

درس ۱۲: روش حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح: روش شاخه و کرانه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر شمارا باشد که با کنترل تمامی آن‌ها می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای n متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n = 10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n = 20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n = 30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود که حتی سریعترین کامپیوترها قادر به شمارش تمامی جواب‌ها نخواهند بود. حال اگر تعداد متغیرها از مقیاس میلیون باشند، دشوار به سرعت است بیشتر می‌شود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

(۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

(۲) ساختار مسئله

همان طور که ملاحظه می‌شود تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از آنجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملاً بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش ممکن است برای حل برخی از مسائل کاربردی که مقدار بسیار بزرگی دارند مناسب باشد. ولی این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱- شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲- شاید جواب گره شده دیگر بهینه نباشد.

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مسئله فوق، $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, z = 11$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد

صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه

مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

متداول ترین الگوریتم برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، روش انشعاب و تحدید یا شاخه و کرانه (Branch and Bound) است که نکته اصلی در آن، شمارش ضمنی جواب‌های موجه است. در ادامه این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش شاخه و کرانه Branch and Bound

چون تعداد جواب‌های موجه یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح محدود، متناهی است، لذا طبیعی است که برای پیدا کردن جواب بهینه آن از روش شمارش (enumeration procedure) استفاده شود. همان طور که گفته شد، چون تعداد جواب‌ها بسیار زیاد است، هر روش شمارش باید به صورت آگاهانه طوری طراحی شود که درصد کمی از جواب‌ها را مورد بررسی قرار دهد.

مبنای روش شاخه و کرانه به شرح زیر است:

فرض کنید تابع هدف مسئله مورد نظر باید حداقل شود و مقدار تابع هدف نیز از مقدار مشخصی که آن را حد بالا (Upper Bound) (با z_u نشان داده می‌شود) تجاوز نمی‌کند. این حد بالا معمولاً مقدار تابع هدف به ازای بهترین جواب موجهی است که تاکنون پیدا شده است. منطقه جواب به چند زیر مجموعه منشعب می‌شود. آنگاه حد پایین هر زیر مجموعه (z_L) بدست می‌آید. این حد پایین به این معنا است که z_L از z_u بیشتر باشد از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه که جواب موجه ندارد و یا این که بهترین جواب

موجه آن یافته شده است، از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه‌ای که به هر کدام از دلایل فوق حذف شوند به ته رسیده یا *fathomed* گفته می‌شود. وقتی یک مجموعه به ته می‌رسد، یکی دیگر از مجموعه‌های باقی مانده که مثلاً بهترین حد را دارند انتخاب می‌شود. در عمل شاخه شدن بر روی آن انجام می‌شود. این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که جواب موجهی بدست آید که مقدار تابع هدف آن از حد پایینی هیچکدام از زیر مجموعه‌های باقی مانده بیشتر نباشد و چنین جوابی، جواب بهینه است.

الگوریتم روش شاخه و کرانه

در ادامه خلاصه روش شاخه و کرانه به صورت الگوریتمی بیان می‌شود:

قدم ابتدایی: $z_U = \infty$. کل جواب‌های مورد بحث را به عنوان زیر مجموعه موجود در نظر بگیرید.

قدم انشعاب (Branch step): یکی از زیر مجموعه‌های باقی مانده (یک زیر مجموعه که نه به ته رسیده و نه منشعب شده است) را برای انشعاب انتخاب کنید. آن گاه زیر مجموعه انتخاب شده را به دو تا چند زیر مجموعه تقسیم کنید.

قدم تحدید (Bound step): حد پایینی مقدار تابع هدف (z_L) را برای این زیر مجموعه تعیین کنید.

قدم به ته رسیدن (fathoming step): هر زیر مجموعه جدید که دارای یکی از شرایط زیر باشد، از بررسی بیشتر کنار گذاشته می‌شود.

$$\underline{z}_L \geq z_U \quad \text{آزمون ۱:}$$

آزمون ۲: زیر مجموعه مورد نظر شامل هیچ جواب موجهی نیست.

آزمون ۳: بهترین جواب موجه این زیر مجموعه مشخص شده است. اگر $z_L < z_U$ باشد، این جواب

جایگزین بهترین جواب موجود می‌شود و $z_U = z_L$ و سپس آزمون ۱ برای باقی گره‌ها انجام می‌شود.

قدم بهینگی: هنگامی که زیر مجموعه دیگری برای انشعاب باقی نمانده است، توقف کنید. بهترین

جواب موجه همان جواب بهینه است. در غیر این صورت، به قدم انشعاب بروید.

مثال: مسئله تخصیص کار به نفر زیر را در نظر بگیرید. هدف این است که هر کدام از کارها منحصر به

یکی از چهار نفر طوری تخصیص داده شود که مجموع هزینه‌های انجام شده حداقل شود.

نفر \	1	2	3	4
A	9	5	4	5
B	4	3	5	6
C	3	1	3	2
D	2	4	2	6

حل:

تکرار صفر: این مسئله دارای $4! = 24$ ترکیب مختلف از جواب‌ها است. حد پایین این ۲۴ جواب را با z_L

نشان می‌دهیم. برای چنین حد پایینی، جمع کردن حداقل‌های ممکن هزینه‌های تخصیص (یعنی مجموع

اعداد حداقل ستون‌های جدول هزینه) در نظر گرفته می‌شود که در این مثال برابر با $2+1+2+2=7$

می‌شود. این جواب مربوط به تخصیص DCDC است که واضحاً یک جواب غیرموجه است.

تکرار ۱: با تخصیص کار ۱ به هر کدام از افراد آغاز می‌کنیم و کل جواب‌ها را به ۴ زیر مجموعه تخصیص

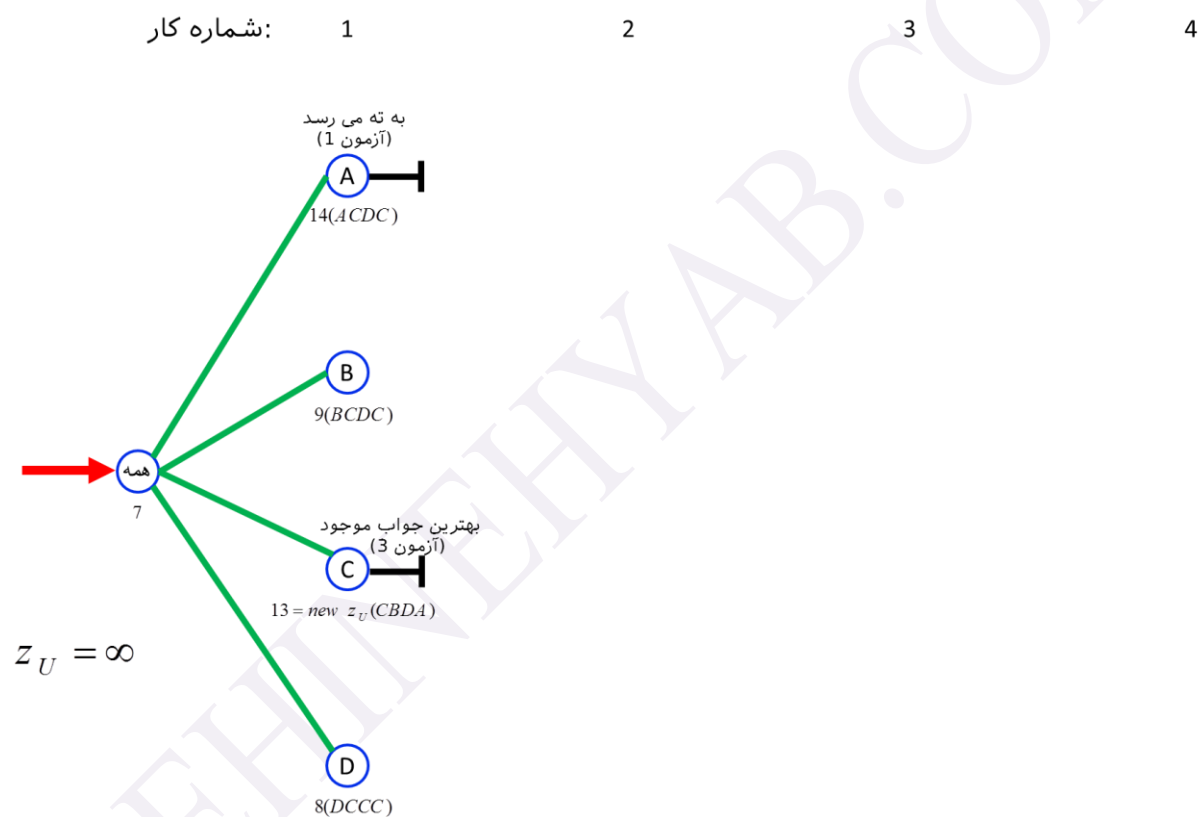
می‌دهیم. برای مثال، حد پایین z_L برای تخصیص کار ۱ به نفر A برابر با $14 = 9 + (1 + 2 + 2)$ می‌شود. به

این صورت که ۹ هزینه تخصیص کار ۱ به نفر A است و حداقل هزینه‌ها برای مابقی کارها به شرط این که

به فرد A دیگر کاری تخصیص داده نشود. حد پایین برای کار ۱ به نفر B، برابر با $9 = 4 + (1 + 2 + 2)$

می‌شود. برای تخصیص کار ۱ به فرد C، حد پایین برابر $13 = 3 + (3 + 2 + 5)$ می‌شود. برای تخصیص کار ۱ به فرد D، z_L برابر با $8 = 2 + (1 + 3 + 2)$ می‌شود.

چون z_L برای زیر مجموعه C، منجر به جواب موجه CBDA می‌شود، لذا حد بالایی جواب بهینه نیز به صورت $z_U = 13$ به هنگام می‌شود و CBDA جواب بهینه فعلی می‌شود. طبق آزمون ۳، زیر مجموعه C به ته می‌رسد. با توجه به آزمون ۱، زیر مجموعه A به ته می‌رسد و لذا تنها دو مجموعه B و D برای انشعاب باقی می‌ماند. خلاصه نتایج در شکل زیر آمده است.



تکرار ۲: از بین دو زیر مجموعه باقی مانده، زیر مجموعه D به دلیل این که کمترین حد پایین را دارد انتخاب می‌شود. به این اصل، اصل بهترین حد گفته می‌شود. در این زیر مجموعه که کار ۱ به فرد D تخصیص داده می‌شود و در این زیر مجموعه، می‌توان ۳ زیر مجموعه DA، DB، و DC منشعب کرد که حد پایین به ترتیب برابر با ۱۲، ۱۰، و ۱۲ می‌شود. برای این سه زیر مجموعه، هیچ یک از آزمون‌های توقف برقرار نیست. لذا زیر مجموعه‌های باقی مانده عبارتند از B، DA، DB، و DC. نتایج این تکرار در شکل زیر آمده است.

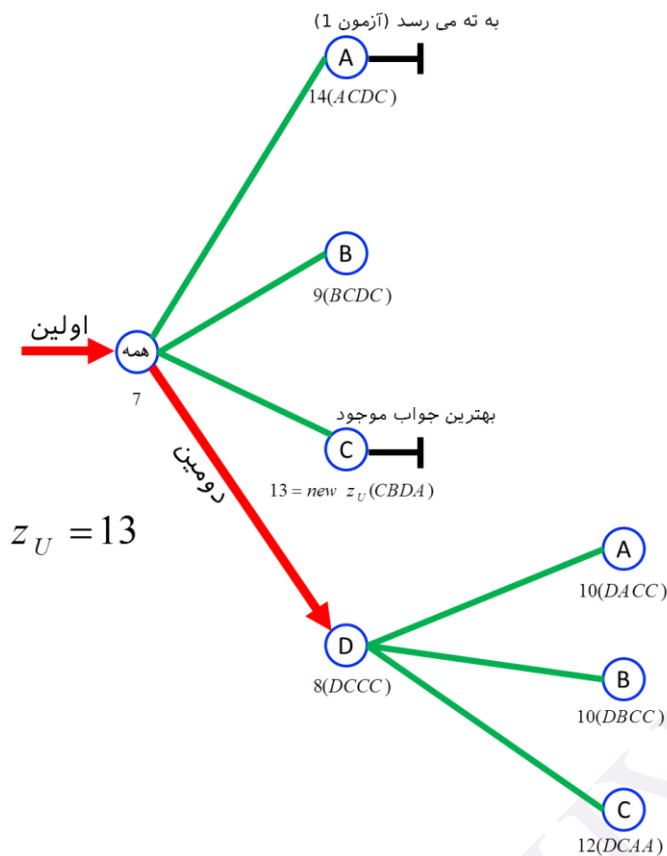
شماره کار:

1

2

3

4



تکرار ۳: از بین چهار زیر مجموعه باقی مانده، زیر مجموعه B به دلیل کمترین حد پایین انتخاب می شود و انتخاب به سه زیر مجموعه BC ، BA ، BD منشعب می شود. حد پایین آن ها به ترتیب برابر با $4 + 4 + (3 + 2) = 13$ و $4 + 1 + (2 + 5) = 12$ ، $4 + 5 + (2 + 2) = 13$ چون زیر مجموعه های BC و BA جواب های موجه هستند و حد پایین زیر مجموعه های BD و BA برابر حد بالای هستند، لذا هر سه زیر مجموعه به ته می رسند. همچنین چون زیر مجموعه BC یک جواب موجه است مقدار تابع هدف در آن از z_U فعلی کمتر است، لذا جواب بهترین جواب موجه جدید محسوب می شود. از آن جایگاه $z_U = 12$ برابر با z_L زیر مجموعه های DC و DA است، لذا این دو مجموعه نیز به ته می رسد. بنابراین، تنها زیر مجموعه ای که تا این لحظه به جا مانده است، DB است. نتایج این تکرار در شکل زیر آمده است.

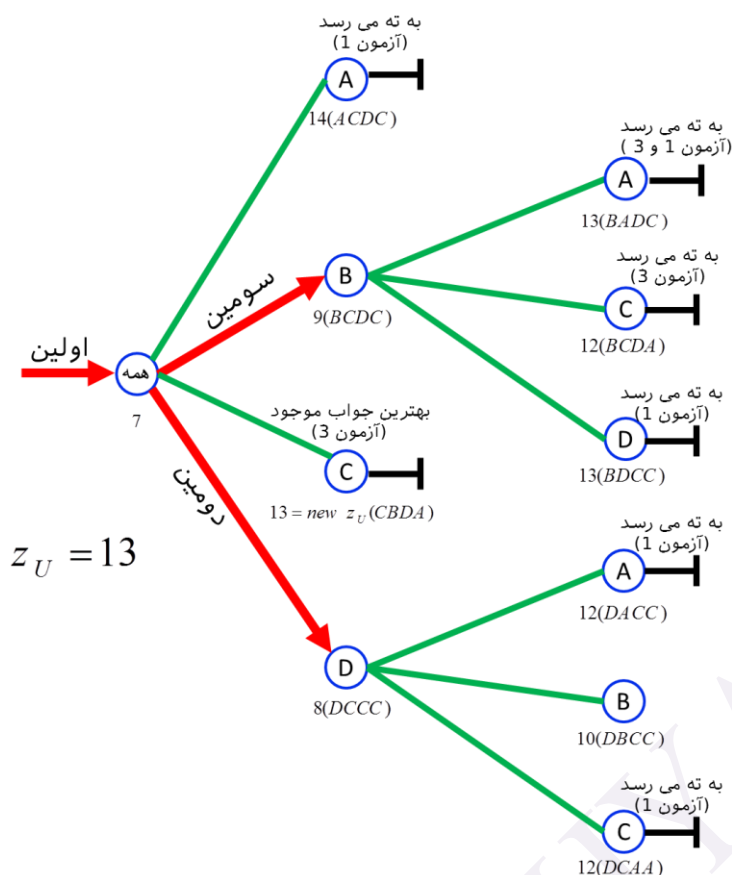
شماره کار:

1

2

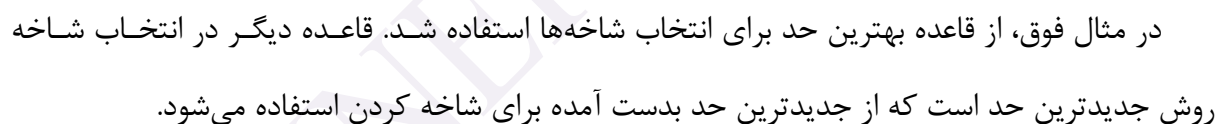
3

4



تکرار ۴: تنها زیر مجموعه باقی مانده، DB است که به زیر مجموعه‌های DBA و DBC تقسیم می‌شود.

حد پایین آن‌ها به ترتیب $2+3+4+(2)=11$ و $2+3+3+(5)=13$ است. چون این دو حد مربوط به جواب‌های موجه می‌شوند، لذا هر دو زیر مجموعه به ته می‌رسند. علاوه بر این‌ها، جواب موجه $DBAC$ مربوط به زیر مجموعه DBA از بهترین جواب موجود بهتر است ($11 < 12$)، لذا این جواب ($DBAC$) به عنوان جواب جدید انتخاب می‌شود. چون زیر مجموعه‌ای دیگر که هنوز به ته نرسیده باشد، باقی نمانده است، لذا بهترین جواب موجه (یعنی $DBAC$)، جواب بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد. خلاصه محاسبات این تکرار در شکل زیر آمده است.



همان طور که در بخش قبلی گفته شده، بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح به صورت متغیرهای صفر و یک هستند. اما در برخی از مسائل، متغیرها می‌توانند بیش از دو مقدار به خود بگیرند. ولی می‌توان این مدل‌ها را به متغیرهای دودویی تبدیل کرد. فرض کنید که x یک عدد صحیح باشد. در این صورت می‌توان گفت $x = \sum_{i=0}^N 2^i y_i$ که $2^N \leq x < 2^{N+1}$. در این حالت، y_i متغیرهای کمکی از نوع صفر و یک هستند.

برای ارایه دستور حل شاخه و کرانه برای مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی، مسئله‌ای عمومی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &= 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

که در مدل فوق $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ است. این فرض در واقع محدودیتی ایجاد نمی‌کند. زیرا اگر $c_j < 0$ باشد، می‌توان x_j را با $1 - x'_j$ جایگزین کرد که در این صورت ضریب متغیر x'_j در تابع هدف مثبت خواهد شد. با توجه به موارد فوق، الگوریتم شاخه و کرانه به صورت زیر ارایه می‌گردد.

گام شاخه کردن: در این گام با تخصیص ۰ یا یک به برخی از متغیرها یک زیر مجموعه تعریف می‌شود که آن را جواب جزئی $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ می‌نامند. تکمیل جواب جزئی، جوابی است که N متغیر اول آن برابر متغیرهای جزئی است. اگر $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ آخرین جواب باشد، این جواب به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شود که در یکی از آن $x_{N+1} = 1$ و در دیگری $x_{N+1} = 0$ است.

گام کرانه: حد پایین z_L مربوط به جواب جزیی $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ که موجه باشد به صورت زیر تعریف

می شود:

$$z_L = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

چنانچه جواب جزیی، موجه نباشد و $x_N = 0$ ، می توان حد پایینی را به شرح زیر تعریف کرد:

$$z_L = \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j + c_{N+1}$$

در صورتیکه جواب جزیی موجه نباشد و $x_N = 1$ باشد، حد پایین از رابطه $z_L = \sum_{j=1}^N c_j x_j$ محاسبه

می شود.

گام توقف یا به ته رسیدن: در صورتیکه جواب جزیی فعلی در یکی از آزمون های سه گانه زیر صدق

کرد، دیگر نیازی به شاخه کردن نیست. این آزمون ها عبارتند از:

$$z_L \geq z_U \quad \text{آزمون ۱:}$$

که z_U مقدار تابع هدف بهترین جواب موجهی است که تا این مرحله بدست آمده است. در صورتیکه

تاکنون جواب موجهی بدست نیامده است، $z_U = \infty$ منظور می شود.

آزمون ۲: در این آزمون نبودن جواب موجه در زیر مجموعه مورد نظر بررسی می شود که با تکمیل

جواب جزیی فعلی آیا ممکن است که حداقل یکی از محدودیت ها هرگز برقرار نشود؟ طبق این آزمون، در

صورتیکه به ازای یکی از مقادیر $i = 1, \dots, m$ ، رابطه زیر صدق نماید، آنگاه شاخه کردن جواب جزیی فعلی

متوقف می شود.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j + \sum_{j=N+1}^n \max\{a_{ij}, 0\} < b_i$$

آزمون ۳:

در این آزمون رسیدن به بهترین جواب موجه در زیر مجموعه بررسی می‌شود که آیا جواب جزئی فعلی موجه است یا نه. چنانچه جواب جزئی فعلی به $x_N = 0$ ختم شود، به جای بررسی موجه بود جواب جزئی فعلی، موجه بودن جواب جزئی که در آن $x_{N+1} = 1$ بررسی می‌شود. بیان ریاضی این آزمون به صورت زیر است.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j + a_{i,N+1}(1-x_N) \geq b_i$$

چنانچه این شرط برقرار شود و همچنین داشته باشیم $z_L < z_U$ ، لذا $z_U = z_L$ می‌شود و این جواب به عنوان بهترین جواب موجود در نظر می‌گیریم.

برای روشن شدن موضوع مثال زیر را حل می‌کنیم.

تمرین: مسئله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را حل نمایید.

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6$$

s.t.

$$-x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2$$

$$-5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2$$

$$+5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3$$

$$x_j = 0 \text{ or } 1; j = 1, \dots, 6$$

حل:

تکرار صفر: $z_U = \infty$ و چون ضریب متغیرها در تابع هدف نامنفی هستند، لذا مقدار بهینه تابع هدف قطعاً از صفر بزرگتر است و لذا $z_L = 0$. چون جواب $(0,0,0,0,0,0)$ در محدودیت‌های ۱ و ۳ امکان پذیر

نیست، لذا شرایط توقف برقرار نیست و باید این گره، شاخه کرد و این گره به دو شاخه $x_1 = 0$ و $x_1 = 1$ تقسیم می شود.

تکرار ۱: جواب جزئی (۱) بررسی می شود:

$$\text{آزمون ۱: } 3 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -1 + 6 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } -5 + 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } 5 + 4 + 2 \not\leq 3$$

این گره در این آزمون به ته نمی رسد.

آزمون ۳: جواب (1,0,0,0,0,0) بررسی می شود که محدودیتها برقرار یا نه؟

$$\text{constr1: } -1 \geq 2 \quad N.G.$$

$$\text{constr2: } -5 \geq -2 \quad N.G.$$

$$\text{constr3: } 5 \geq 3 \quad O.K.$$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی شود.

تکرار ۲: گره با جواب جزئی (1,0) بررسی می شود:

$$\text{آزمون ۱: } 9 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -1 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } -5 + 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } 5 + 4 + 2 \not\leq 3$$

آزمون ۳: جواب (1,0,1,0,0,0) را از نظر برقراری در محدودیتها بررسی می شود.

$$\text{constr1: } -1 - 3 \not\geq 2.$$

$$\text{constr2: } -5 + 1 \not\geq -2$$

$$\text{constr3: } 5 + 4 \geq 3.$$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی شود.

تکرار ۳: جواب جزیی $(1, 0, 0)$ بررسی شود.

$$\text{آزمون ۱: } 12 = z_L \not\geq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -1 + 4 + 1 \not\geq 2$$

$$\text{constr2: } -5 + 3 + 1 \not\geq -2$$

$$\text{constr3: } 5 + 2 \not\geq 3$$

آزمون ۳: با توجه به این که جواب جزیی $(1, 0, 0)$ است، باید جواب $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ کنترل شود که در

محدودیت‌ها برقرار است یا نه؟

$$\text{constr1: } -1 + 4 \geq 2.$$

$$\text{constr2: } -5 + 3 \geq -2$$

$$\text{constr3: } 5 - 2 \geq 3.$$

جواب $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ امکان پذیر است و لذا $z_U = 12$.

تکرار ۴: جواب جزیی $(1, 0, 1)$ در نظر بگیرید

$$\text{آزمون ۱: } 9 = z_L \not\geq z_U = 12$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -1 - 3 + 4 + 1 < 2$$

$$\text{constr2: } -5 + 1 + 3 + 1 \not\geq -2$$

$$\text{constr3: } 5 + 4 + 2 \not\geq 3$$

چون محدودیت ۱ برقرار نیست لذا این گره با توجه به آزمون ۲ به ته می‌رسد.

تکرار ۵: جواب جزئی (1,1) را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } 8 = z_L \not\leq z_U = 12$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -1 + 6 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } -5 - 3 + 1 + 3 + 1 < -2$$

$$\text{constr3: } 5 - 1 + 4 + 2 \not\leq 3$$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار ۶: جواب جزئی (0) را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } 5 = z_L \not\leq z_U = 12$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 0 + 6 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } 0 + 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } 0 + 4 + 2 \not\leq 3$$

با این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون ۳: چون $x_1 = 0$ است، باید کنترل شود که (0,1,0,0,0,0) امکان پذیر است یا نه؟

$$\text{constr1: } 6 \geq 2.$$

$$\text{constr2: } -3 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } -1 \not\leq 3.$$

در این آزمون، گره به ته نمی‌رسد.

تکرار ۷: جواب جزئی $(0,1)$ را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } 5 = z_L \not\leq z_U = 12$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 6 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } -3 + 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } -1 + 4 + 2 \not\leq 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,0,0,0,0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 6 \geq 2.$$

$$\text{constr2: } -3 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } -1 \not\leq 3.$$

تکرار ۸: جواب جزئی $(0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } 11 = z_L \not\leq z_U = 12$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 6 - 3 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } -3 + 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } -1 + 4 + 2 \not\leq 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$$\text{constr1: } 6 - 3 \geq 2.$$

$$\text{constr2: } -3 + 1 \geq -2$$

$$\text{constr3: } -1 + 4 \geq 3.$$

این گره با آزمون ۳ به ته می‌رسد و $z_U = 11$ بهترین جواب موجه فعلی است.

تکرار ۹: جواب جزئی $(0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $14 = z_L \geq z_U = 11$ برقرار است و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۰: جواب جزئی $(0,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } +4 + 2 \not\leq 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ را بررسی کنید.

$$\text{constr1: } -3 \not\leq 2.$$

$$\text{constr2: } +1 \geq -2$$

$$\text{constr3: } +4 \geq 3.$$

این گره به ته نمی‌رسد.

تکرار ۱۱: جواب جزئی $(0,0,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } -3 + 4 + 1 \not\leq 2$$

$$\text{constr2: } 1 + 3 + 1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } +4 + 2 \not\leq 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$$\text{constr1: } -3 \not\leq 2.$$

$$\text{constr2: } +1 \geq -2$$

$$\text{constr3: } +4 \geq 3.$$

تکرار ۱۲: جواب جزئی $(0,0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $15 = z_L \geq z_U = 11$ ، و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۳: جواب $(0,0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $16 = z_L \geq z_U = 11$ را در نظر بگیرید و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۴: جواب $(0,0,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } +1 < 2$$

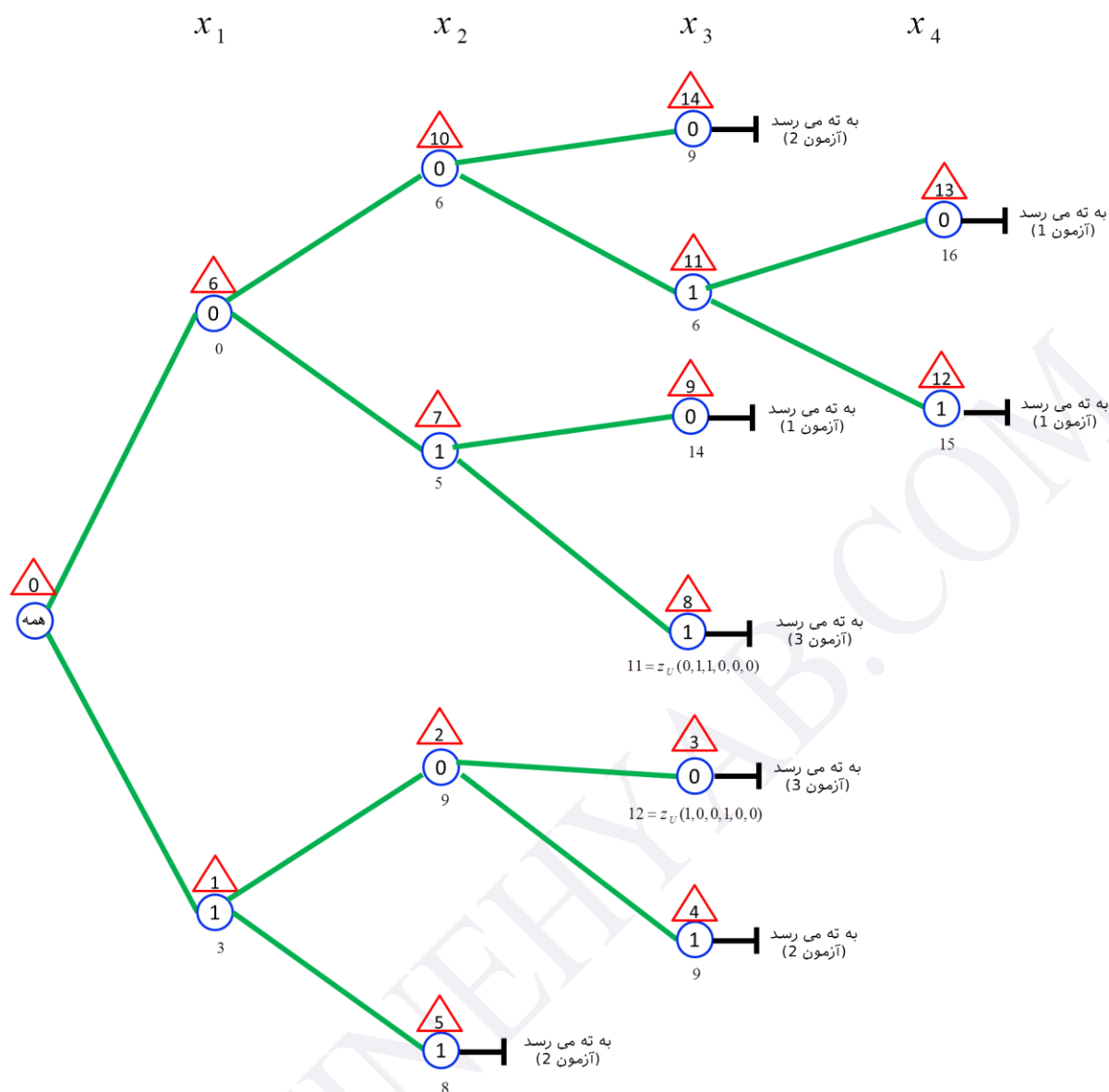
$$\text{constr2: } +1 \not\leq -2$$

$$\text{constr3: } +2 < 3$$

این گره با آزمون ۲ به ته می‌رسد.

کلیه گره‌ها بسته شده است و جواب بهینه $z = 11$ و $(0,1,1,0,0,0)$ می‌شود. خلاصه محاسبات در

شکل زیر آمده است.



الگوریتم شاخه و کرانه برای برنامه‌ریزی مختلط

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i=1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j=1, \dots, n \\ x_j &\in \text{int} \quad j=1, \dots, I \end{aligned}$$

در مدل فوق، اگر $I = n$ باشد مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص (Pure integer programming) خواهیم داشت. برای حل مدل فوق الگوریتم زیر ارائه می‌شود.

با حذف محدودیت عدد صحیح و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده انجام می‌شود. اگر جواب حاصل به ازای تمامی متغیرهای عدد صحیح، مقدار صحیح به خود بگیرد، در این صورت جواب بهینه بدست آمده است. در غیر این صورت، در هر تکرار متغیری مانند x_j را بر می‌گزیند که مقدار آن عدد صحیح نباشد به طوری که اگر k عدد صحیح باشد،

$$k < x_j < k + 1$$

سپس زیر مجموعه موجود را دو زیر مجموعه جدید تقسیم می‌کند.

$$1- \text{جواب‌هایی که در آن } x_j \leq k$$

$$2- \text{جواب‌هایی که در آن } x_j \geq k + 1$$

با حذف شرط صحیح بودن و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده (با اضافه کردن محدودیت‌های $x_j \leq k$ یا $x_j \geq k + 1$) یک حد بالا (z_U) برای زیر مجموعه بدست می‌آید. جواب مسئله آزاد شده توسط روش سیمپلکس ثانویه بدست می‌آید. آزمون‌های به ته رسیدگی به صورت سه آزمون زیر است:

$$\text{آزمون ۱: } z_L \geq z_U$$

آزمون ۲: با روش سیمپلکس ثانویه در می‌یابیم که جواب موجهی وجود ندارد.

آزمون ۳: در جواب بهینه، تمام متغیرهای x_j ($j = 1, \dots, I$) عدد صحیح باشند.

اگر زیر مجموعه‌ای با آزمون ۳ به ته رسید و $z_U > z_L$ باشد، آنگاه $z_L = z_U$ قرار داده شده و این جواب را به عنوان بهترین جواب موجود ذخیره می‌شود. پس از آن که تمامی زیر مجموعه‌های باقی مانده به ته رسیدند، آنگاه حد پایین همان جواب بهینه است.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش شاخه و کرانه حل نمایید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 + x_4 &= 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

A0							
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	6
x_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40
x_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1
x_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5
Z	0	1	0	0	5/4	3/4	41.25
x_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25
x_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75

جدول بهینه

متغیر x_1 و x_2 دارای مقدار غیرصحیح در جواب بهینه است. لذا یکی از متغیرها را باید برای شاخه

کردن انتخاب کرد که در این مرحله x_2 انتخاب می‌شود.

$$x_2 \geq 4 \rightarrow -x_2 \leq -4 \rightarrow -x_2 + s_1 = -4$$

A1								
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	3/4	0	41.25
X ₁	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X ₂	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S ₁	3	0	0	-1	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	5/4	3/4	0	41.25
X ₁	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X ₂	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S ₁	3	0	0	0	-5/4	0.25	1	-0.25
Z	0	1	0	0	0	1	1	41
X ₁	1	0	1	0	0	1/5	9/5	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	0	-1	4
X ₃	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0.2

جدول بهینه

$$x_1 \geq 2 \rightarrow -x_1 \leq -2 \rightarrow -x_1 + s_2 = -2$$

A2									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X ₁	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X ₃	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S ₂	4	0	-1	0	0	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X ₁	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X ₃	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S ₂	4	0	0	0	0	0.2	1.8	1	-2.2

جدول امکان ناپذیر

با توجه به این که ضرایب متغیرها در معادله شماره ۴ مثبت است و سمت راست منفی است، لذا این

جواب امکان ناپذیر است.

$$x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 + s_2 = 1$$

A3									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X ₁	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X ₃	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S ₂	4	0	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X ₁	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X ₃	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S ₂	4	0	0	0	0	-0.2	-1.8	1	-0.8
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	40.555
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	1
X ₂	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	4.444
X ₃	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	5/9
S ₁	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	4/9

جدول بهینه

$$x_2 \leq 4 \rightarrow x_2 + s_3 = 4$$

A4										
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X ₃	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S ₁	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S ₃	5	0	0	1	0	0	0	0	1	4
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X ₃	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S ₁	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S ₃	5	0	0	0	0	-1/9	0	5/9	1	-4/9
Z	0	1	0	0	0	0	0	5	8	37
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0	14/9	1	4
X ₃	3	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
S ₁	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X ₄	5	0	0	0	0	1	0	-5	-9	4

جدول بهینه

$$x_2 \geq 5 \rightarrow -x_2 \leq -5 \rightarrow -x_2 + s_3 = -5$$

A5										
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X ₃	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S ₁	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S ₃	5	0	0	-1	0	0	0	0	1	-5
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X ₃	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S ₁	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S ₃	5	0	0	0	0	1/9	0	-5/9	1	-5/9
Z	0	1	0	0	0	1	0	0	1	40
X ₁	1	0	1	0	0	0.2	0	0	1.8	0
X ₂	2	0	0	1	0	0	0	0	-1	5
X ₃	3	0	0	0	1	-0.25	0	0	-0.8	1/9
S ₁	4	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
S ₂	5	0	0	0	0	-0.2	0	1	-1.8	1

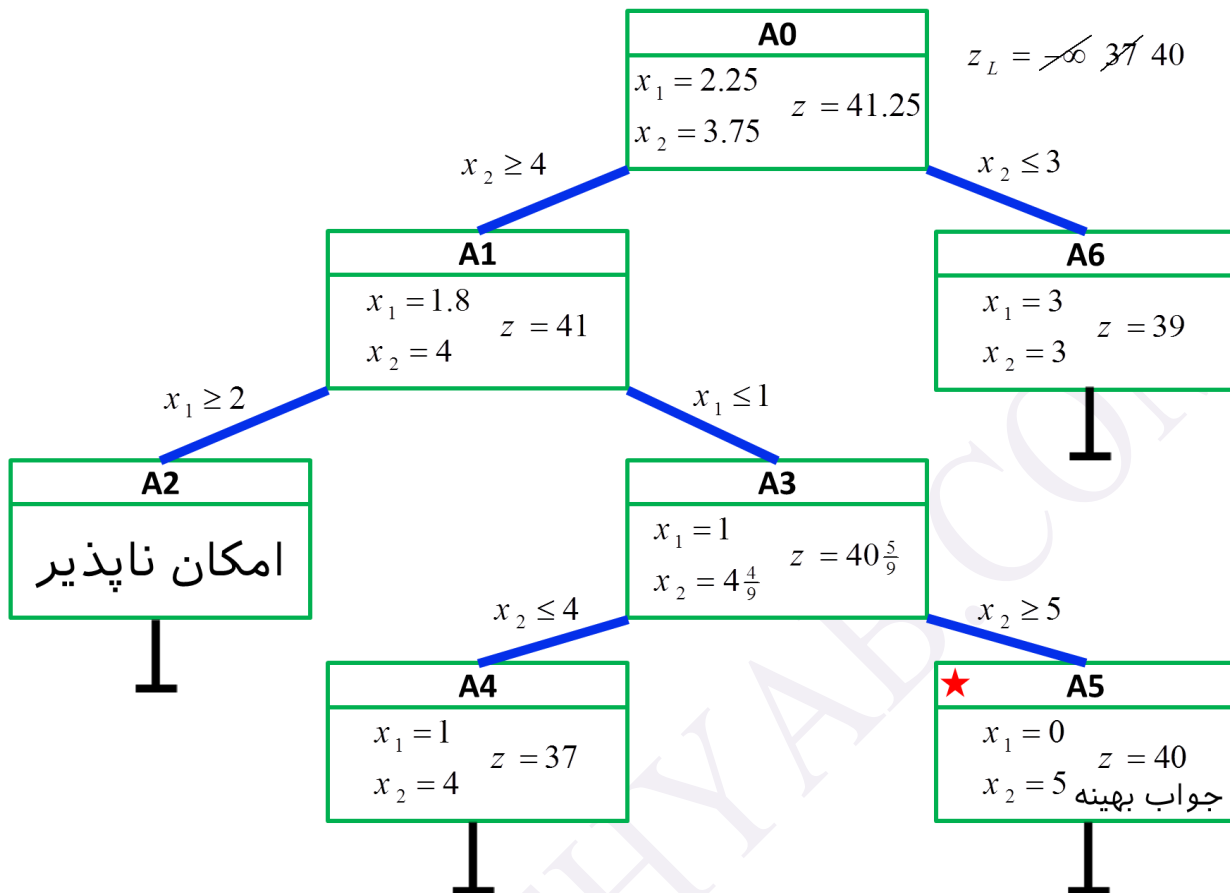
جدول بهینه

$$x_2 \leq 3 \rightarrow x_2 + s_1 = 3$$

A6								
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	³ / ₄	0	41.25
X ₁	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X ₂	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S ₁	3	0	0	1	0	0	1	3
Z	0	1	0	0	5/4	³ / ₄	0	41.25
X ₁	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X ₂	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S ₁	3	0	0	0	5/4	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	5	0	3	39
X ₁	1	0	1	0	1	0	-1	3
X ₂	2	0	0	1	0	0	1	3
X ₄	3	0	0	0	-5	1	-4	3

جدول بهینه

کلیه مراحل حل را می توان در درخت زیر نشان داد.



تمرین: برنامه ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

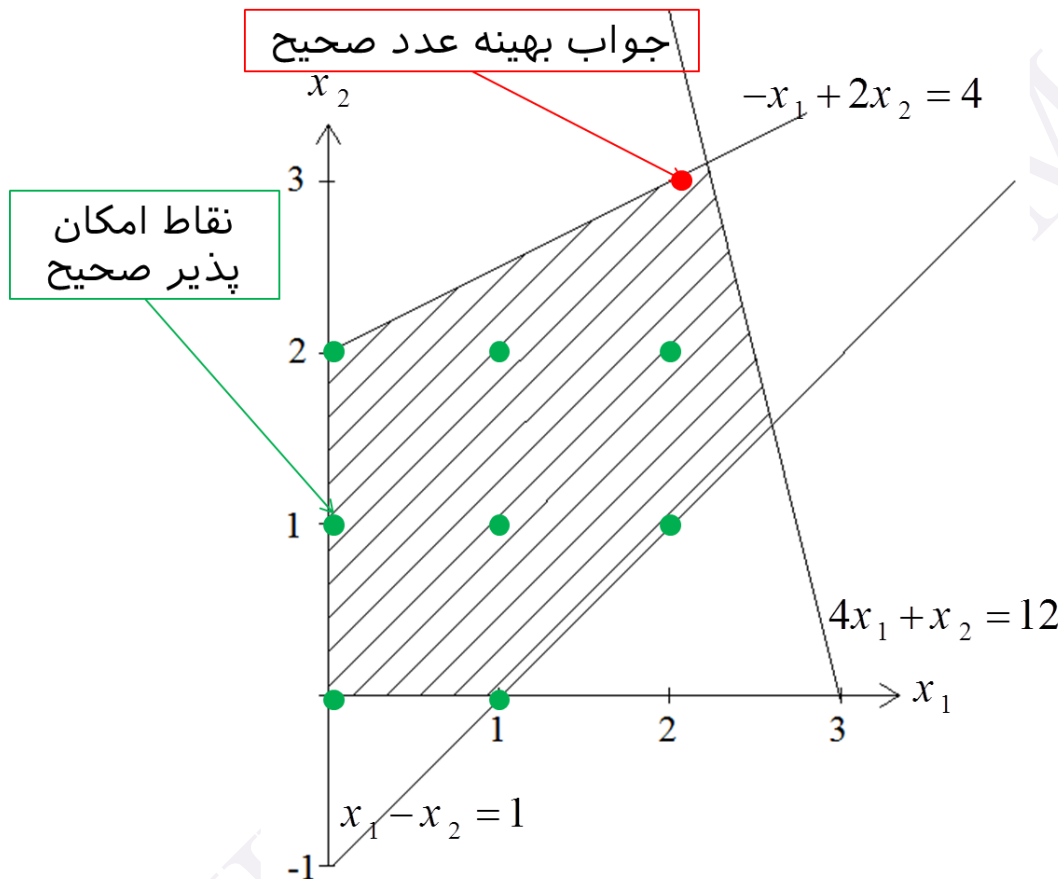
الف) این مسئله را به روش ترسیمی حل کنید.

ب) برنامه ریزی خطی آزاد شده آن را ترسیمی حل کنید. جواب حاصل را به نزدیک ترین جواب عدد

صحیح گرد کنید. آیا موجه است یا نه؟ آنگاه تمام جواب های گرد شده را محاسبه کنید (هر مقدار

غیر صحیح را به عدد بالاتر و پایین تر گرد کنید) و موجه بودن آن‌ها را بررسی کنید. آیا هیچ کدام از این جواب‌ها موجه هستند؟

حل: الف)



جواب بهینه $(x_1, x_2) = (2, 3)$ و $z = 13$ است.

ب) جواب بهینه مسئله آزاد شده خطی برابر با $(x_1, x_2) = (2.6, 1.6)$ با $z = 14.6$ است. نزدیکترین جواب عدد صحیح $(x_1, x_2) = (3, 2)$ است که امکان پذیر نیست. جواب‌های گرد شده به صورت زیر است:

مقدار تابع هدف	محدودیت های نقض شده	جواب های گرد شده
-	محدودیت 3	(3,2)
-	محدودیت های 2 و 3	(3,1)
12	هیچکدام	(2,2)
11	هیچکدام	(2,1)

از جدول فوق پیدا است که هیچ کدام از جواب های گرد شده، بهینه نیستند.

تمرین: مدل برنامه ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 25x_2$$

s.t.

$$-3x_1 + 30x_2 \leq 27$$

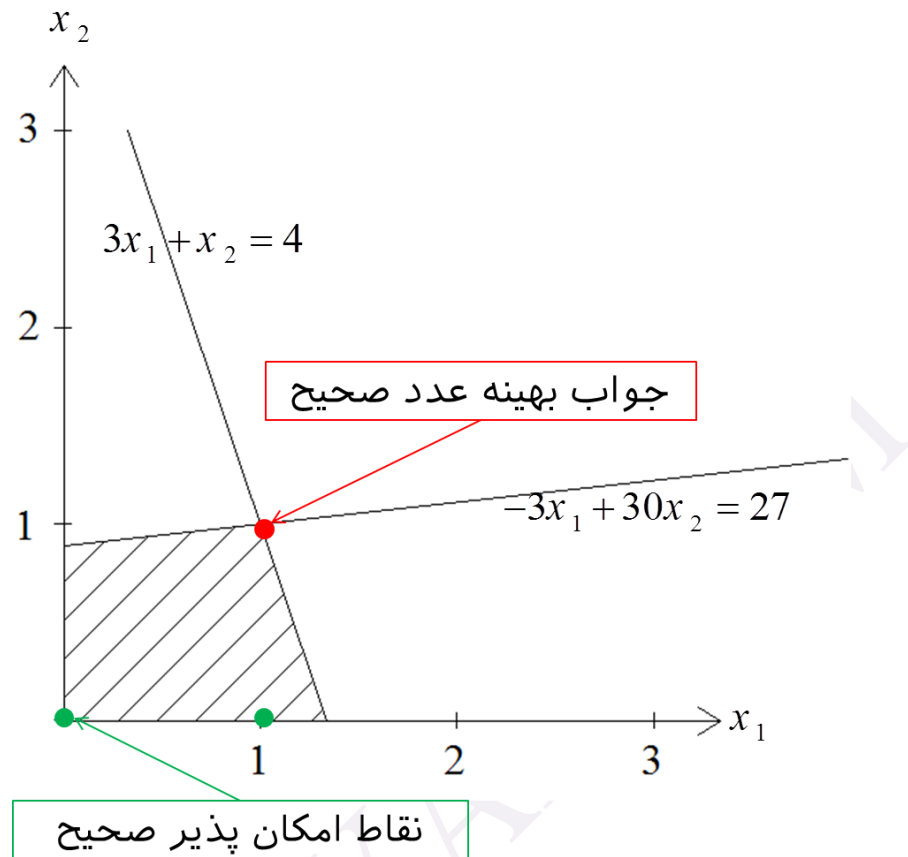
$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int.}$$

الف) این مسئله را به روش ترسیمی حل نمایید.

ب) برنامه ریزی خطی آزاد شده را به روش ترسیمی حل کنید. جواب حاصل را به نزدیکترین جواب عدد صحیح گرد کنید. آیا موجه است یا نه؟ آنگاه تمام جواب های گرد شده را محاسبه کنید و موجه بودن آنها را بررسی و مقدار تابع هدف مربوط به جواب های موجه را بدست آورید. آیا هیچکدام از این جواب ها بهینه است؟

حل:



جواب بهینه مدل فوق برابر با $(x_1, x_2) = (1, 1)$ است.

ب) جواب بهینه مسئله آزاد شده برابر با $(x_1, x_2) = (0, 0.9)$ است که نزدیکترین جواب صحیح $(x_1, x_2) = (0, 1)$ است که جوابی امکان ناپذیر است. نقطه گرده شده دیگر $(x_1, x_2) = (0, 0)$ است که امکان پذیر ولی بهینه نیست.

تمرین: با استفاده از الگوریتم شاخه و کرانه دودویی، مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را حل کنید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

s.t.

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}.$$

حل: برای حل مدل فوق از طریق الگوریتم اشاره شده می‌بایستی مدل فوق به فرم استاندارد زیر در بیاید.

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, n.$$

- تبدیل $\max$ به $\min$ و تغییر جهت علامت $\leq$ به $\geq$.

$$\text{Min } Z = -2x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 4x_5$$

s.t.

$$-3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 4x_5 \geq -6$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}.$$

- مثبت کردن ضرایب متغیرهای تابع هدف با تغییر متغیر $x_1 \rightarrow 1-x_1$, $x_3 \rightarrow 1-x_3$ و $x_5 \rightarrow 1-x_5$.

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 11$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}.$$

- تغییر ترتیب متغیرها به نحویکه $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. برای این منظور $x_1 \leftrightarrow x_5$, $x_3 \leftrightarrow x_4$ و $x_5 \leftrightarrow x_3$ در این صورت، مدل بهینه سازی به فرم استاندارد به صورت زیر در می‌آید.

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 11$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}.$$

آغاز فرایند حل:

تکرار ۰: $z_U = \infty$ و چون ضریب متغیرها در تابع هدف نامنفی است، لذا مقدار تابع هدف قطعا از ۱۱- بیشتر است و لذا می‌توان گفت که $z_L = -11$. چون جواب $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ در محدودیت‌ها ۱ و ۲ صدق نمی‌کند، لذا شرایط توقف برقرار نیست و باید گره x_1 به $x_1 = 1$ و $x_1 = 0$ شاخه شود.

تکرار ۱: جواب جزئی (0) بررسی شود.

$$\text{آزمون ۱: } -9+1 = z_L \not\geq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 3+5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1+4+2+2 \not\leq 5$$

در این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون ۳: چون $x_1 = 0$ است باید کنترل شوی که جواب $(0, 1, 0, 0, 0)$ امکان پذیر است یا نه؟

$$\text{constr1: } 3 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1 \not\leq 5$$

با این آزمون به ته نمی‌رسد.

تکرار ۲: جواب جزئی (0,0) بررسی می‌شود. این جواب به دلیل کمترین حد پایین انتخاب شده است.

$$\text{آزمون ۱: } -8 = z_L \not\geq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 4+2+2 \not\leq 5$$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0)$ کنترل شود.

$$\text{constr1: } 5 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 4 \not\leq 5$$

با این آزمون به ته نمی‌رسد.

تکرار ۳: جواب جزئی (1) را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } -9 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 2+3+5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1+1+4+2+2 \not\leq 5$$

آزمون ۳: جواب $(1,0,0,0,0)$ بررسی شود:

$$\text{constr1: } 2 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1 \not\leq 5$$

تکرار ۴: جواب جزئی $(0,0,0)$ انتخاب شود.

$$\text{آزمون ۱: } -7 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 2+2 < 5$$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار ۵: جواب $(1,0)$ انتخاب شود.

$$\text{آزمون ۱: } -7 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr 1: } 2+5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr 2: } 1+4+2+2 \not\leq 5$$

آزمون ۳: جواب $(1, 0, 1, 0, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr 1: } 2+5 \not\leq 8$$

$$\text{constr 2: } 1+4 \geq 5$$

این گره به ته نمی‌رسد.

تکرار ۶: جواب جزئی $(1, 0, 0)$ را در نظر بگیرید.

$$\text{آزمون ۱: } -6 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr 1: } 2+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr 2: } 1+2+2 \not\leq 5$$

آزمون ۳: جواب $(1, 0, 0, 1, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr 1: } 2+4 \not\leq 8$$

$$\text{constr 2: } 1+2 \not\leq 5$$

تکرار ۷: جواب جزئی $(0, 1)$ بررسی شود.

$$\text{آزمون ۱: } -6 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 2+5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1+4+2+2 \not\leq 5$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,0,0,0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 3 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1 \not\leq 5$$

تکرار ۸: جواب $(0,1,1)$ بررسی شود.

$$\text{آزمون ۱: } -6 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 3+5+4+7 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1+4+2+2 \not\leq 5$$

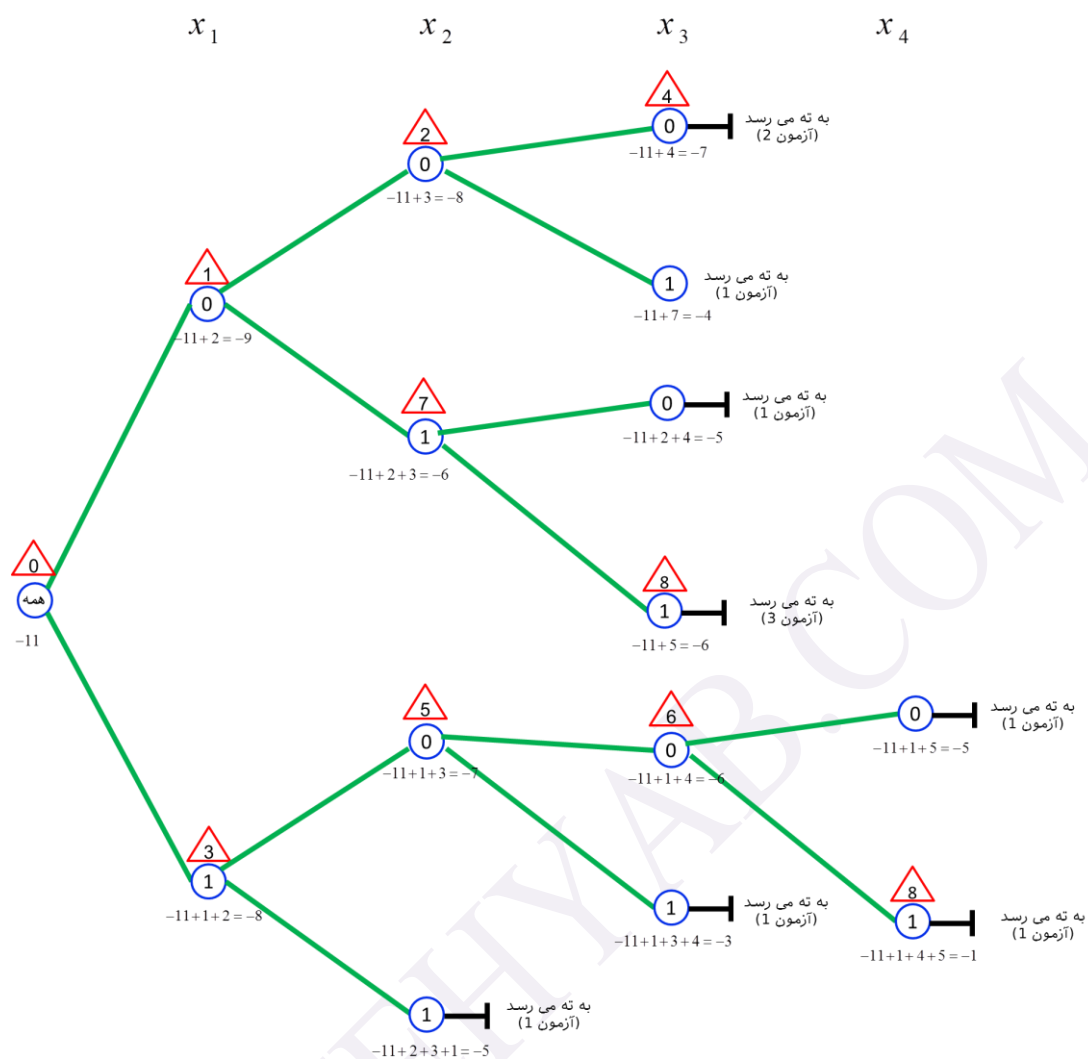
آزمون ۳: جواب $(0,1,1,0,0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 3+5 \not\leq 8$$

$$\text{constr2: } 1+4 \not\leq 5$$

این گره به ته می‌رسد. تمامی گره‌ها مورد بررسی قرار گرفت. جواب بهینه $x = (0,1,1,0,0)$ ، $z_U = -6$.

خلاصه نتایج الگوریتم در شکل زیر آمده است.



تمرین: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= -3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t. } & \\
 &5x_1 - 7x_2 \geq 3 \\
 &x_1 \leq 3 \\
 &x_2 \leq 3 \\
 &x_1, x_2 \geq 0, \text{int.}
 \end{aligned}$$

الف) مدل فوق را به صورت ترسیمی حل کنید.

ب) مدل فوق را به روش شاخه و کرانه مدل‌های برنامه‌ریزی مختلف حل نمایید. برای حل زیر مسائل

از روش ترسیمی استفاده کنید.

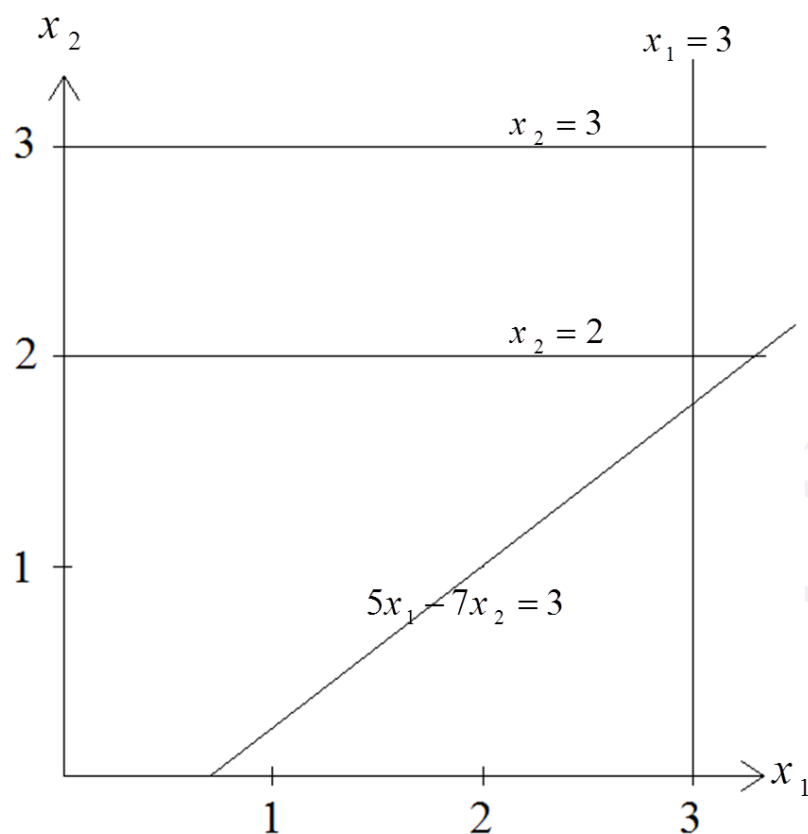
حل:

جواب بهینه بدون شرط صحیح بودن

جواب بهینه عدد صحیح

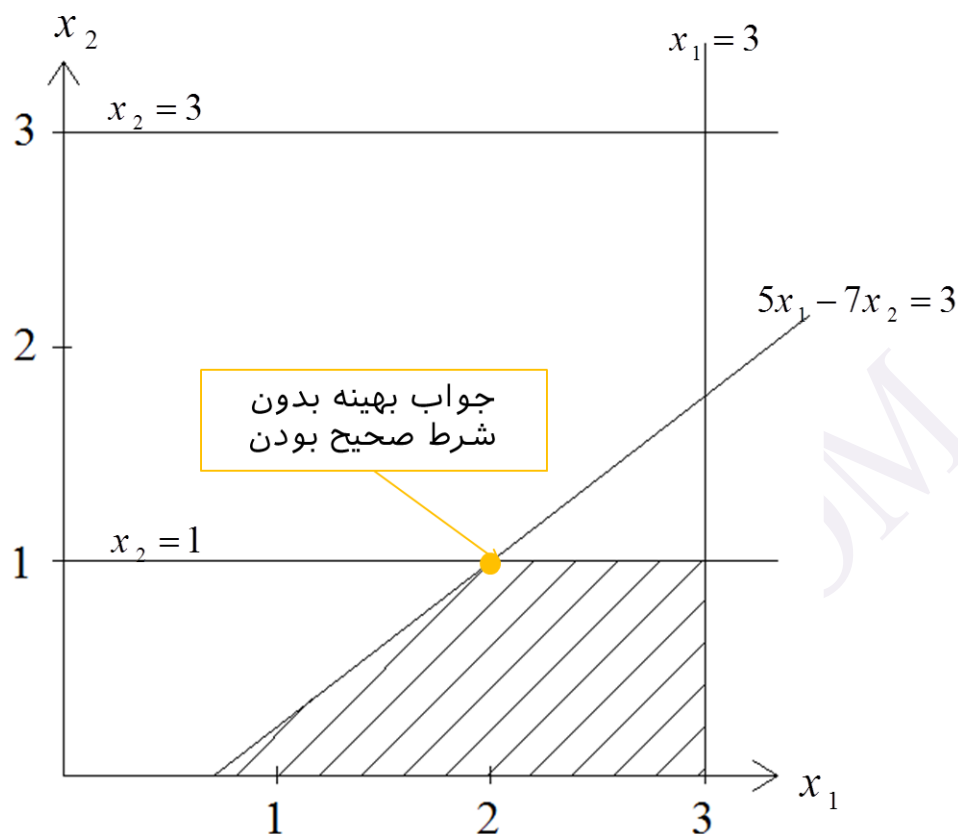
نقاط امکان پذیر صحیح

- شاخه $x_7 \geq 2$



این زیر مسئله امکان ناپذیر است. لذا گره $x_2 \geq 2$ بسته می شود.

شاخه $x_2 \leq 1$



جواب بهینه زیر مسئله $x_2 \leq 1$ ، برابر با $(x_1, x_2) = (2, 1)$ و $z = -1$ است و لذا این جواب مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح اصلی است.

پ) برای تبدیل مدل اولیه به یک برنامه‌ریزی دودویی، $x_1 = y_1 + 2y_2$ و $x_2 = s_1 + 2s_2$ در نظر بگیرید. لذا مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح اصلی به صورت زیر به فرم دودویی در می‌آید.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } -3(y_1 + 2y_2) + 5(s_1 + 2s_2) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \quad y_1 + 2y_2 \leq 3 \\
 & \quad s_1 + 2s_2 \leq 3 \\
 & \quad 5(y_1 + 2y_2) - 7(s_1 + 2s_2) \geq 3 \\
 & \quad y_1, y_2, s_1, s_2 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Max } -3y_1 - 6y_2 + 5s_1 + 10s_2$$

s.t.

$$5y_1 + 10y_2 - 7s_1 - 14s_2 \geq 3$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 3$$

$$s_1 + 2s_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2, s_1, s_2 \in \{0, 1\}$$

فرم Max به Min تبدیل می‌شود.

$$\text{Min } 3y_1 + 6y_2 - 5s_1 - 10s_2$$

s.t.

$$5y_1 + 10y_2 - 7s_1 - 14s_2 \geq 3$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 3$$

$$s_1 + 2s_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2, s_1, s_2 \in \{0, 1\}$$

برای تغییر علامت s_1 و s_2 ، تغییر متغیر $s_1 \rightarrow 1-s_1$ و $s_2 \rightarrow 1-s_2$ انجام می‌شود. با انجام این

تغییرات به مدل زیر می‌رسیم که می‌توان از روش شاخه و کرانه دودویی حل کرد.

$$\text{Min } 3y_1 + 5s_1 + 6y_2 + 10s_2 - 15$$

s.t.

$$5y_1 + 7s_1 + 10y_2 + 14s_2 \geq 24$$

$$-y_1 - 2y_2 \geq -3$$

$$s_1 + 2s_2 \geq 0$$

$$y_1, s_1, y_2, s_2 \in \{0, 1\}$$

برای حل مدل فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم.

تکرار ۰: $z_U = \infty$ و چون ضریب متغیرها نامنفی هستند، مقدار تابع هدف قطعا از ۱۵- بیشتر است و

لذا $z_L = -15$ است. چون $(0, 0, 0, 0)$ یک جواب امکان ناپذیر است لذا شرط توقف برقرار نیست. دو شاخه

$y_1 = 1$ و $y_1 = 0$ را در نظر بگیرید.

تکرار ۱: جواب جزئی (0) را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $-10 = z_L \not\leq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 7 + 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 1 + 2 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب $(0, 1, 0, 0)$ بررسی می شود.

$$\text{constr1: } 7 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 1 \geq 0$$

تکرار ۲: جواب جزئی $(0, 0)$ بررسی می شود.

آزمون ۱: $-9 = z_L \not\leq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 2 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب $(0, 0, 1, 0)$ بررسی می شود.

$$\text{constr1: } 10 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -2 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 0 \geq 0$$

تکرار ۳: جواب جزئی (1) بررسی می شود.

آزمون ۱: $-7 = z_L \not\leq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 7 + 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 3 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب $(1, 0, 0, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 5 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -1 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 0 \geq 0$$

تکرار ۴: جواب جزئی $(1, 0)$ بررسی می‌شود.

$$\text{آزمون ۱: } -6 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 5 + 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -1 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 2 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب $(1, 0, 1, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 15 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -3 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 0 \geq 0$$

تکرار ۵: جواب جزئی $(0, 0, 0)$ بررسی می‌شود.

$$\text{آزمون ۱: } -5 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 14 < 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 2 \not\leq 0$$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار ۶: جواب جزیی (0,1) بررسی می‌شود.

$$\text{آزمون ۱: } -4 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 7 + 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 1 + 2 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب (0,1,0,0) بررسی می‌شود.

$$\text{constr1: } 7 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } 0 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 0 \geq 0$$

تکرار ۷: جواب جزیی (1,0,0) بررسی می‌شود.

$$\text{آزمون ۱: } -2 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 5 + 14 < 24$$

$$\text{constr2: } -1 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 2 \not\leq 0$$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار ۸: جواب جزیی (1,1) بررسی می‌شود.

$$\text{آزمون ۱: } -1 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 5 + 7 + 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -1 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 1 + 2 \not\leq 0$$

آزمون ۳: جواب $(1, 1, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr1: } 5 + 7 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -1 \geq -3$$

$$\text{constr3: } 1 \geq 0$$

تکرار ۹: جواب جزئی $(0, 1, 0)$ بررسی می شود.

$$\text{آزمون ۱: } 0 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 7 + 14 < 24$$

$$\text{constr2: } 0 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 1 + 2 \not\leq 0$$

این گره به ته می رسد.

تکرار ۱۰: جواب جزئی $(0, 0, 1)$ بررسی می شود.

$$\text{آزمون ۱: } 1 = z_L \not\leq z_U = \infty$$

آزمون ۲:

$$\text{constr1: } 10 + 14 \not\leq 24$$

$$\text{constr2: } -2 \not\leq -3$$

$$\text{constr3: } 2 \not\leq 0$$

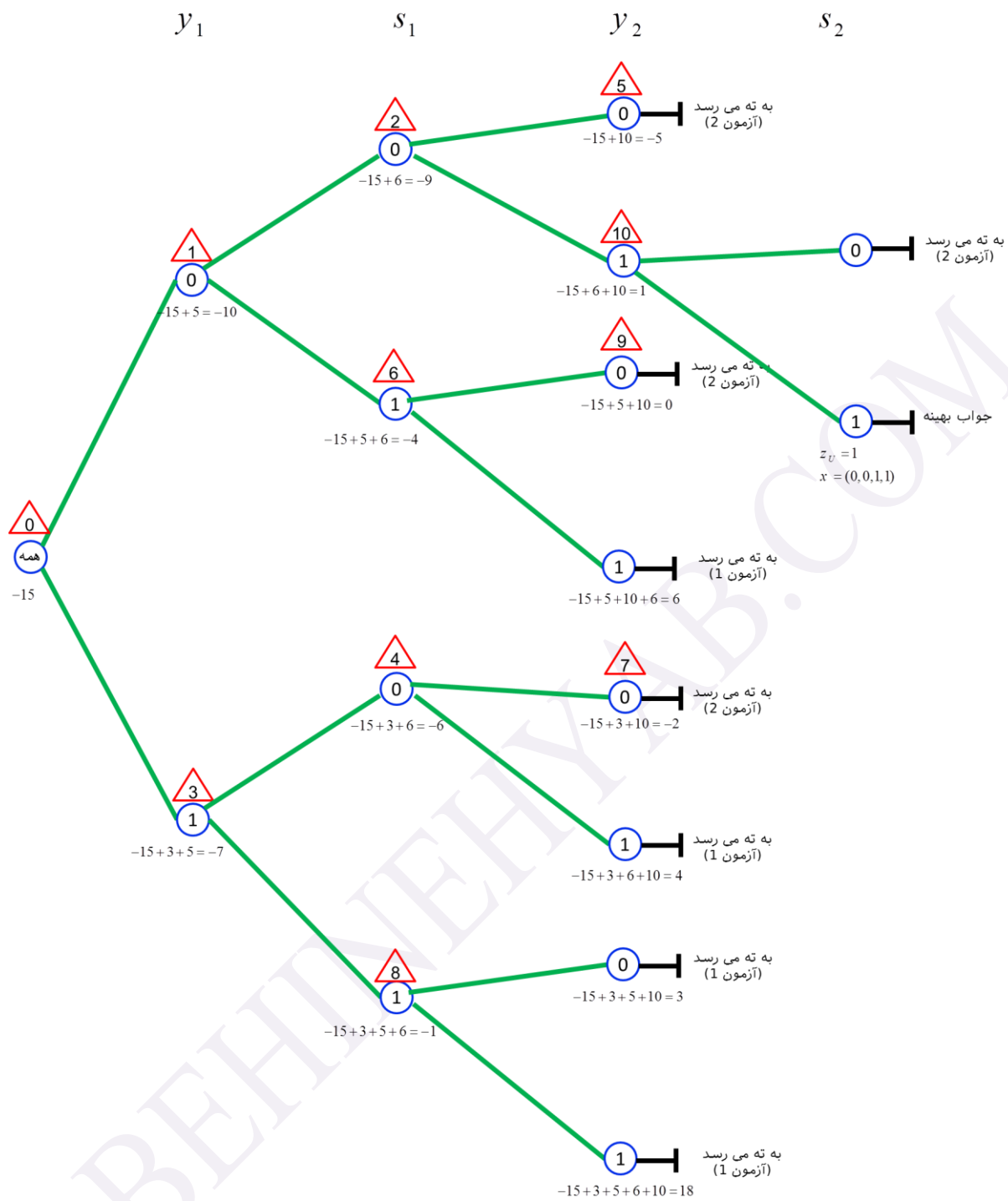
آزمون ۳: جواب $(0, 0, 1, 0)$ بررسی شود.

$$\text{constr 1: } 10 \not\leq 24$$

$$\text{constr 2: } -2 \geq -3$$

$$\text{constr 3: } 0 \geq 0$$

بعد از این گره به جواب کامل $x = (0, 0, 1, 1)$ و $z = 1$ می‌رسیم که بهترین جواب مسئله است. خلاصه محاسبات در شکل زیر آمده است.



تمرین: با استفاده از روش شاخه و کرانه، کارها را به افراد به نحوی تخصیص دهید که کل هزینه‌ها

کمینه شود:

کار \ افراد	1	2	3	4	5
A	39	65	69	66	57
B	64	84	24	92	22
C	49	50	61	31	45
D	48	45	55	23	50
E	59	34	30	34	18

حل:

تکرار صفر: این مسئله دارای $5! = 120$ ترکیب مختلف از جواب‌ها است. حد پایین این ۱۲۰ جواب را z_L می‌نامیم. برای تعیین حد پایین، جمع کردن حداقل‌های هزینه‌های تخصیص (یعنی اعداد حداقل ستون‌های جدول هزینه) در نظر گرفته می‌شود. در این مثال برابر با $39 + 34 + 24 + 23 + 18 = 138$ است. این جواب مربوط به (A, E, B, D, E) می‌باشد که یک جواب امکان‌ناپذیر است.

تکرار ۱: تا تخصیص کار ۱ به افراد آغاز می‌کنیم. کل جواب‌ها را به ۵ حالت تقسیم می‌کنیم. حد پایین تخصیص کار ۱ به افراد مختلف به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$z_L(1 \rightarrow A) = \overset{A}{39} + \overset{E}{34} + \overset{B}{24} + \overset{D}{23} + \overset{E}{18} = 138$$

$$z_L(1 \rightarrow B) = \overset{B}{64} + \overset{E}{34} + \overset{E}{30} + \overset{D}{23} + \overset{E}{18} = 169$$

$$z_L(1 \rightarrow C) = \overset{C}{49} + \overset{E}{34} + \overset{E}{30} + \overset{D}{23} + \overset{E}{18} = 154$$

$$z_L(1 \rightarrow D) = \overset{D}{48} + \overset{E}{34} + \overset{B}{24} + \overset{C}{31} + \overset{E}{18} = 155$$

$$z_L(1 \rightarrow E) = \overset{D}{59} + \overset{D}{45} + \overset{B}{24} + \overset{D}{23} + \overset{B}{22} = 173$$

تکرار ۲: از بین ۵ زیر مجموعه باقی ماند، زیر مجموعه A به دلیل کمترین حد پایین انتخاب می شود. این زیر مجموعه به AB, AC, AD و AE تقسیم می شود. حد پایین این ۴ زیر مجموعه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow B) = \overset{A}{39} + \overset{B}{84} + \overset{E}{30} + \overset{D}{23} + \overset{E}{18} = 194$$

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C) = \overset{A}{39} + \overset{C}{50} + \overset{B}{24} + \overset{D}{23} + \overset{E}{18} = 154$$

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow D) = \overset{A}{39} + \overset{D}{45} + \overset{B}{24} + \overset{C}{31} + \overset{E}{18} = 157$$

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E) = \overset{A}{39} + \overset{E}{34} + \overset{B}{24} + \overset{C}{23} + \overset{B}{22} = 142$$

از این چهار زیر مجموعه، دو جواب موجه ACBDE و ADBCE تولید می شود که جواب ACBDE بهترین جواب موجه فعلی می شود که $Z = 154$.

زیر مجموعه $1 \rightarrow A, 2 \rightarrow B$ که به اختصار با AB نشان داده می شود، به دلیل این که حد پایین آن از بهترین جواب موجه فعلی بیشتر است، بسته می شود ($194 > 154$). زیر مجموعه AE که باقی مانده است برای شاخه کردن انتخاب می شود.

تکرار ۳: مجموعه AE به سه زیر مجموعه AEB, AEC و AED تقسیم می شود. حد پایین این سه زیر مجموعه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow B) = \overset{A}{39} + \overset{E}{34} + \overset{B}{24} + \overset{D}{23} + \overset{C}{45} = 165$$

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow C) = \overset{A}{39} + \overset{E}{34} + \overset{C}{61} + \overset{D}{23} + \overset{B}{22} = 179$$

$$z_L(1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow D) = \overset{A}{39} + \overset{E}{34} + \overset{D}{55} + \overset{C}{31} + \overset{B}{22} = 181$$

سه جواب فوق موجه است ولی چون هزینه آنها از ۱۵۴ بیشتر هستند به ته می رسند.

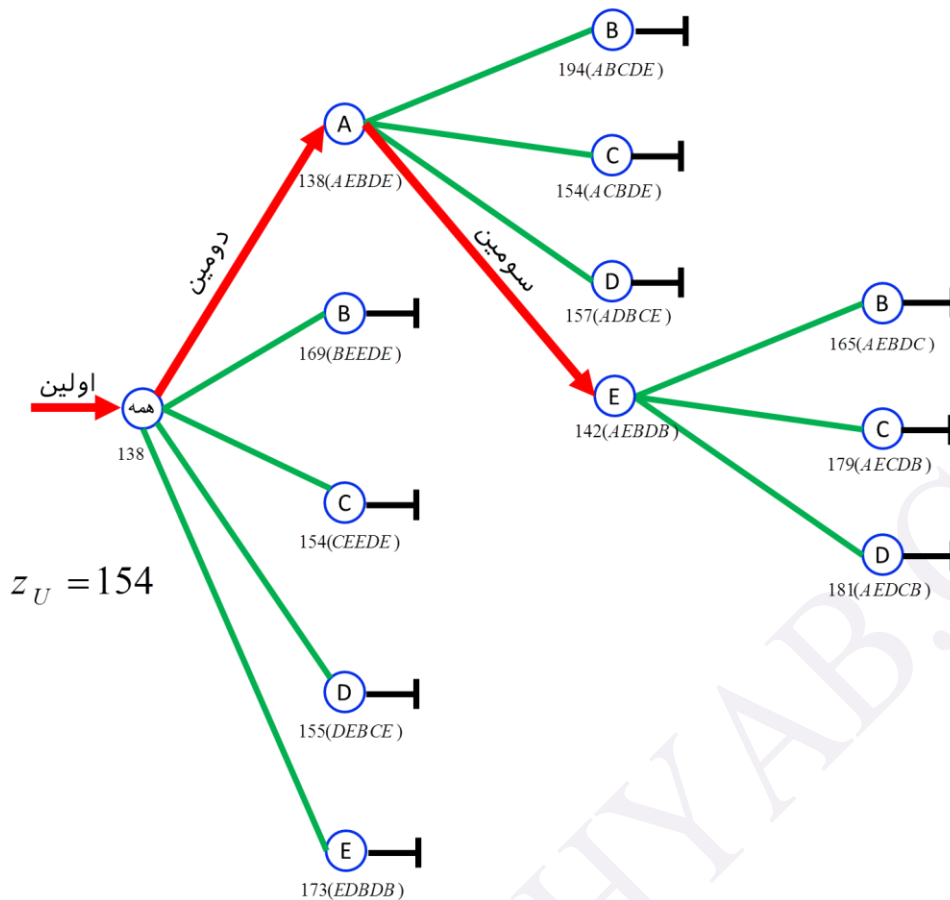
تمامی گره ها مورد بررسی قرار گرفتند. جواب بهینه برابر با $Z = 154$ و تخصیص کارها به افراد به صورت ACBDE می شود. خلاصه نتایج در شکل زیر آمده است.

شماره کار: 1

2

3

4&5



تمرین: مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } Z = 15x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$15x_1 + 5x_2 \geq 30$$

$$10x_1 + 10x_2 \geq 30$$

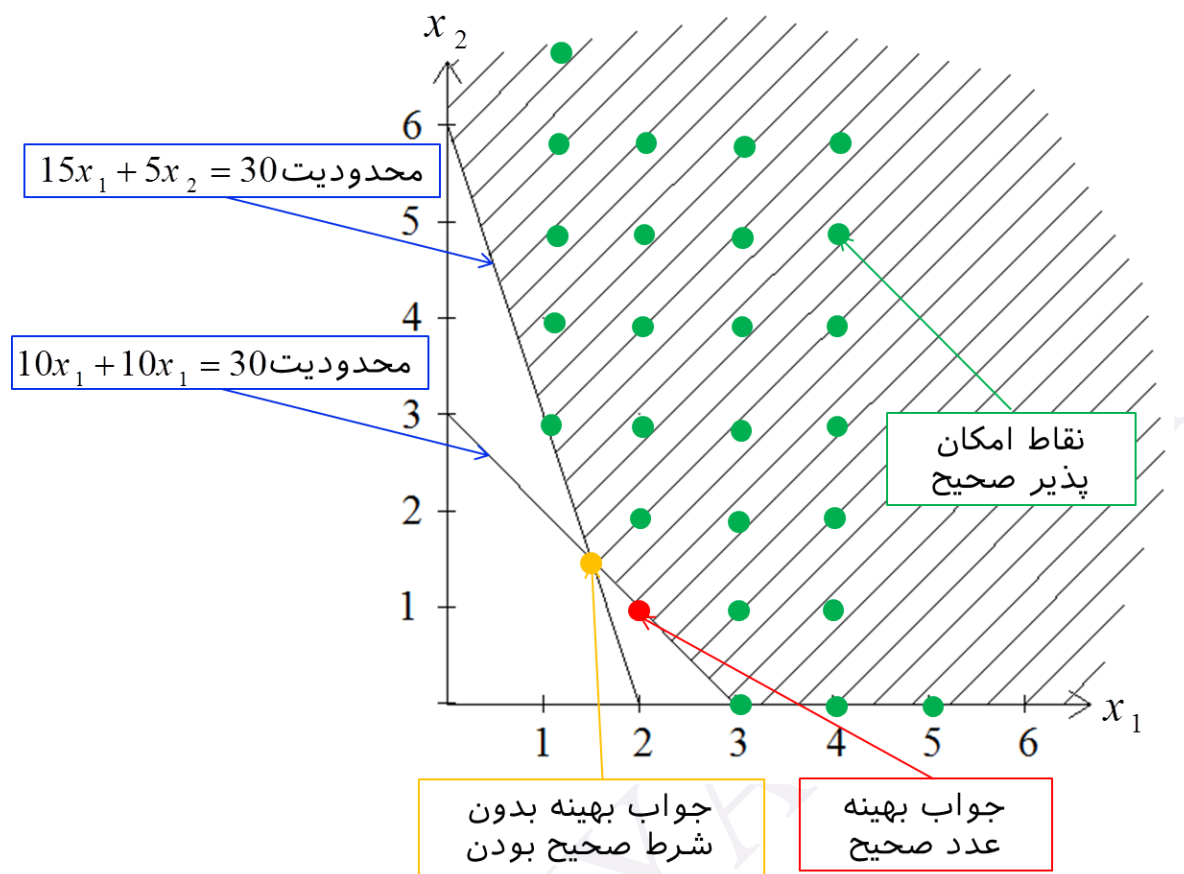
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int.}$$

الف) مسئله فوق را به روش ترسیمی حل نمایید.

ب) با الگوریتم شاخه و کرانه و با کمک روش ترسیمی مسئله فوق را حل نمایید.

حل:

الف) حل مدل فوق به روش ترسیمی به صورت زیر می‌شود.

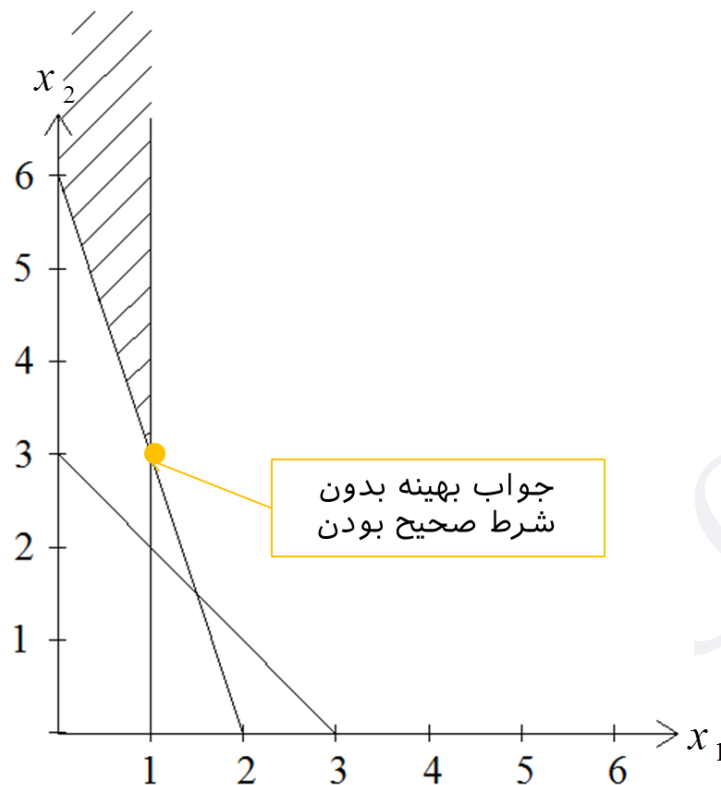


جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی آزاد شده برابر با $x = (1.5, 1.5)$ و $z = 37.5$ است. جواب بهینه

مسئله برنامه ریزی عدد صحیح برابر با $x = (2, 1)$ و $z = 40$ است.

ب) با توجه به این که $x = (1.5, 1.5)$ می شود، برای متغیر x_1 دو شاخه ایجاد می شود.

شاخه $x_1 \leq 1$:



جواب بهینه مسئله آزادشده با اضافه کردن محدودیت $x_1 \leq 1$ برابر با $(x_1, x_2) = (1, 3)$ و $z = 45$ می‌شود که با توجه به صحیح بودن متغیرها، یک جواب امکان پذیر مسئله اولیه است.

شاخه $x_1 \geq 2$:

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده با اضافه کردن محدودیت $x_1 \geq 2$ برابر با $(x_1, x_2) = (2, 1)$ و $z = 40$ می‌شود که جواب امکان پذیر برای مسئله اولیه است. از آن جاییکه شاخه‌ای باقی نمانده است، لذا جواب $(x_1, x_2) = (2, 1)$ و $z = 40$ جواب بهینه می‌شود.

تمرین: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{int.} \end{aligned}$$

مدل فوق را از روش شاخه و کرانه حل کنید.

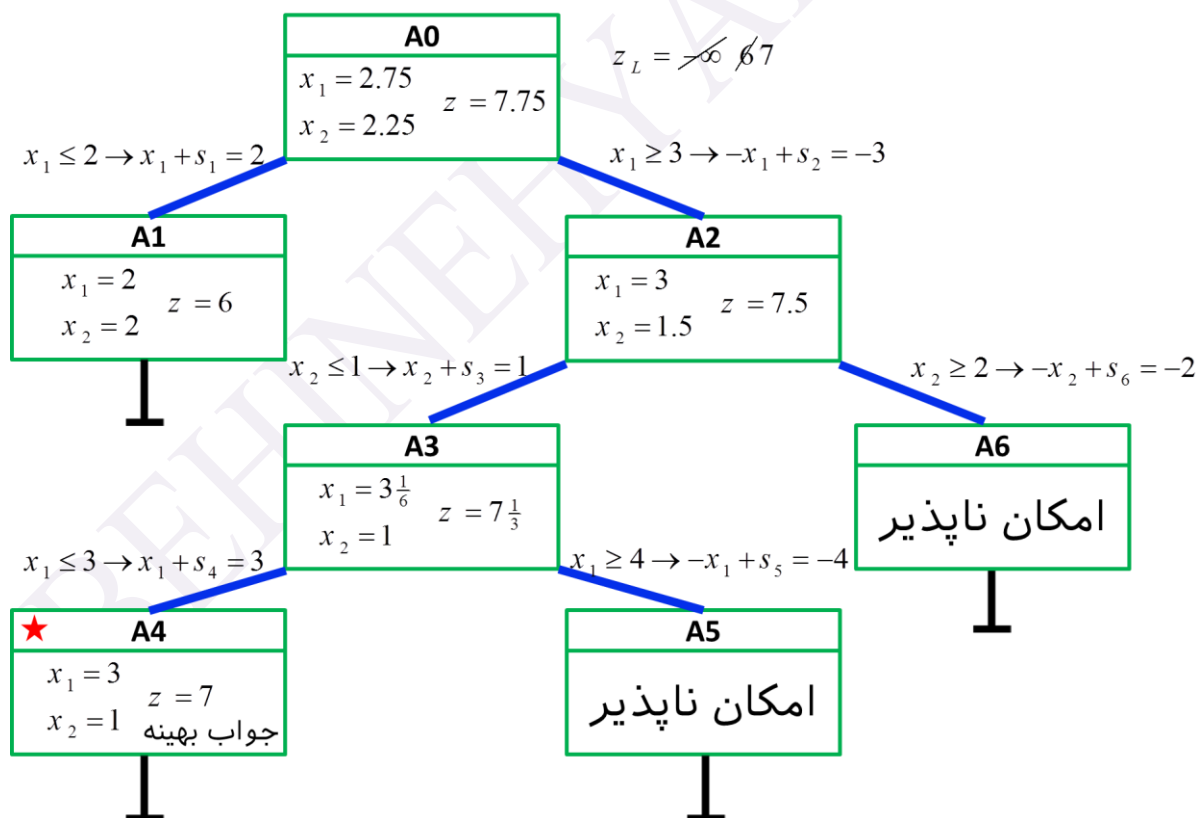
حل:

فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
 & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{int.}
 \end{aligned}$$

درخت شاخه و کرانه این مسئله به صورت زیر می‌شود. جزییات محاسباتی هر گره از این درخت در

ادامه آمده است.



A0									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0		0
X_3	1	0	1	1	1	0	0		5
X_4	2	0	-1	1	0	1	0		0
X_5	3	0	6	2	0	0	1		21
Z	0	1	0	-0.33	0	0	0.33		7
X_3	1	0	0	0.66	1	0	-0.166		1.5
X_4	2	0	0	1.33	0	1	0.166		3.5
X_1	3	0	1	0.33	0	0	0.166		3.5
Z	0	1	0	0	0.50	0	0.25	0	7.75
X_2	1	0	0	1	1.5	0	-0.25	0	2.25
X_4	2	0	0	0	-2	1	0.5	0	0.5
X_1	3	0	1	0	-0.5	0	0.25	0	2.75

جدول بهینه

A1									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0.50	0	0.25	0	7.75
X_2	1	0	0	1	1.5	0	-0.25	0	2.25
X_4	2	0	0	0	-2	1	0.5	0	0.5
X_1	3	0	1	0	-0.5	0	0.25	0	2.75
S_1	4	0	0	0	0	0	0	1	2
Z	0	1	0	0	1	0	0	1	7
X_2	1	0	0	1	1	0	0	-1	3
X_4	2	0	0	0	-1	1	0	2	-1
X_1	3	0	1	0	0	0	0	1	2
X_5	4	0	0	0	-2	0	1	-4	3
Z	0	1	0	0	0	1	0	3	6
X_2	1	0	0	1	0	1	0	1	2
X_3	2	0	0	0	1	-1	0	-2	1
X_1	3	0	1	0	0	0	0	1	2
X_5	4	0	0	0	0	-2	1	-8	5

جدول بهینه

A2									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0.50	0	0.25	0	7.75
X ₂	1	0	0	1	1.5	0	-0.25	0	2.25
X ₄	2	0	0	0	-2	1	0.5	0	0.5
X ₁	3	0	1	0	-0.5	0	0.25	0	2.75
S ₂	4	0	0	0	0	0	0	1	-3
Z	0	1	0	0	0.50	0	0.25	0	7.75
X ₂	1	0	0	1	1.5	0	-0.25	0	2.25
X ₄	2	0	0	0	-2	1	0.5	0	0.5
X ₁	3	0	1	0	-0.5	0	0.25	0	2.75
S ₂	4	0	0	0	-0.5	0	0.25	1	-0.25
Z	0	1	0	0	0	0	0.25	1	7.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	0.25	3	1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.25	-4	1.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	-1	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	-2	0.5

جدول بهینه

A3										
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₂	S ₃	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.25	1	0	7.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	0.25	3	0	1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.25	-4	0	1.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	-1	0	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	-2	0	0.5
S ₃	5	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	1	0	0	0	0	0.25	1	0	7.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	0.25	3	0	1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.25	-4	0	1.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	-1	0	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	-2	0	0.5
S ₃	5	0	0	0	0	0	-0.5	-3	1	-0.5
Z	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0.33	7.33
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0.166	0	-1.33	2.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0.166	0	-0.33	3.166
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.166	0	-0.66	0.833
S ₂	5	0	0	0	0	0	0.166	1	-0.33	0.166

جدول بهینه

A4											
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₂	S ₃	S ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0.33	0	7.33
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0.166	0	-1.33	0	2.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0.166	0	-0.33	0	3.166
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.166	0	-0.66	0	0.833
S ₂	5	0	0	0	0	0	0.166	1	-0.33	0	0.166
S ₄	6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3
Z	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0.33	0	7.33
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0.166	0	-1.33	0	2.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0.166	0	-0.33	0	3.166
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.166	0	-0.66	0	0.833
S ₂	5	0	0	0	0	0	0.166	1	-0.33	0	0.166
S ₄	6	0	0	0	0	0	-0.166	0	0.33	1	-0.166
Z	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	7
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	2.334
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	0	0	-0.33	-1	1
S ₂	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X ₅	6	0	0	0	0	0	1	0	-2	-6	1



جدول بهینه

A5											
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₂	S ₃	S ₅	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0.33	0	7.33
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0.166	0	-1.33	0	2.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0.166	0	-0.33	0	3.166
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.166	0	-0.66	0	0.833
S ₂	5	0	0	0	0	0	0.166	1	-0.33	0	0.166
S ₅	6	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0.33	0	7.33
X ₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X ₄	2	0	0	0	0	1	0.166	0	-1.33	0	2.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0.166	0	-0.33	0	3.166
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.166	0	-0.66	0	0.833
S ₂	5	0	0	0	0	0	0.166	1	-0.33	0	0.166
S ₅	6	0	0	0	0	0	0.166	0	-0.33	1	-0.833
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	0	0	1	6.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	1.5	0	0	3	-1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.5	0	0	-4	0.833
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	4
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	0	0	-2	2.5
S ₂	5	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
S ₃	6	0	0	0	0	0	-2	0	1	-3	2.5



جدول امکان
ناپذیر

A6										
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₂	S ₆	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.25	1	0	7.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	0.25	3	0	1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.25	-4	0	1.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	-1	0	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	-2	0	0.5
S ₆	5	0	0	-1	0	0	0	0	1	-2
Z	0	1	0	0	0	0	0.25	1	0	7.5
X ₂	1	0	0	1	0	0	0.25	3	0	1.5
X ₄	2	0	0	0	0	1	-0.25	-4	0	1.5
X ₁	3	0	1	0	0	0	0	-1	0	3
X ₃	4	0	0	0	1	0	-0.5	-2	0	0.5
S ₆	5	0	0	0	0	0	0.5	3	1	-0.5

جدول امکان
ناپذیرجواب بهینه برابر $x = (3, 1)$ و $z = 7$ است.**تمرین:** مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{int.}$$

مسئله فوق را به روش شاخه و کرانه حل کنید.

حل:

فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

s.t.

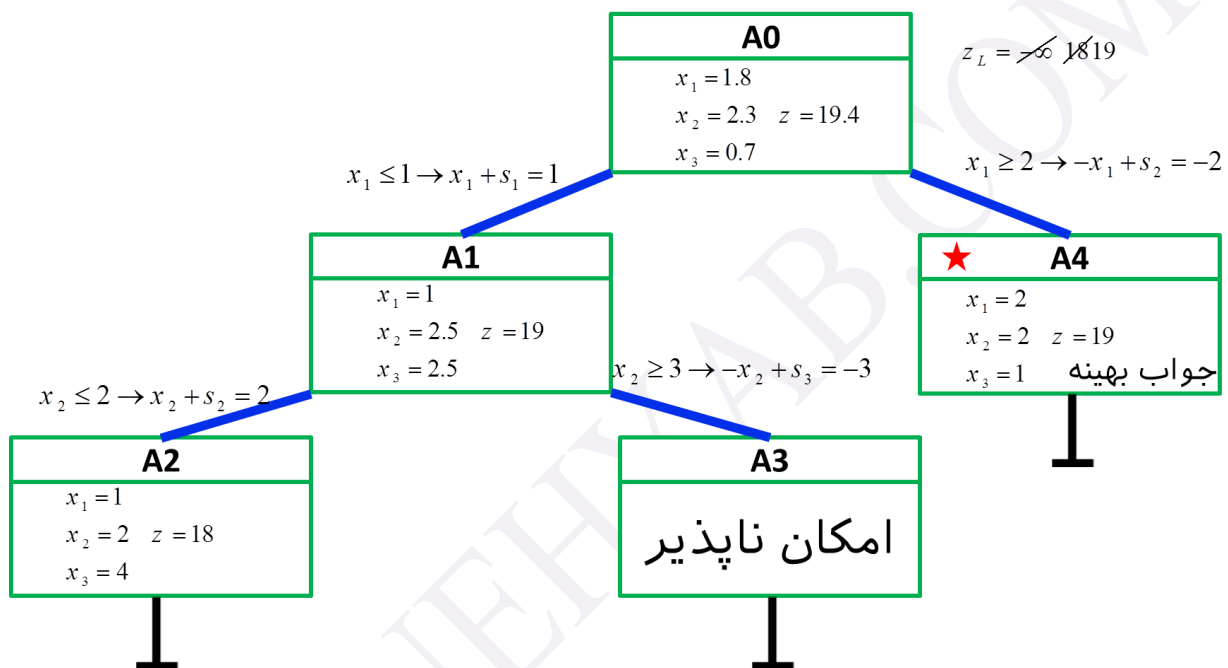
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 \leq 11$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 \leq 13$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \text{int.}$$

درخت شاخه و کرانه به صورت زیر می‌شود. جزییات محاسبات هر گره در ادامه آورده شده است.



A0									
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	طرف سمت راست
Z	0	1	-4	-5	-1	0	0	0	0
X ₄	1	0	3	2	0	1	0	0	10
X ₅	2	0	1	4	0	0	1	0	11
X ₆	3	0	3	3	1	0	0	1	13
Z	0	1	-2.75	0	-1	0	-1.25	0	13.75
X ₄	1	0	2.5	0	0	1	-0.5	0	4.5
X ₂	2	0	0.25	1	0	0	0.25	0	2.75
X ₆	3	0	2.25	0	1	0	-0.75	1	4.75
Z	0	1	0	0	-1	1.1	0.7	0	18.7
X ₁	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	2.3
X ₆	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0.7
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	19.4
X ₁	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	2.3
X ₃	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0.7

جدول بهینه

A1

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	S ₁	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	0	19.4
X ₁	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	0	2.3
X ₃	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0	0.7
S ₁	4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	0	19.4
X ₁	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	0	1.8
X ₂	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	0	2.3
X ₃	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0	0.7
S ₁	4	0	0	0	0	-0.4	0.2	0	1	-0.8
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	1	0.5	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0.25	0	-0.25	2.5
X ₃	3	0	0	0	1	0	-0.75	1	-2.25	2.5
X ₄	4	0	0	0	0	1	-0.5	0	2.5	2

جدول بهینه

A2

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	S ₁	S ₂	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0.25	0	-0.25	0	2.5
X ₃	3	0	0	0	1	0	-0.75	1	-2.25	0	2.5
X ₄	4	0	0	0	0	1	-0.5	0	2.5	0	2
S ₂	5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	19
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0.25	0	-0.25	0	2.5
X ₃	3	0	0	0	1	0	-0.75	1	-2.25	0	2.5
X ₄	4	0	0	0	0	1	-0.5	0	2.5	0	2
S ₂	5	0	0	0	0	0	-0.25	0	0.25	1	-0.5
Z	0	1	0	0	0	0	0	1	0.8	1.2	18
X ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
X ₂	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2
X ₃	3	0	0	0	1	0	0	1	-3	-3	4
X ₄	4	0	0	0	0	1	0	0	2	-2	3
X ₄	5	0	0	0	0	0	1	0	-1	-4	2

جدول بهینه

A3

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	19
X_1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	0	0.25	0	-0.25	0	2.5
X_3	3	0	0	0	1	0	-0.75	1	-2.25	0	2.5
X_4	4	0	0	0	0	1	-0.5	0	2.5	0	2
S_1	5	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-3
Z	0	1	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	19
X_1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	0	0.25	0	-0.25	0	2.5
X_3	3	0	0	0	1	0	-0.75	1	-2.25	0	2.5
X_4	4	0	0	0	0	1	-0.5	0	2.5	0	2
S_3	5	0	0	0	0	0	0.25	0	-0.25	1	-0.5
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	0	2	18
X_1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	4	-2
X_2	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	3
X_3	3	0	0	0	1	0	-3	1	0	-9	7
X_4	4	0	0	0	0	1	2	0	0	10	-3
S_1	5	0	0	0	0	0	-1	0	1	-4	2

جدول امکان پذیر

A4

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	0	19.4
X_1	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	0	2.3
X_3	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0	0.7
S_2	4	0	-1	0	0	0	0	0	1	-2
Z	0	1	0	0	0	0.2	0.4	1	0	19.4
X_1	1	0	1	0	0	0.4	-0.2	0	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	-0.1	0.3	0	0	2.3
X_3	3	0	0	0	1	-0.9	-0.3	1	0	0.7
S_2	4	0	0	0	0	0.4	-0.2	0	1	-0.2
Z	0	1	0	0	0	1	0	1	1	19
X_1	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	2
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	0	1.5	2
X_3	3	0	0	0	1	-1.5	0	1	-1.5	1
X_5	4	0	0	0	0	-2	1	0	-5	1

جدول بهینه

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**