درس ۱۲: روش حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح: روش شاخه و کرانه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر شمارا باشد که با کنترل تمامی *آن‌ها* می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای n متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n=10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n=20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n=30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود که حتی سریعترین کامپیوترها قادر به شمارش تمامی‌جواب‌ها نخواهند بود. حال اگر تعداد متغیرها از مقیاس میلیون باشند، دشوار به سرعت است بیشتر می‌شود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

۲) ساختار مسئله

همان طور که ملاحظه می‌شود تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از انجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملا بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش ممکن است برای حل برخی از مسائل کاربردی که مقدار بسیار بزرگی دارند مناسب باشد. ولی این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱-شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲-شاید جواب گره شده دیگر بهینه نباشد.

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 10x_2 \le 20 \\
&\qquad x_1 \le 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله فوق، $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, z = 11$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

متداول ترین الگوریتم برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، روش انشعاب و تحدید یا شاخه و کرانه (*Branch and Bound*) است که نکته اصلی در آن، شمارش ضمنی جواب‌های موجه است. در ادامه این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش شاخه و کرانه Branch and Bound

چون تعداد جواب‌های موجه یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح محدود، متناهی است، لذا طبیعی است که برای پیدا کردن جواب بهینه آن از روش شمارش (*enumeration procedure*) استفاده شود. همان طور که گفته شد، چون تعداد جواب‌ها بسیار زیاد است، هر روش شمارش باید به صورت آگاهانه طوری طراحی شود که درصد کمی از جواب‌ها را مورد بررسی قرار دهد.

مبنای روش شاخه و کرانه به شرح زیر است:

فرض کنید تابع هدف مسئله مورد نظر باید حداقل شود و مقدار تابع هدف نیز از مقدار مشخصی که آن را حد بالا (*Upper Bound*) (با z_u نشان داده می‌شود) تجاوز نمی‌کند. این حد بالا معمولا مقدار تابع هدف به ازای بهترین جواب موجهی است که تاکنون پیدا شده است. منطقه جواب به چند زیر مجموعه منشعب می‌شود. آنگاه حد پایین هر زیر مجموعه (z_L) بدست می‌آید. این حد پایین به این معنا است که از z_L از z_u بیشتر باشد از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه که جواب موجه ندارد و یا این که بهترین جواب

موجه آن یافته شده است، از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه‌ای که به هر کدام از دلایل فوق حذف شوند به ته رسیده یا *fathomed* گفته می‌شود. وقتی یک مجموعه به ته می‌رسد، یکی دیگر از مجموعه‌های باقی مانده که مثلا بهترین حد را دارند انتخاب می‌شود. در عمل شاخه شدن بر روی آن انجام می‌شود. این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که جواب موجهی بدست آید که مقدار تابع هدف آن از حد پایینی هیچکدام از زیر مجموعه‌های باقی مانده بیشتر نباشد و چنین جوابی، جواب بهینه است.

الگوریتم روش شاخه و کرانه

در ادامه خلاصه روش شاخه و کرانه به صورت الگوریتمی بیان می‌شود:

قدم ابتدایی: $z_U = \infty$. کل جواب‌های مورد بحث را به عنوان زیر مجموعه موجود در نظر بگیرید.

قدم انشعاب (*Branch step*): یکی از زیر مجموعه‌های باقی مانده (یک زیر مجموعه که نه به ته رسیده و نه منشعب شده است) را برای انشعاب انتخاب کنید. آن گاه زیر مجموعه انتخاب شده را به دو تا چند زیر مجموعه تقسیم کنید.

قدم تحدید (*Bound step*): حد پایینی مقدار تابع هدف (z_L) را برای این زیر مجموعه تعیین کنید.

قدم به ته رسیدن (*fathoming step*): هر زیر مجموعه جدید که دارای یکی از شرایط زیر باشد، از بررسی بیشتر کنار گذاشته می‌شود.

آزمون ۱: $z_L \geq z_U$

آزمون ۲: زیر مجموعه مورد نظر شامل هیچ جواب موجهی نیست.

آزمون ۳: بهترین جواب موجه این زیر مجموعه مشخص شده است. اگر $z_L < z_U$ باشد، این جواب جایگزین بهترین جواب موجود می‌شود و $z_U = z_L$ و سپس آزمون ۱ برای باقی گره‌ها انجام می‌شود.

قدم بهینگی: هنگامی‌که زیر مجموعه دیگری برای انشعاب باقی نمانده است، توقف کنید. بهترین جواب موجه همان جواب بهینه است. در غیر این صورت، به قدم انشعاب بروید.

مثال: مسئله تخصیص کار به نفر زیر را در نظر بگیرید. هدف این است که هر کدام از کارها منحصرا به یکی از چهار نفر طوری تخصیص داده شود که مجموع هزینه‌های انجام شده حداقل شود.

نفر	1	2	3	4
A	9	5	4	5
B	4	3	5	6
C	3	1	3	2
D	2	4	2	6

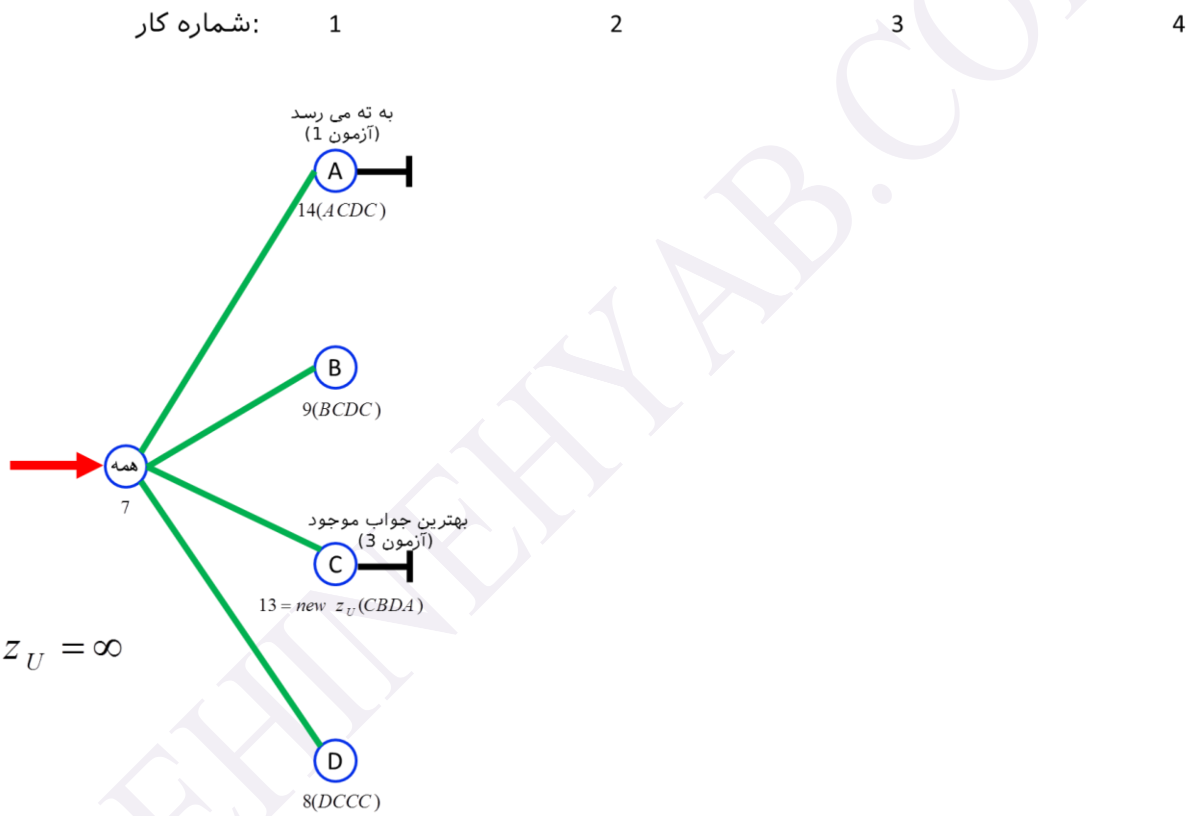
حل:

تکرار صفر: این مسئله دارای $4!=24$ ترکیب مختلف از جواب‌ها است. حد پایین این ۲۴ جواب را با z_L نشان می‌دهیم. برای چنین حد پایینی، جمع کردن حداقل‌های ممکن هزینه‌های تخصیص (یعنی مجموع اعداد حداقل ستون‌های جدول هزینه) در نظر گرفته می‌شود که در این مثال برابر با $2+1+2+2=7$ می‌شود. این جواب مربوط به تخصیص $DCDC$ است که واضحا یک جواب غیرموجه است.

تکرار۱: با تخصیص کار ۱ به هر کدام از افراد آغاز می‌کنیم و کل جواب‌ها را به ۴ زیر مجموعه تخصیص می‌دهیم. برای مثال، حد پایین z_L برای تخصیص کار ۱ به نفر A برابر با $(2+2+1)+9=14$ می‌شود. به این صورت که ۹ هزینه تخصیص کار ۱ به نفر A است و حداقل هزینه‌ها برای مابقی کارها به شرط این که به فرد A دیگر کاری تخصیص داده نشود. حد پایین برای کار ۱ به نفر B، برابر با $(2+2+1)+4=9$

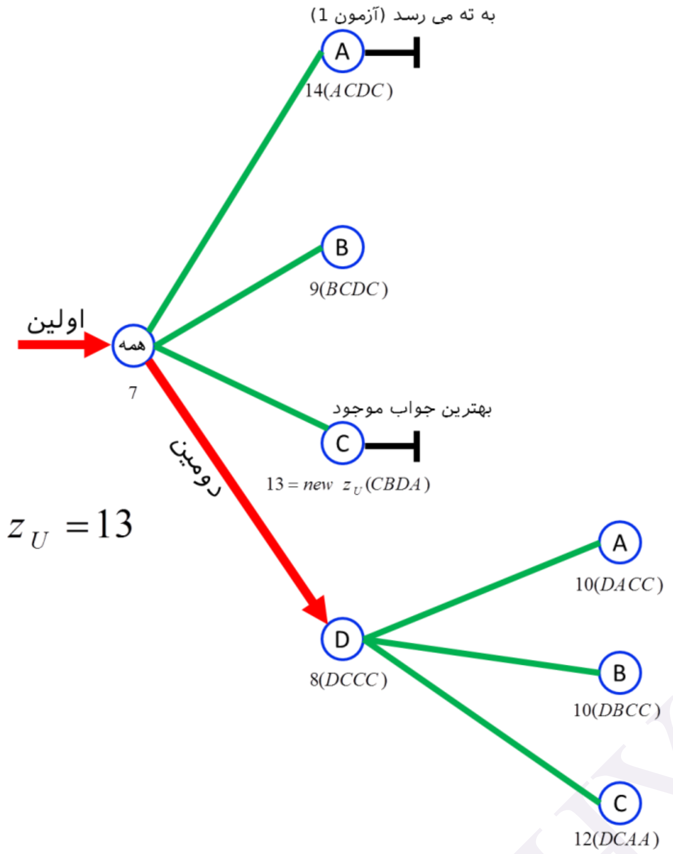
می‌شود. برای تخصیص کار ۱ به فرد *C*، حد پایین برابر $13=3+(3+2+5)$ می‌شود. برای تخصیص کار ۱ به فرد *D*، z_L برابر با $8=2+(1+3+2)$ می‌شود.

چون z_L برای زیر مجموعه *C*، منجر به جواب موجه $CBDA$ می‌شود، لذا حد بالایی جواب بهینه نیز به صورت $z_U=13$ به هنگام می‌شود و $CBDA$ جواب بهینه فعلی می‌شود. طبق آزمون ۳، زیر مجموعه *C* به ته می‌رسد. با توجه به آزمون ۱، زیر مجموعه *A* به ته می‌رسد و لذا تنها دو مجموعه *B* و *D* برای انشعاب باقی می‌ماند. خلاصه نتایج در شکل زیر آمده است.

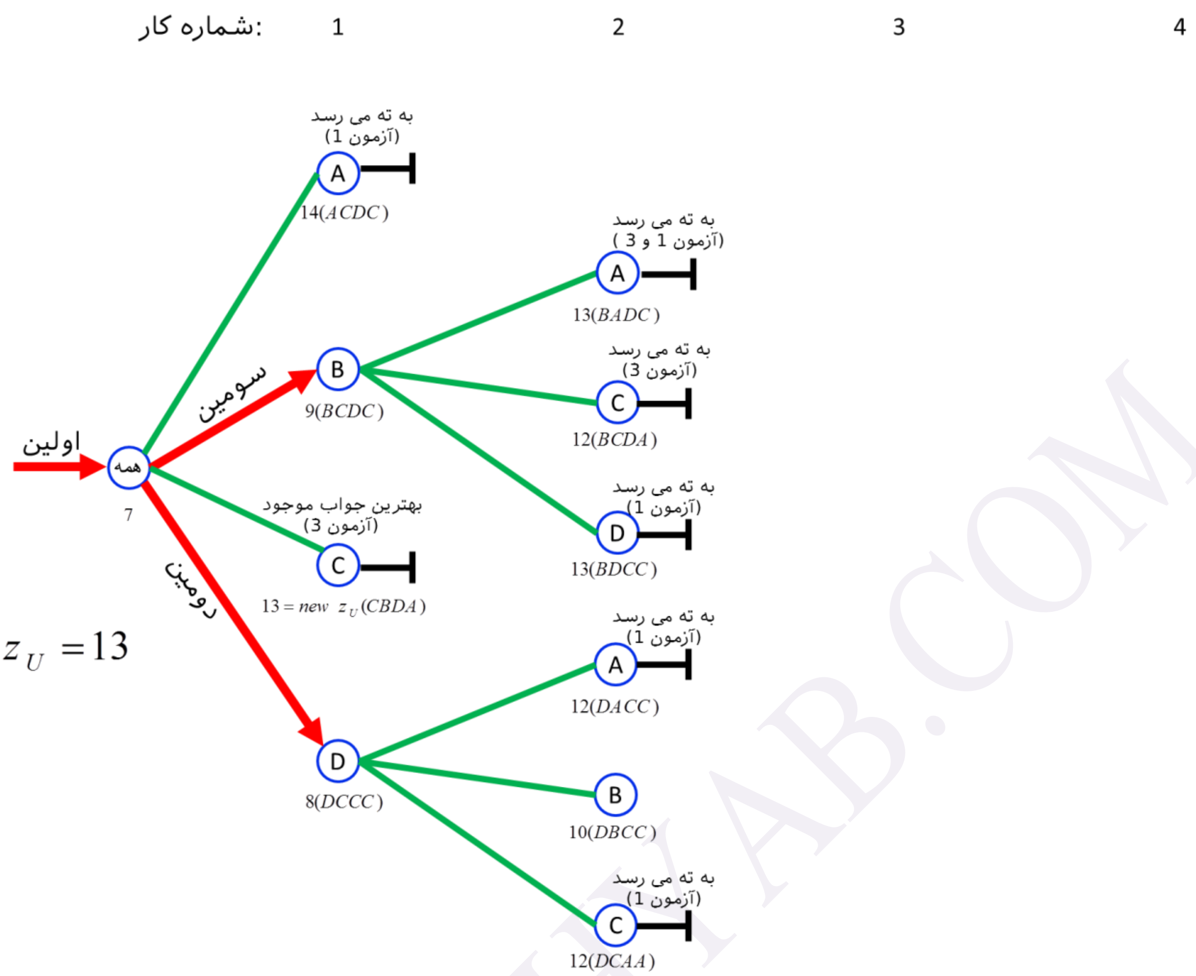


تکرار ۲: از بین دو زیر مجموعه باقی مانده، زیر مجموعه *D* به دلیل این که کمترین حد پایین را دارد انتخاب می‌شود. به این اصل، اصل بهترین حد گفته می‌شود. در این زیر مجموعه که کار ۱ به فرد *D* تخصیص داده می‌شود و در این زیر مجموعه، می‌توان ۳ زیر مجموعه *DA*، *DB*، و *DC* منشعب کرد که حد پایین به ترتیب برابر با ۱۲، ۱۰، و ۱۲ می‌شود. برای این سه زیر مجموعه، هیچ یک از آزمون‌های توقف برقرار نیست. لذا زیر مجموعه‌های باقی مانده عبارتند از *B*، *DA*،*DB* و *DC*. نتایج این تکرار در شکل زیر آمده است.

شماره کار: 1 2 3 4

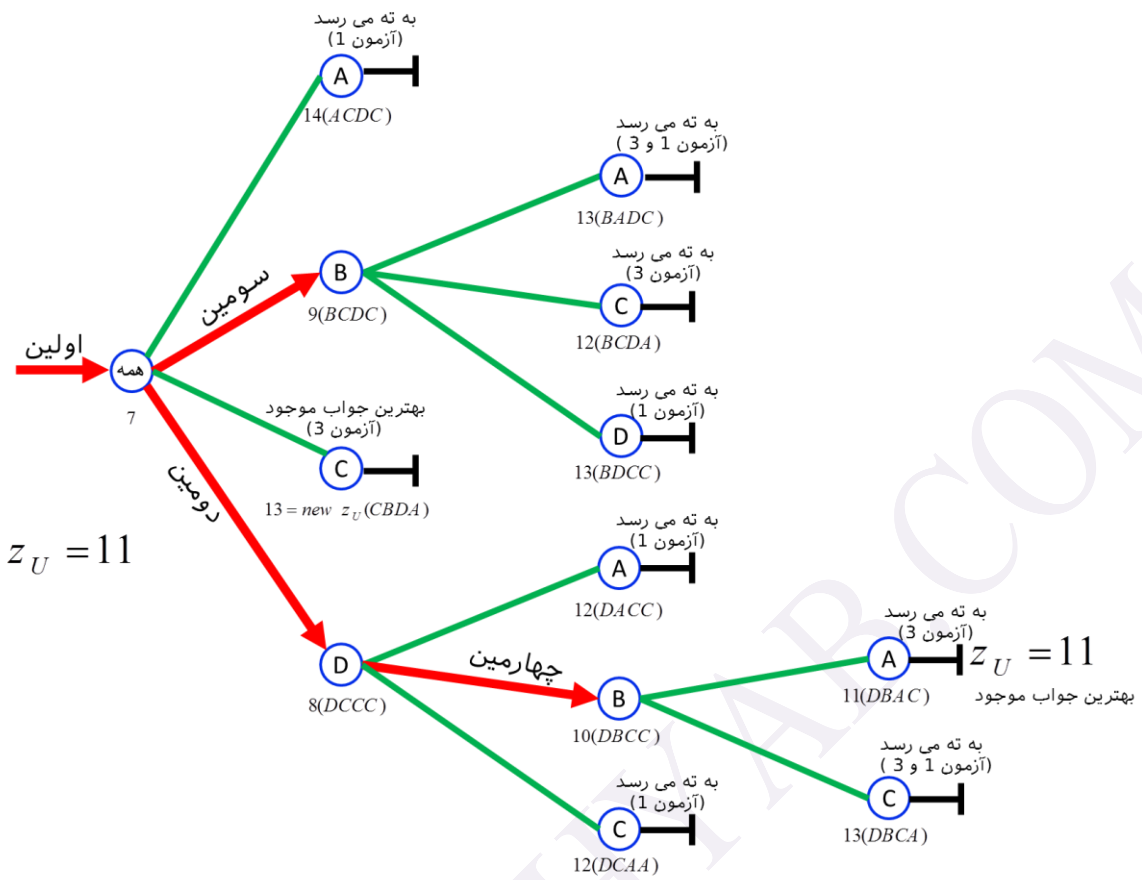


تکرار۳: از بین چهار زیر مجموعه باقی مانده، زیر مجموعه *B* به دلیل کمترین حد پایین انتخاب می‌شود و انتخاب به سه زیر مجموعه *BD* ،*BC*،*BA* منشعب می‌شود. حد پایین *آن‌ها* به ترتیب برابر با $4+5+(2+2)=13$ ، $4+1+(2+5)=12$ و $4+4+(3+2)=13$ خواهد بود. چون زیر مجموعه‌های *BA* و *BC* جواب‌های موجه هستند و حد پایین زیر مجموعه‌های *BA* و *BD* برابر حد بالای هستند، لذا هر سه زیر مجموعه به ته می‌رسند. همچنین چون زیر مجموعه *BC* یک جواب موجه است مقدار تابع هدف در آن از z_U فعلی کمتر است، لذا جواب *BCDA* بهترین جواب موجه جدید محسوب می‌شود. از آن جاییکه $z_U = 12$ برابر با z_L زیر مجموعه‌های *DA* و *DC* است، لذا این دو مجموعه نیز به ته می‌رسد. بنابراین، تنها زیر مجموعه‌ای که تا این لحظه به جا مانده است، *DB* است. نتایج این تکرار در شکل زیر آمده است.



<u>تکرار ۴</u>: تنها زیر مجموعه باقی مانده، *DB* است که به زیر مجموعه‌های *DBA* و *DBC* تقسیم می‌شود. حد پایین *آن‌ها* به ترتیب $2+3+4+(2)=11$ و $2+3+3+(5)=13$ است. چون این دو حد مربوط به جواب‌های موجه می‌شوند، لذا هر دو زیر مجموعه به ته می‌رسند. علاوه بر این‌ها، جواب موجه *DBAC* مربوط به زیر مجموعه *DBA* از بهترین جواب موجود بهتر است ($11<12$)، لذا این جواب (*DBAC*) به عنوان جواب جدید انتخاب می‌شود. چون زیر مجموعه‌ای دیگر که هنوز به ته نرسیده باشد، باقی نمانده است، لذا بهترین جواب موجه (یعنی *DBAC*)، جواب بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد. خلاصه محاسبات این تکرار در شکل زیر آمده است.

شماره کار: 1 2 3 4



در مثال فوق، از قاعده بهترین حد برای انتخاب شاخه‌ها استفاده شد. قاعده دیگر در انتخاب شاخه روش جدیدترین حد است که از جدیدترین حد بدست آمده برای شاخه کردن استفاده می‌شود.

الگوریتم شاخه و کرانه برای برنامه‌ریزی صفر و یک

همان طور که در بخش قبلی گفته شده، بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح به صورت متغیرهای صفر و یک هستند. اما در برخی از مسائل، متغیرها می‌توانند بیش از دو مقدار به خود بگیرند. ولی می‌توان این مدل‌ها را به متغیرهای دودویی تبدیل کرد. فرض کنید که x یک عدد صحیح باشد. در این صورت می‌توان گفت $x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i$ که $2^N \le x < 2^{N+1}$. در این حالت، y_i متغیرهای کمکی از نوع صفر و یک هستند.

برای ارایه دستور حل شاخه و کرانه برای مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی، مسئله‌ای عمومی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,\dots,m$$

$$x_j = 0 \; or \; 1, \quad j = 1,\dots,n.$$

که در مدل فوق $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ است. این فرض در واقع محدودیتی ایجاد نمی‌کند. زیرا اگر $c_j < 0$ باشد، می‌توان x_j را با $1-x'_j$ جایگزین کرد که در این صورت ضریب متغیر x'_j در تابع هدف مثبت خواهد شد. با توجه به موارد فوق، الگوریتم شاخه و کرانه به صورت زیر ارایه می‌گردد.

گام شاخه کردن: در این گام با تخصیص ۰ یا یک به برخی از متغیرها یک زیر مجموعه تعریف می‌شود که آن را جواب جزیی $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ می‌نامند. تکمیل جواب جزیی، جوابی است که N متغیر اول آن برابر متغیرهای جزیی است. اگر $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ آخرین جواب باشد، این جواب به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شود که در یکی از آن $x_{N+1} = 1$ و در دیگری $x_{N+1} = 0$ است.

گام کرانه: حد پایین z_L مربوط به جواب جزیی $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ که موجه باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_L = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

چنانچه جواب جزیی، موجه نباشد و $x_N = 0$، می‌توان حد پایینی را به شرح زیر تعریف کرد:

$$z_L = \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j + c_{N+1}$$

در صورتیکه جواب جزیی موجه نباشد و $x_N = 1$ باشد، حد پایین از رابطه $z_L = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$ محاسبه می‌شود.

گام توقف یا به ته رسیدن: در صورتیکه جواب جزیی فعلی در یکی از آزمون‌های سه گانه زیر صدق کرد، دیگر نیازی به شاخه کردن نیست. این آزمون‌ها عبارتند از:

آزمون ۱: $z_L \geq z_U$

که z_U مقدار تابع هدف بهترین جواب موجهی است که تا این مرحله بدست آمده است. در صورتیکه تاکنون جواب موجهی بدست نیامده است، $z_U = \infty$ منظور می‌شود.

آزمون ۲: در این آزمون نبودن جواب موجه در زیر مجموعه مورد نظر بررسی می‌شود که با تکمیل جواب جزیی فعلی آیا ممکن است که حداقل یکی از محدودیت‌ها هرگز برقرار نشود؟ طبق این آزمون، در صورتیکه به ازای یکی از مقادیر $i = 1,\ldots,m$، رابطه زیر صدق نماید، آنگاه شاخه کردن جواب جزیی فعلی متوقف می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + \sum_{j=N+1}^{n} \max\{a_{ij}, 0\} < b_i$$

آزمون ۳:

در این آزمون رسیدن به بهترین جواب موجه در زیر مجموعه بررسی می‌شود که آیا جواب جزیی فعلی موجه است یا نه. چنانچه جواب جزیی فعلی به $x_N = 0$ ختم شود، به جای بررسی موجه بود جواب جزیی فعلی، موجه بودن جواب جزیی که در آن $x_{N+1} = 1$ بررسی می‌شود. بیان ریاضی این آزمون به صورت زیر است.

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) \geq b_i$$

چنانچه این شرط برقرار شود و همچنین داشته باشیم $z_L < z_U$ ، لذا $z_U = z_L$ می‌شود و این جواب به عنوان بهترین جواب موجود در نظر می‌گیریم.

برای روشن شدن موضوع مثال زیر را حل می‌کنیم.

تمرین: مسئله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6 \\
&s.t. \\
&\qquad -x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2 \\
&\qquad -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2 \\
&\qquad +5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3 \\
&\qquad x_j = 0 \; or \; 1; \; j = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

حل:

تکرار صفر: $z_U = \infty$ و چون ضریب متغیرها در تابع هدف نامنفی هستند، لذا مقدار بهینه تابع هدف قطعا از صفر بزرگتر است و لذا $z_L = 0$. چون جواب $(0,0,0,0,0,0)$ در محدودیت‌های ۱ و ۳ امکان پذیر نیست، لذا شرایط توقف برقرار نیست و باید این گره، شاخه کرد و این گره به دو شاخه $x_1 = 1$ و $x_1 = 0$ تقسیم می‌شود.

تکرار ۱: جواب جزیی (۱) بررسی می‌شود:

آزمون ۱: $3 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$
\begin{aligned}
&constr1: -1 + 6 + 4 + 1 \not< 2 \\
&constr2: -5 + 1 + 3 + 1 \not< -2 \\
&constr3: 5 + 4 + 2 \not< 3
\end{aligned}
$$

این گره در این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون ۳: جواب $(1,0,0,0,0,0)$ بررسی می‌شود که محدودیت‌ها برقرار یا نه؟

$$constr1: -1 \geq 2 \quad N.G.$$
$$constr2: -5 \geq -2 \quad N.G.$$
$$constr3: 5 \geq 3 \quad O.K.$$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی‌شود.

تکرار ۲: گره با جواب جزیی $(1,0)$ بررسی شود:

آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$constr1: -1+4+1 \not< 2$$
$$constr2: -5+1+3+1 \not< -2$$
$$constr3: 5+4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(1,0,1,0,0,0)$ را از نظر برقراری در محدودیت‌ها بررسی شود.

$$constr1: -1-3 \not\geq 2.$$
$$constr2: -5+1 \not\geq -2$$
$$constr3: 5+4 \geq 3.$$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی‌شود.

تکرار ۳: جواب جزیی $(1,0,0)$ بررسی شود.

آزمون ۱: $12 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$constr1: -1+4+1 \not< 2$
$constr2: -5+3+1 \not< -2$
$constr3: 5+2 \not< 3$

آزمون ۳: با توجه به این که جواب جزیی $(1,0,0)$ است، باید جواب $(1,0,0,1,0,0)$ کنترل شود که در محدودیت‌ها برقرار است یا نه؟

$constr1: -1+4 \geq 2.$
$constr2: -5+3 \geq -2$
$constr3: 5-2 \geq 3.$

جواب $(1,0,0,1,0,0)$ امکان‌پذیر است و لذا $z_U = 12$.

تکرار ۴: جواب جزیی $(1,0,1)$ در نظر بگیرید

آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$constr1: -1-3+4+1 < 2$
$constr2: -5+1+3+1 \not< -2$
$constr3: 5+4+2 \not< 3$

چون محدودیت ۱ برقرار نیست لذا این گره با توجه به آزمون ۲ به ته می‌رسد.

تکرار ۵: جواب جزیی $(1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $8 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون۲:

$constr1: -1+6+4+1 \not< 2$
$constr2: -5-3+1+3+1 < -2$
$constr3: 5-1+4+2 \not< 3$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار۶: جواب جزیی (0) را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $5 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: 0+6+4+1 \not< 2$$
$$constr2: 0+1+3+1 \not< -2$$
$$constr3: 0+4+2 \not< 3$$

با این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون۳: چون $x_1 = 0$ است، باید کنترل شود که $(0,1,0,0,0,0)$ امکان پذیر است یا نه؟

$$constr1: 6 \geq 2.$$
$$constr2: -3 \not\geq -2$$
$$constr3: -1 \not\geq 3.$$

در این آزمون، گره به ته نمی‌رسد.

تکرار۷: جواب جزیی $(0,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $5 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: 6+4+1 \not< 2$$
$$constr2: -3+1+3+1 \not< -2$$
$$constr3: -1+4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,0,0,0,0)$ بررسی شود.

$constr1: 6 \geq 2.$
$constr2: -3 \not\geq -2$
$constr3: -1 \not\geq 3.$

تکرار۸: جواب جزیی $(0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $11 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$constr1: 6-3+4+1 \not< 2$
$constr2: -3+1+3+1 \not< -2$
$constr3: -1+4+2 \not< 3$

آزمون ۳: جواب $(0,1,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$constr1: 6-3 \geq 2.$
$constr2: -3+1 \geq -2$
$constr3: -1+4 \geq 3.$

این گره با آزمون ۳ به ته می‌رسد و $z_U = 11$ بهترین جواب موجه فعلی است.

تکرار۹: جواب جزیی $(0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $14 = z_L \geq z_U = 11$ برقرار است و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار۱۰: جواب جزیی $(0,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$constr1: 4+1 \not< 2$
$constr2: 1+3+1 \not< -2$
$constr3: +4+2 \not< 3$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ رابررسی کنید.

$constr1: -3 \not\geq 2.$
$constr2: +1 \geq -2$
$constr3: +4 \geq 3.$

این گره به ته نمی‌رسد.

تکرار ۱۱: جواب جزیی $(0,0,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$constr1: -3+4+1 \not< 2$
$constr2: 1+3+1 \not< -2$
$constr3: +4+2 \not< 3$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$constr1: -3 \not\geq 2.$
$constr2: +1 \geq -2$
$constr3: +4 \geq 3.$

تکرار ۱۲: جواب جزیی $(0,0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $15 = z_L \geq z_U = 11$، و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۳: جواب $(0,0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $16 = z_L \geq z_U = 11$ را در نظر بگیرید و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۴: جواب $(0,0,0)$ را در نظر بگیرید.

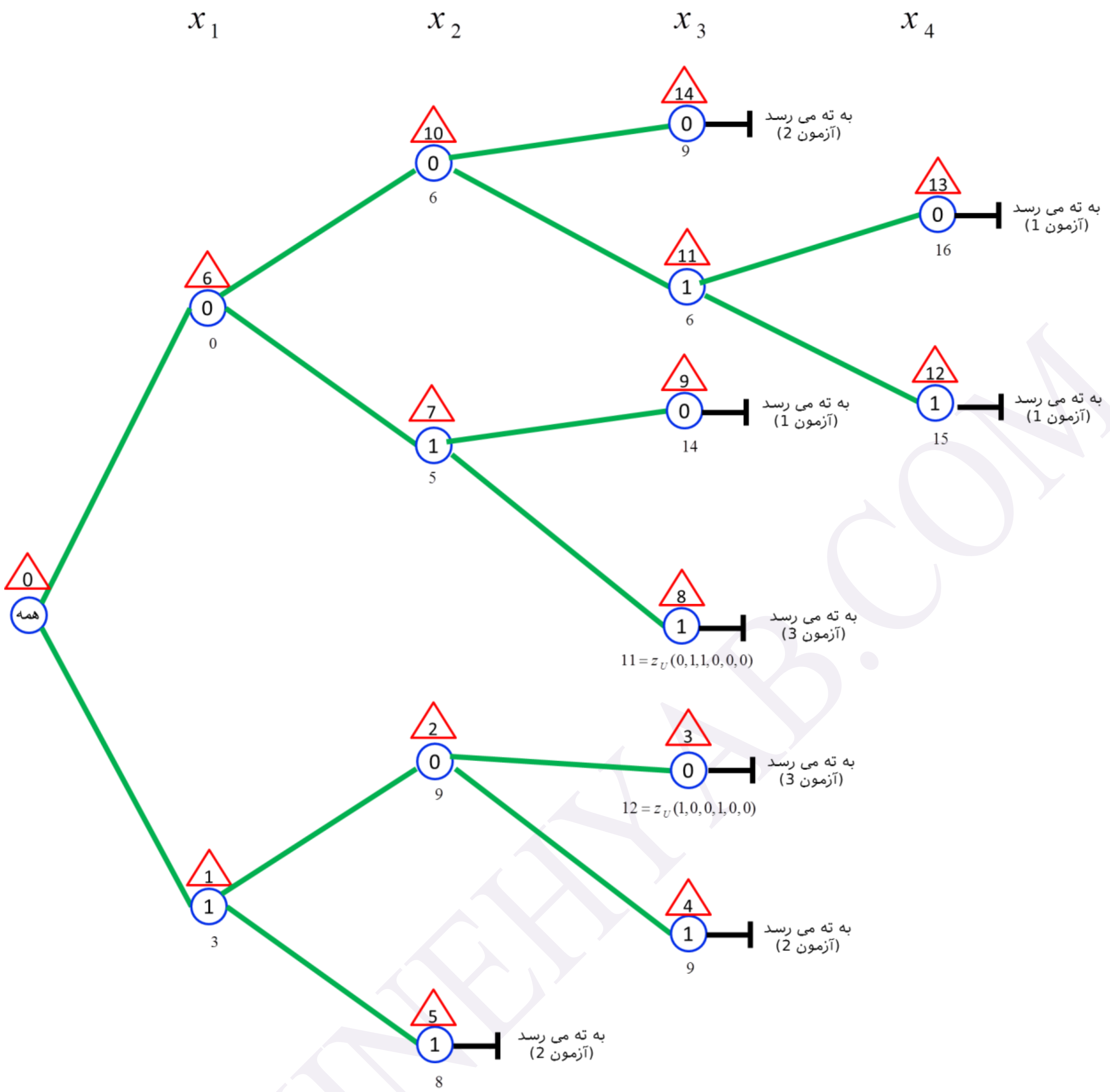
آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$constr1: +1 < 2$$
$$constr2: +1 \not< -2$$
$$constr3: +2 < 3$$

این گره با آزمون ۲ به ته می‌رسد.

کلیه گره‌ها بسته شده است و جواب بهینه $z = 11$ و $(0,1,1,0,0,0)$ مـی‌شـود. خلاصـه محاسـبات در شکل زیر آمده است.



الگوریتم شاخه و کرانه برای برنامه‌ریزی مختلط

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n$$

$$x_j \in \text{int} \quad j=1,\dots,I$$

در مدل فوق، اگر $I=n$ باشد مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص (*Pure integer programming*) خواهیم داشت. برای حل مدل فوق الگوریتم زیر ارایه می‌شود.

با حذف محدودیت عدد صحیح و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده انجام می‌شود. اگر جواب حاصل به ازإ تمامی‌متغیرهای عدد صحیح، مقدار صحیح به خود بگیرد، در این صورت جواب بهینه بدست آمده است. در غیر این صورت، در هر تکرار متغیری مانند x_j را بر می‌گزینند که مقدار آن عدد صحیح نباشد به طوری که اگر k عدد صحیح باشد،

$$k < x_j < k+1$$

سپس زیر مجموعه موجود را دو زیر مجموعه جدید تقسیم می‌کند.

۱- جواب‌هایی که در آن $x_j \le k$

۲- جواب‌هایی که در آن $x_j \ge k+1$

با حذف شرط صحیح بودن و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده (با اضافه کردن محدودیت‌های $x_j \le k$ یا $x_j \ge k+1$) یک حد بالا (z_U) برای زیر مجموعه بدست می‌آید. جواب مسئله آزاد شده توسط روش سیمپلکس ثانویه بدست می‌آید. آزمون‌های به ته رسیدگی به صورت سه آزمون زیر است:

آزمون ۱: $z_L \ge z_U$

آزمون ۲: با روش سیمپلکس ثانویه در می‌یابیم که جواب موجهی وجود ندارد.

آزمون ۳: در جواب بهینه، تمام متغیرهای x_j ($j=1,\dots,I$) عدد صحیح باشند.

اگر زیر مجموعه‌ای با آزمون ۳ به ته رسید و $z_U > z_L$ باشد، آنگاه $z_L = z_U$ قرار داده شده و این جواب را به عنوان بهترین جواب موجود ذخیره می‌شود. پس از آن که تمامی زیر مجموعه‌های باقی مانده به ته رسیدند، آنگاه حد پایین همان جواب بهینه است.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش شاخه و کرانه حل نمایید.

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0, \text{int} \end{aligned}$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 + x_4 &= 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0, \text{int} \end{aligned}$$

A0

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست	
Z	0	1	-5	-8	0	0	0	
X_3	1	0	1	1	1	0	6	
X_4	2	0	5	9	0	1	45	
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40	
X_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1	
X_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5	
Z	0	1	0	0	5/4	¾	41.25	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25	
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75	

متغیر x_1 و x_2 دارای مقدار غیرصحیح در جواب بهینه است. لذا یکی از متغیرها را باید برای شاخه کردن انتخاب کرد که در این مرحله x_2 انتخاب می‌شود.

$$x_2 \ge 4 \rightarrow -x_2 \le -4 \rightarrow -x_2 + s_1 = -4$$

A1

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	-1	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	-5/4	0.25	1	-0.25
Z	0	1	0	0	0	1	1	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0.2

جدول بهینه

$$x_1 \geq 2 \rightarrow -x_1 \leq -2 \rightarrow -x_1 + s_2 = -2$$

A2

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	-1	0	0	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	0	0	0	0.2	1.8	1	-2.2

جدول امکان ناپذیر

با توجه به این که ضرایب متغیرها در معادله شماره ۴ مثبت است و سمت راست منفی است، لـذا ایـن جواب امکان ناپذیر است.

$$x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 + s_2 = 1$$

A3

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	0	0	0	-0.2	-1.8	1	-0.8
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	4/9

جدول بهینه

$$x_2 \leq 4 \rightarrow x_2 + s_3 = 4$$

A4

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	1	0	0	0	0	1	4
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	0	0	-1/9	0	5/9	1	-4/9
Z	0	1	0	0	0	0	0	5	8	37
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	0	0	14/9	1	4
X_3	3	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
S_1	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X_4	5	0	0	0	0	1	0	-5	-9	4

جدول بهینه

$$x_2 \geq 5 \rightarrow -x_2 \leq -5 \rightarrow -x_2 + s_3 = -5$$

A5

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	-1	0	0	0	0	1	-5
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	0	0	1/9	0	-5/9	1	-5/9
Z	0	1	0	0	0	1	0	0	1	40
X_1	1	0	1	0	0	0.2	0	0	1.8	0
X_2	2	0	0	1	0	0	0	0	-1	5
X_3	3	0	0	0	1	-0.25	0	0	-0.8	1/9
S_1	4	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
S_2	5	0	0	0	0	-0.2	0	1	-1.8	1

جدول بهینه

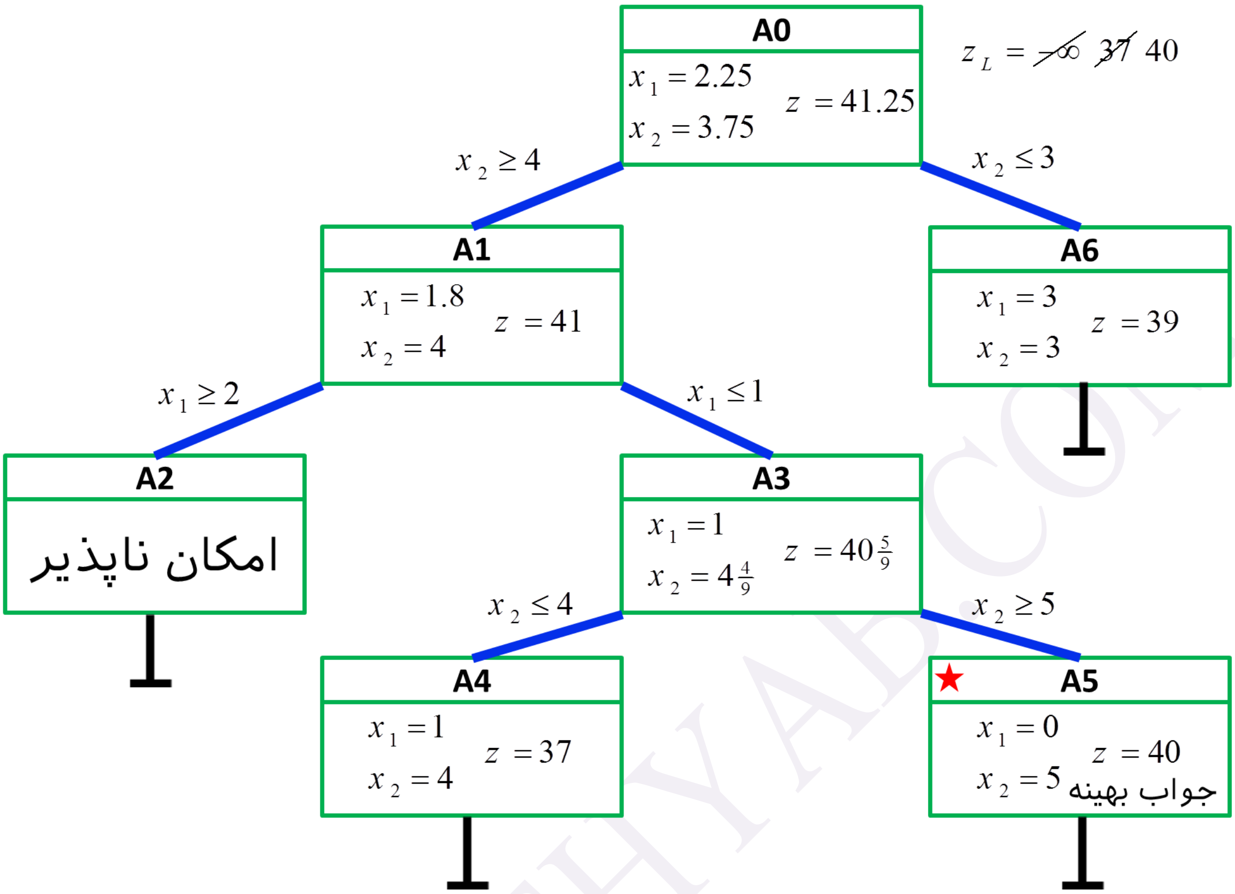
$$x_2 \leq 3 \rightarrow x_2 + s_1 = 3$$

A6

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	1	0	0	1	3
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	5/4	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	5	0	3	39
X_1	1	0	1	0	1	0	-1	3
X_2	2	0	0	1	0	0	1	3
X4	3	0	0	0	-5	1	-4	3

جدول بهینه

کلیه مراحل حل را می‌توان در درخت زیر نشان داد.



برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**