بهینگی $\bar{c}_j + \lfloor h\bar{a}_{rj} \rfloor \bar{c}_k \geq 0$ برای مقدار h داریم:

- اگر $\bar{c}_k = 0$ باشد، هر مقداری از h را می‌توان انتخاب کرد:
- اگر $\bar{c}_k > 0$ باشد کافی است $h \leq -\dfrac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}$.

بنابراین h باید در محدوده زیر قرار بگیرید:

$$h \leq h^* = Min\left\{1, \frac{-1}{\bar{a}_{rk}}, \underset{\bar{a}_{rj}<0}{Min} - \frac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}\right\} = \underset{\bar{a}_{rj}<0}{Min}\left\{1, -\frac{\left\lfloor \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} \right\rfloor}{\bar{a}_{rj}}\right\}$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

نکته: برای ایجاد این نوع از برش‌ها، باید یک جواب پایه با داده‌های صحیح که شرط بهینگی را برقرار دارد، وجود داشته باشد. به سادگی می‌توان چنین پایه را استخراج کرد. برای این منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max\ cx \\ &\quad Ax \le b \\ &\quad x \ge 0, \text{int}. \end{aligned}$$

با اضافه کردن x_s به عنوان متغیر مازاد، می‌توان یک پایه صحیح به صورت $x = 0, x_s = b$ بدست آورد.

$$\begin{aligned} &Max\ cx \\ &\quad Ax + x_s = b \\ &\quad x \ge 0, x_s \ge 0, \text{int}. \end{aligned}$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

اگر این پایه در شرایط بهینگی‌صدق نکرد می‌توان محدودیتی به فرم زیر به مسئله اضافه کرد که در آن M یک عدد بزرگ است:

$$\sum_{j} x_j + s = M$$

سپس x_k با کمترین c_k در تابع هدف را وارد پایه و s را از پایه خارج می‌کنیم. این کار را با انجام چرخش لولا روی ضریب ۱+ انجام می‌شود تا هم شرط صحیح بودن حفظ شود و هم شرط بهینگی برقرار شود.

روش برش کاملا صحیح همزاد

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از طریق روش برش‌های کاملا صحیح همزاد حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$Max \quad z = 5x_1 + 8x_2$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \qquad + x_4 &= 45 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

برای بدست آوردن یک پایه صحیح که شرط بهینگی در آن برقرار باشد، می‌تـوان از محدودیت $\sum_j x_j \le M$ استفاده کرد. ولی محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ به این فرم است. به عبارت دیگر کافی است متغیر x_3 را از پایه خارج کـرد و متغیـر x_2 (کمترین ضریب در فرم استاندارد جدول سیمپلکس) را به پایه اضافه کرد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
X_3	1	0	1	1	1	0	6
X_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	3	0	8	0	48
X_2	1	0	1	1	1	0	6
X_4	2	0	-4	0	-9	1	-9

روش برش کاملا صحیح همزاد

ملاحظه می‌شود که اکنون به یک پایه صحیح با برقراری شرط بهینگی رسیدیم.

چون ۹–، منفی است لذا با سطر شماره ۲، برش را درست می‌کنیم. چون $c_k = \min_{a_{ij}<0} c_j = 3$، لذا متغیر x_1 وارد پایه می‌شود. برای محاسبه h^* داریم:

$$h^* = Min\left\{1, \frac{-1}{-4}, \frac{-\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor}{-9}\right\} = Min\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}\right\} = \frac{2}{9}$$

بنابراین برش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s + \sum_{j\in N} \left\lfloor h\bar{a}_{rj} \right\rfloor x_j = \left\lfloor h\bar{b}_r \right\rfloor$$

$$s + \left\lfloor -4\times\frac{2}{9} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor -9\times\frac{2}{9} \right\rfloor x_3 = \left\lfloor \frac{2}{9}\times -9 \right\rfloor$$

$$s - x_1 - 2x_3 = -2$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S	طرف سمت راست
Z	0	1	3	0	8	0	0	48
X_2	1	0	1	1	1	0	0	6
X_4	2	0	-4	0	-9	1	0	-9
S	3	0	-1	0	-2	0	1	-2
Z	0	1	0	0	2	0	3	42
X_2	1	0	0	1	-1	0	1	4
X_4	2	0	0	0	-1	1	-4	-1
X_1	3	0	1	0	2	0	-1	2

با توجه به این که به یک جواب امکان ناپذیر رسیدیم، یک برش جدید باید اضافه کرد:

$$h^* = Min\left\{1, \frac{-1}{-4}, \frac{-\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}{-1}\right\} = \frac{1}{4}$$

$$s' + \left\lfloor -1 \times \frac{1}{4} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor 1 \times \frac{1}{4} \right\rfloor x_4 + \left\lfloor -4 \times \frac{1}{4} \right\rfloor s = \left\lfloor -1 \times \frac{1}{4} \right\rfloor \rightarrow s' - x_3 - s = -1$$

روش برش کاملا صحیح همزاد

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S	S'	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	2	0	3	0	42
X_2	1	0	0	1	-1	0	1	0	4
X_4	2	0	0	0	-1	1	-4	0	-1
X_1	3	0	1	0	2	0	-1	0	2
S'	4	0	0	0	-1	0	-1	1	-1
Z	0	1	0	0	0	0	1	2	40
X_2	1	0	0	1	0	0	2	-1	5
X_4	2	0	0	0	0	1	-3	-1	0
X_1	3	0	1	0	0	0	-3	2	0
X_3	4	0	0	0	1	0	1	-1	1

جدول بهینه

روش برش کاملا صحیح اولیه

با استفاده از روش سیمپلکس به نحوه دیگر می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح را حل کرد و آن حفظ شرایط صحیح بودن و امکان پذیری اولیه و برقراری شرط بهینگی است. برای حفظ امکان پذیری، کافی است از روش سیمپلکس اولیه و تست نسبت استفاده کرد تا امکان پذیری پایه حفظ شود. برای حفظ صحیح بودن کافی است که عملیات چرخش لولا را روی ضریب ۱+ انجام داد. اگر شرط بهینگی در جدول سیمپلکس برقرار باشد($c_j \geq 0$) مسئله حل شده است. فرض کنید $c_k < 0$ باشد و x_k متغیر ورودی به پایه و x_r متغیر خروجی از پایه باشد که از تست زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = Min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} \geq 1\right\}$$

روش برش کاملا صحیح اولیه

با وارد کردن x_k به جای x_r در پایه شرط امکان پذیری باقی خواهد ماند. حال اگر $\bar{a}_{rk}=1$ باشد، شرط صحیح بودن باقی خواهد ماند. بنابراین فرض کنید $\bar{a}_{rk}>1$، آنگاه $h=\frac{1}{\bar{a}_{rk}}<1$ و لذا برش عمومی به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{j\in N}\left\lfloor\frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\right\rfloor x_j\le\left\lfloor\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\right\rfloor\rightarrow s+\sum_{j\in N}\left\lfloor\frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\right\rfloor x_j=\left\lfloor\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\right\rfloor, s\ge 0,\text{int}.$$

روش برش کاملا صحیح اولیه

مثال: مدل زیر را از روش برش‌های کاملا صحیح اولیه حل کنید.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& -x_1 + x_2 \le 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \ge 0, \text{int}.
\end{aligned}
$$

حل: فرم گسترده مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{int}.
\end{aligned}
$$

برش اول:

$$s_1 + \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{2}{6} \right\rfloor x_2 = \left\lfloor \frac{21}{6} \right\rfloor \rightarrow s_1 + x_1 = 3$$

روش برش کاملا صحیح اولیه

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0	0
X_3	1	0	1	1	1	0	0	0	5
X_4	2	0	-1	1	0	1	0	0	0
X_5	3	0	6	2	0	0	1	0	21
S_1	4	0	1	0	0	0	0	1	3
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	6
X_3	1	0	0	1	1	0	0	-1	2
X_4	2	0	0	1	0	1	0	1	3
X_5	3	0	0	2	0	0	1	-6	3
X_1	4	0	1	0	0	0	0	1	3

روش برش کاملا صحیح اولیه

برش دوم:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{-6}{2} \right\rfloor s_1 + s_2 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \rightarrow s_2 + x_2 - 3s_1 = 1$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	-1	0	0	0	2	0	6
X_3	1	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
X_4	2	0	0	1	0	1	0	1	0	3
X_5	3	0	0	2	0	0	1	-6	0	3
X_1	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
S_2	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	7
X_3	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	1
X_4	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	2
X_5	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	1
X_1	4	0	1	0	0	0	0	1	0	3
X_2	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	1

روش برش کاملا صحیح اولیه

برش سوم:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{-1}{2} \right\rfloor s_2 + s_3 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \rightarrow s_3 + s_1 - s_2 = 0$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	7
X_3	1	0	0	0	1	0	0	2	-1	0	1
X_4	2	0	0	0	0	1	0	4	-1	0	2
X_5	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X_1	4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3
X_2	5	0	0	1	0	0	0	-3	1	0	1
S_3	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	7
X_3	1	0	0	-2	1	0	0	0	1	0	1
X_4	2	0	0	0	0	1	0	0	3	-4	2
X_5	3	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1
X_1	4	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	3
X_2	5	0	0	1	0	0	0	0	-2	3	1
S_1	6	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0

جدول بهینه

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com