درس ۲۰:

فرایند تحلیل سلسله مراتبی یا *AHP*

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

روش تحلیل سلسله مراتبی یا ***AHP*** یا ***Analytical Hierarchy Process*** یک روش تصمیم گیری چند معیاره یا *Multiple-criteria decision-making* یا *MCDM* است. این روش توسط آقای **توماس ساعتی** (*Thomas Saaty*) در دهه هشتاد میلادی ابداع شد. در این روش قضاوت افراد خبره در مورد مساله مورد بحث خواهد گرفت.

خلاصه گام‌های حل یک مسئله تصمیم گیری چند معیار با استفاده از روش *AHP* به صورت زیر است:

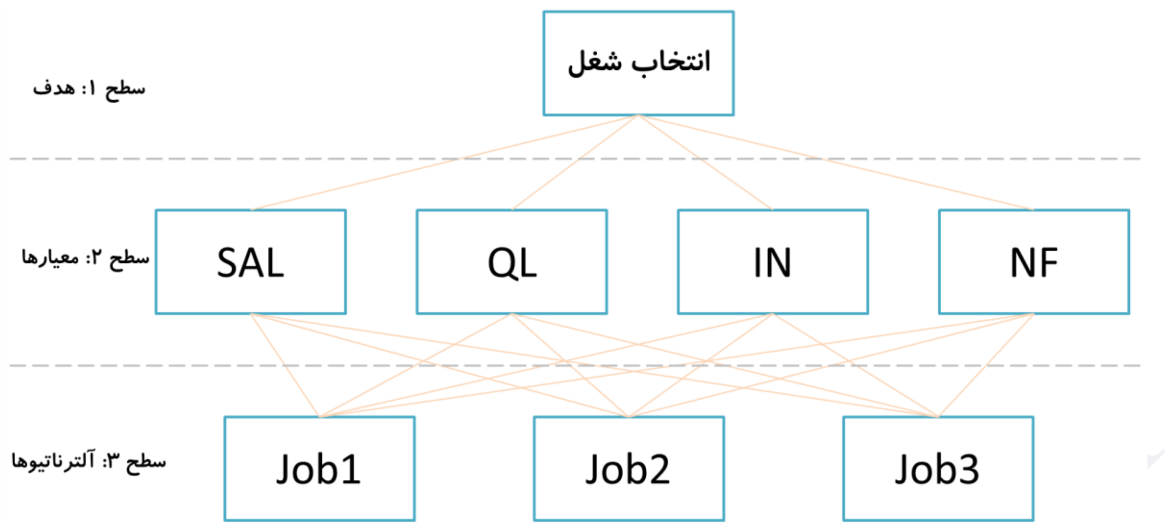
گام ۱) تعریف به صورت سلسله مراتب درختی: در این گام مسئله به صورت یک سلسله مراتب چند سطحی تعریف می‌شود: در سطح ۱ هدف مساله، در سطح ۲ معیارها و در سطح ۳، آلترناتیوها یا گزینه‌ها تشکیل می‌دهند. هر یک از عناصر موجود در این سلسله مراتب به صورت گره نمایش داده می‌شود و ارتباط ما بین عنصرهای یک سطح و سطح دیگر از طریق یال مشخص می‌شود. بین عناصر در یک سطح یال موجود نیست. البته هر سطح اصلی می‌تواند دارای زیر سطح فرعی نیز باشد. برای روشن شدن موضوع یک مثال می‌زنیم.

مثال انتخاب یک شغل

فرض کنید که جهت انتخاب شغل آینده چهار معیار زیر در نظر است:

- ✓ میزان حقوق سالانه (*SAL*)
- ✓ محیط کاری (*QL*)
- ✓ علاقه مندی به شغل (*IN*)
- ✓ محل کار (*NF*)

با توجه به این معیارها می‌خواهیم از بین سه پیشنهاد شغلی *Job*۱، *Job*۲ و *Job*۳ یکی را انتخاب کنیم. نمایش سلسله مراتبی این انتخاب به صورت زیر می‌شود:



گام ۲) تعیین اهمیت هر معیار از دید تصمیم گیرنده یا فرد خبره: در این گام با استفاده از نظر تصمیم گیرنده یا تصمیم گیرندگان یا افراد خبره، اهمیت نسبی معیارهای نسبت به هم تعیین می‌شود و با استفاده از **روش انتخاب وزن**، وزن w_i معیار i ـام تخصیص می‌یابد. برای محاسبه وزن n معیار فرض می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad , \quad w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

گام ۳) تعیین امتیاز نسبی هر آلترناتیو با توجه به معیارها: در این گام امتیاز نسبی آلترناتیو j نسبت به معیار i بدست می آید که به صورت S_{ij} نمایش می‌دهیم و بیانگر علاقه نسبی به آلترناتیو j با توجه به معیار i است. محاسبه S_{ij} با استفاده از روش تخصیص امتیاز نسبی و با کمک اطلاعات ورودی از تصمیم گیرندگان انجام می‌شود. در این حالت نیز فرض می‌شود که:

$$\sum_{j=1}^{m} S_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Job1} & \text{Job2} & \text{Job3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{SAL} \\ \text{QL} \\ \text{IN} \\ \text{NF} \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{0.571 \quad 0.286 \quad 0.143} \\ 0.159 \quad 0.252 \quad 0.589 \\ 0.088 \quad 0.669 \quad 0.243 \\ 0.069 \quad 0.425 \quad 0.506 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow = 0.571 + 0.286 + 0.143 = 1$$

گام ۴: محاسبه امتیاز نهایی هر آلترناتیو: در این گام امتیاز نهایی هر آلترناتیو با استفاده از وزن نسبی هر معیار و امتیاز نسبی آلترناتیو j نسبت به تمامی معیارها به صورت محاسبه می‌شود:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} w_i S_{ij} \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

گام ۵: انتخاب بهترین آلترناتیو: آلترناتیو یا گزینه ای انتخاب می‌شود که $\underset{j}{Max}\{P_j\}$ داشته باشد.

یکی از مهمترین مزایا روش ***AHP*** تعیین میزان ناسازگاری قضاوت‌های تصمیم گیرنده است. برای مثال اگر معیار *A* دو برابر *B* و معیار *B* سه برابر معیار *C* اهمیت داشته باشد، از دید یک **فرد کاملا منطقی** باید اهمیت معیار *A* نسبت به معیار *C*، شش برابر باشد. اما از دید انسان‌ها که کاملا منطقی نیستند ارزش گذاری اهمیت نسبی هر دو معیار نسبت به هم می‌تواند کاملا براساس نظر تصمیم گیرنده تعیین شود. با استفاده از روش *AHP* می توان میزان سازگاری تصمیم گیران را محاسبه کرد و در صورت ناسازگار بودن تصمیم گیر، وی را از فرایند انتخاب تصمیم نهایی حذف کرد.

در ادامه این جزوه، گام‌های اشاره شده در بالا با جزییات بیشتر بیان می‌شود.

روش انتخاب وزن هر معیار Assign weights to criteria

فرض کنید *n* معیار در مساله موجود است. ابتدا با نظر تصمیم گیرنده (یا افراد خبره) **ماتریس مقایسه جفتی** (*Pairwise Comparison Matrix*) $A_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهیم که در آن هر عنصر a_{ij} بیانگر آن است که از دید تصمیم گیرنده چقدر معیار *i* –ام نسبت به معیار *j*–ام دارای اولویت است.

جهت انجام این مقایسه، از سیستم مقیاس عددی زیر استفاده می‌شود.

نوع اهمیت	a_{ij}
اهمیت یکسان	1
اهمیت ضعیف	3
اهمیت قوی	5
اهمیت خیلی قوی	7
اهمیت مطلق	9

در هنگام تشکیل این ماتریس سه نکته زیر رعایت را باید مدنظر گرفت.

نکته ۱: اگر معیار i ام k برابر معیار j –ام اهمیت داشته باشد معیار j–ام $1/k$ معیار i–ام اهمیت دارد. به این اصل، **اصل وارانگی** اتلاق می‌شود.

نکته ۲: $a_{ii} = 1$

برای مثال می توانید در ماتریس مقایسه جفتی دو نکته فوق را مشاهده کرد.

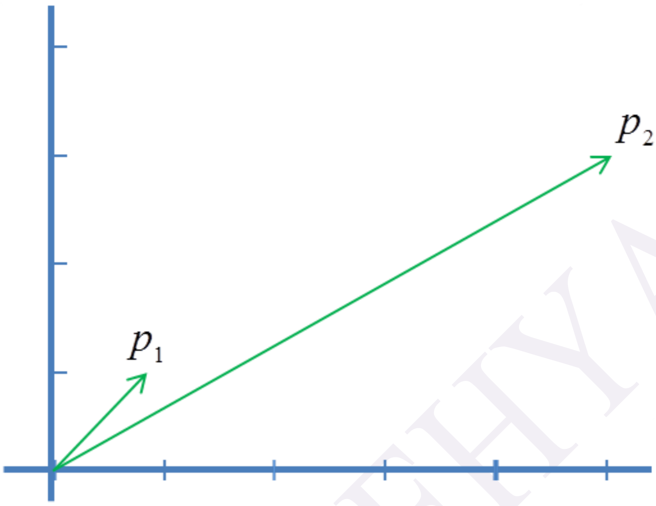
$$A = \begin{array}{c} \\ SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} SAL & QL & IN & NF \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 5 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$ برای مسئله انتخاب شغل

نکته ۳: مرتبه یا رنک *Rank* این ماتریس برابر یک است.

در روش *AHP*، ابتدا باید ماتریس مقایسه‌های جفتی *A* که اولویت معیارها را نسبت به هم مشخص مـی‌کنـد تبدیل به بردار می‌شود که در حقیقت این بردار وزن هر معیار را مشخص می‌کند.

A ماتریس مقایسات جفتی $\longleftarrow$ **w بردار وزن**

یک ماتریس در حقیقت یک **تبدیل خطی** یا ***Linear Transformation*** را مـی‌توانـد بـر روی یـک بـردار اعمال کند. برای مثال داریم:



$$\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{p_1}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}}_{p_2}$$

برای تعیین وزن معیارها نیاز به تعاریف زیر است:

بردار ویژه یا ***Eigen Vectors*** برداری است که وقتی تبدیل خطی بر روی آن اعمال شـود فقـط طـول آن تغییر می‌کند و نه جهت آن.

مقدار ویژه یا ***Eigen Value*** در حقیقت اندازه این تغییر طول را مشخص می‌کند. برای مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow Av=\lambda v\rightarrow Av-\lambda v=0\rightarrow(A-\lambda I)v=0$$

$$\xrightarrow{\det(v)\neq 0}\det(A-\lambda I)=0\rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda=-1,3$$

جهت تبدیل ماتریس A به یک بردار وزنی از مفهوم بردار ویژه استفاده می‌کنیم.

$$Aw^T = \lambda w^T$$

که در آن:

A ماتریس مقایسات جفتی،

w^T بردار ویژه یا همان بردار وزنی و

λ مقدار ویژه هستند.

در این سیستم معادلات w^T و λ مجهول هستند. فرم گسترده معادله فوق به صورت زیر می‌شود.

$$Aw^T = \lambda w^T \rightarrow \begin{array}{l} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n = \lambda w_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n = \lambda w_2 \\ \ldots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n = \lambda w_n \end{array}$$

از طرف دیگر داریم:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$$

و همچنین باید $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد که از روی آن λ تعیین می‌شود و سپس با حل دستگاه فوق $w_1, w_2, \ldots, w_n$ را بدست می آوریم. در عمل به دلیل وقت گیر بودن سعی می‌کنیم از روش‌های تخمینی که با دقت کافی این مقادیر را بدست می آورد استفاده کنیم.

روش اول: ماتریس A سازگار باشد

اگر ماتریس A سازگار باشد، در این حالت ماتریس مقایسات جفتی بـه صـورت ذیـل از سـوی تصـمیم گیرنده تعیین می شود.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \ddots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \rightarrow a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$$

همچنین داریم:

$$Aw^T=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \ddots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1\times\frac{w_1}{w_1}+w_2\times\frac{w_1}{w_2}+\ldots+w_n\times\frac{w_1}{w_n} \\ w_1\times\frac{w_2}{w_1}+w_2\times\frac{w_2}{w_2}+\ldots+w_n\times\frac{w_2}{w_n} \\ \vdots \\ w_1\times\frac{w_n}{w_1}+w_2\times\frac{w_n}{w_2}+\ldots+w_n\times\frac{w_2}{w_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n\times\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw^T$$

نکته: تعداد مقادیر ویژه برای یک ماتریس $A_{n\times n}$ به اندازه رتبه آن ماتریس است.

روش دوم: ماتریس A ناسازگار باشد.

در این حالت **توماس ساعتی** نشان داد که مقادیر ویژه ماتریس A دارای خواص زیر است:

۱- اگر $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسات جفتی باشند آنگاه $\sum_i \lambda_i = n$

۲- محاسبه مقدار سازگاری ماتریس A با پارامتری به نام **شاخص سـازگاری** یـا ***Consistency Index*** که به اختصار ***CI*** است محاسبه می‌شود که به صورت زیر است:

$$C.I.=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

نکته: اگر مقدار ناسازگاری نسبتا کم باشد آنگاه $\lambda_{\max}\approx n$ و $C.I.$ نسبتا کوچک است و w حاصل از به کارگیری $\lambda_{\max}$ به مقدار واقعی w نزدیک است.

مقادیر شاخص سازگاری جهت ماتریس‌های تصادفی (که اعداد آن کاملا به صورت تصادفی تولید شده اند) به نام **شاخص سازگاری تصادفی** یا ***R.C.I*** یا ***Random Consistency Index*** نامیده می‌شود و متوسط آن برای ماتریس‌های تصادفی با رتبه n به صورت جدول زیر است.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RCI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

نرخ سازگاری یا ***C.R*** یا ***Consistency Ratio*** ماتریس مقایسه جفتی A، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C.R = \frac{C.I}{R.C.I}$$

نکته: توماس ساعتی نشان داد که اگر $C.R \leq \frac{1}{10}$ باشد درجه سازگاری ماتریس A قابل قبول است.

در ادامه روش‌های محاسبه بردار وزنی w ارایه می‌شود که در آن ماتریس A سازگار نیست.

روش اول: روش مجموع ستونی

روش مجموع ستونی برای تخمین w در حالتی که A **سازگار نیست** به صورت مراحل زیر انجام می‌شود.

گام ۱: مقادیر عناصر هر یک از ستون‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

گام ۲: هر عنصر موجود در هر ستون را بر مجموع عناصر بدست آمده از آن ستون تقسیم می‌کنیم تا ماتریس A_{norm} بدست آید.

گام ۳: w_i برابر متوسط عناصر موجود در ردیف i-ام ماتریس A_{norm} است.

مثال: ماتریس مقایسات جفتی A به صورت زیر داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 5 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

برای یافتن بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

گام ۱: مقادیر عناصر هر یک از ستون ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 1.0 & 5 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \underbrace{\overline{1.95}}_{=1+0.2+0.5+0.25} & \underbrace{\overline{10}}_{=5+1+2+2} & \underbrace{\overline{4}}_{=2+0.5+1+0.5} & \underbrace{\overline{7.5}}_{=4+0.5+2+1} \end{matrix}$$

گام ۲: هر عنصر موجود در هر ستون را بر مجموع عناصر بدست آمده از آن ستون تقسیم می‌کنیم تا ماتریس A_{norm} بدست آید. در این مثال داریم:

$$A_{norm}=\begin{bmatrix} \overbrace{0.5128}^{\frac{1}{1.95}} & \overset{\frac{5}{10}}{0.5} & \overset{\frac{2}{4}}{0.500} & \overbrace{0.5333}^{\frac{8}{15}} \\ \overbrace{0.1026}^{\frac{0.2}{1.95}} & \overset{\frac{1}{10}}{0.1} & \overset{\frac{0.5}{4}}{0.125} & \overbrace{0.0667}^{\frac{0.5}{7.5}} \\ \overbrace{0.2564}^{\frac{0.5}{1.95}} & \overset{\frac{2}{10}}{0.2} & \overset{\frac{1}{4}}{0.250} & \overbrace{0.2666}^{\frac{1}{7.5}} \\ \overbrace{0.1025}^{\frac{0.25}{1,95}} & \overset{\frac{2}{10}}{0.2} & \overset{\frac{0.5}{4}}{0.125} & \overbrace{0.1333}^{\frac{1}{7.5}} \end{bmatrix}$$

گام ۳: w_i برابر متوسط عناصر موجود در ردیف i-ام ماتریس A_{norm} است. در این مثال داریم:

$$A_{norm}=\begin{bmatrix}0.5128 & 0.5 & 0.500 & 0.5333\\ 0.1026 & 0.1 & 0.125 & 0.0667\\ 0.2564 & 0.2 & 0.250 & 0.2666\\ 0.1025 & 0.2 & 0.125 & 0.1333\end{bmatrix}\rightarrow w=\begin{bmatrix}\overbrace{\frac{0.5128+0.5+0.5+0.533}{4}}^{0.5115}\\ \overbrace{\frac{0.1026+0.1+0.125+0.0667}{4}}^{0.0986}\\ \overbrace{\frac{0.2564+0.2+0.25+0.2666}{4}}^{0.2433}\\ \overbrace{\frac{0.1025+0.2+0.125+0.1333}{4}}^{0.1466}\end{bmatrix}$$

روش دوم: روش میانگین هندسی

میانگین هندسی k عدد $n_1,n_2,n_3,...,n_k$ به صورت $\sqrt[k]{n_1\times n_2\times...\times n_k}$ بدست می‌آید. در ایـن روش مراحل زیر را پیگیری می‌کنید.

گام ۱: ابتدا میانگین هندسی عناصر سطر i-ام را بدست می‌آوریم.

گام ۲: جهت تعیین بردار نرمالایزه شده وزنی کافی است هر عنصر بردار ستونی میانگین هندسی را بـر مجموع عناصر بردار تقسیم کنیم.

برای مثال اگر ماتریس جفتی به صورت زیر در اختیار باشد.

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0\\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}$$

آنگاه برای محاسبه بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sqrt[4]{1\times5\times2\times4} \\ \sqrt[4]{0.2\times1\times0.5\times0.5} \\ \sqrt[4]{0.5\times2\times1\times2} \\ \sqrt[4]{0.25\times2\times0.5\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.51 \\ 0.47 \\ 1.19 \\ 0.70 \end{bmatrix} \rightarrow \ w = \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.09 \\ 0.24 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

روش سوم: محاسبه حدی

برای یافتن بردار وزنی نیاز به بیان قضیه زیر است:

قضیه: اگر A یک ماتریس مقایسه جفتی باشد در این صورت داریم:

$$W = \lim_{k\to\infty} \frac{A^k.e}{e^T.A^k.e}$$

که در آن: $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

بر مبنای این قضیه می‌توان در توان‌های مختلف A بردار وزنی را بدست آورده و هر گاه اختلاف w^k و w^{k+1} ناچیز بود متوقف می شویم.

مثال: ماتریس مقایسه جفتی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$k=1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.69 \\ 15 \\ 4.83 \\ 7.5 \end{bmatrix} \rightarrow w^1=\begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.516 \\ 0.166 \\ 0.258 \end{bmatrix}$$

برای $k=2$ داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 4 & 0.458 & 1.5 & 0.88 \\ 35 & 4 & 13 & 7.75 \\ 11 & 1.25 & 4 & 2.41 \\ 18.5 & 2.11 & 6.82 & 4 \end{bmatrix}$$

$$k=2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6.84 \\ 59.75 \\ 18.66 \\ 31.44 \end{bmatrix} \rightarrow w^2=\begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.512 \\ 0.160 \\ 0.269 \end{bmatrix}$$

این روند به همین صورت ادامه پیدا می‌کند. مشاهده می‌شود که برای $k=5$ به همگرایی برای بردار w می‌رسید که به صورت زیر می‌شود.

$$w^5=\begin{bmatrix} 0.059 \\ 0.513 \\ 0.160 \\ 0.270 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه شاخص سازگاری، در مرحله بعد باید $\lambda_{\max}$ را بدست آورد. در ادامه روش تخمین این پارامتر آورده شده است.

روش تخمین $\lambda_{\max}$

گام ۱: در نظر بگیرید بردار w توسط یکی از روش‌های گفته شده قبلی به صورت w_0 تخمین زده شده باشد.

گام ۲: بردار v را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$v = Aw_0^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

گام ۳: انجام دهید $\lambda_i = \frac{v_i}{w_0^i} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

گام ۴: میانگین مقادیر λ_i ها برابر $\lambda_{\max}$ است.

نکته: با در اختیار داشتن $\lambda_{\max}$ و w_0 می‌توان بردار v را به صورت زیر بدست آورد:

می دانیم که $Aw^T = \lambda w^T$ که در آن $\lambda = \lambda_{\max}$ نیز صدق می‌کند. پس خواهیم داشت $Aw^T = \lambda_{\max} w^T$. در این رابطه به جای w از w_0 استفاده می‌کنیم لذا داریم: $Aw_0^T = \lambda_{\max} w_0^T$ و همچنین داریم: $\lambda_{\max} w_0^T = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

روش امتیاز دهی هر آلترناتیو نسبت به هر معیار

در این حالت تصمیم گیرنده باید ابتدا ماتریس مقایسات جفتی را مشخص کند که در آن هر عنصر a_{lk} اهمیت نسبی آلترناتیو i نسبت به آلترناتیو k را با توجه به معیار مشخص شده تعیین می‌کند. با استفاده از روش های بیان شده، برای هر ماتریس مقایسات جفتی، بردار امتیاز نسبی آلترناتیوها با توجه به معیار مشخص شده محاسبه می شود.

مثال: برای تصمیم گیری در خصوص سه شغل، از چهار معیار میزان حقوق(*SAL*)، محیط کاری(*QL*)، علاقمندی به شغل (*IN*) و محل کار (*NF*) استفاده می شود. ماتریس مقایسات جفتی معیارهای چهارگانه و مقایسه جفتی سه شغل در هر معیار به صورت زیر است. کدام شغل با استفاده از روش *AHP* توصیه می‌شود.

مقایسه جفتی معیارها

$$A = \begin{array}{c} \\ SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} SAL & QL & IN & NF \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار QL

$$A = \begin{array}{c} \\ job1 \\ job2 \\ job3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} job1 & job2 & job3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار SAL

$$A = \begin{array}{c} \\ job1 \\ job2 \\ job3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} job1 & job2 & job3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار NF

$$A = \begin{array}{c} \\ job1 \\ job2 \\ job3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} job1 & job2 & job3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار IN

$$A = \begin{array}{c} \\ job1 \\ job2 \\ job3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} job1 & job2 & job3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

حل:

در ابتدا بردار وزنی چهار معیار با استفاده از **روش مجموع ستونی** محاسبه می‌شود.

مقایسه جفتی معیارها

$$A = \begin{array}{c} \\ SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} SAL & QL & IN & NF \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow w = \begin{array}{c} SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} \begin{bmatrix} 0.5116 \\ 0.0986 \\ 0.2433 \\ 0.1466 \end{bmatrix}$$

بردار امتیاز نسبی گزینه ها با توجه به هر معیار از روش مجموع ستونی به صورت زیر است:

مقایسه جفتی سه شغل در معیار SAL

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{SAL} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.286 \\ 0.143 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار QL

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{QL} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1592 \\ 0.2580 \\ 0.5828 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار IN

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{IN} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.088 \\ 0.669 \\ 0.243 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار NF

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{NF} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.0690 \\ 0.3197 \\ 0.6113 \end{bmatrix} \end{array}$$

با استفاده از امتیاز نسبی هر یک از معیارها و وزن معیارها، می‌توان امتیاز کلی را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\text{امتیاز کل} = \begin{bmatrix} 0.5116 & 0.0986 & 0.2433 & 0.1466 \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.571 & 0.286 & 0.143 \\ 0.159 & 0.251 & 0.588 \\ 0.088 & 0.664 & 0.243 \\ 0.069 & 0.319 & 0.616 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.339 & 0.379 & 0.280 \end{bmatrix} \end{array}$$

نتیجه نهایی: با توجه به امتیاز کلی، **شغل دوم** در اولویت انتخاب است. در ادامه سازگاری ماتریس‌های مقایسات جفتی محاسبه می‌شود.

محاسبه معیار سازگاری ماتریس مقایسه جفتی معیارها

$$Aw_0=\begin{bmatrix}1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0\\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\overbrace{0.5116}^{w_0^1}\\ \overbrace{0.0986}^{w_0^2}\\ \overbrace{0.2433}^{w_0^3}\\ \overbrace{0.1466}^{w_0^4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overbrace{2.0775}^{v_1}\\ \overbrace{0.3959}^{v_2}\\ \overbrace{0.9894}^{v_3}\\ \overbrace{0.5933}^{v_4}\end{bmatrix}$$

با توجه به روش تخمینی $\lambda_{\max}$ داریم:

$$\lambda_i=\frac{v_i}{w_i}\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{2.0775}{0.5116}=4.0616\\ \lambda_2=\dfrac{0.3959}{0.0989}=4.0152\\ \lambda_3=\dfrac{0.9894}{0.2433}=4.0666\\ \lambda_4=\dfrac{0.5933}{0.1466}=4.0470\end{cases}$$

مقدار میانگین λ_i ها برابر با ۴.۰۴۷۶ می‌شود لذا داریم: $\lambda_{\max}=4.0476$

برای محاسبه مقدار شاخص سازگاری یا $C.I$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$C.I=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{4.0476-4}{3}=0.0158$$

با توجه به جدول $R.C.I$، برای $n=4$، داریم: $R.C.I=0.9$. لذا نرخ سازگاری یا $C.R$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C.R=\frac{C.I}{R.C.I}=\frac{0.0158}{0.9}=0.017<0.1\quad o.k.$$

روند فوق برای ماتریس مقایسه جفتی معیارها برای محاسبه نرخ سازگاری انجام می‌شود که نتایج آن در ادامه آمده است.

$$A_{SAL} \to C.I = 0 \to C.R = 0 < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{QL} \to C.I = 0.0269 \to C.R = 0.046 < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{IN} \to C.I = 2.1\times10^{-4} \to C.R = 3.4\times10^{-4} < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{NF} \to C.I = 0.0138 \to C.R = 0.0239 < 0.1 \quad o.k.$$

به طور خلاصه نتایج این مثال در جدول زیر آورده شده است:

نوع ماتریس	A	A_{SAL}	A_{QL}	A_{IW}	A_{NF}
وزن	1	0.511	0.0986	0.2433	0.1466
C.I	0.0158	-	0.0269	0.0004	0.0138
R.C.I	0.9	0.58	0.58	0.58	0.58

برای کل فرآیند تصمیم گیری، شاخص $O.C.R$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

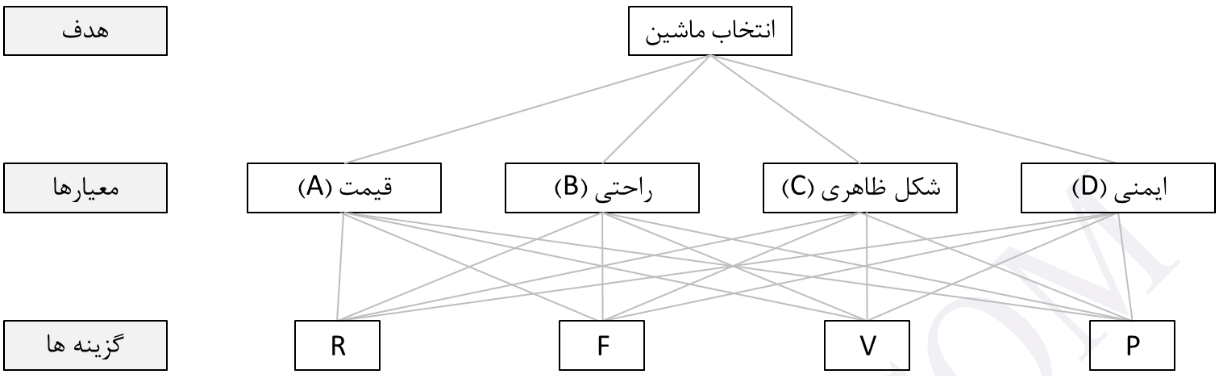
$$O.C.R = \frac{\text{مجموع وزن دار C.I. هر ماتریس}}{\text{مجموع وزن دار R.C.I هر ماتریس}}$$

که در این مثال مقدار $O.C.R$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$O.C.R = \frac{(1\times0.0158)+(0\times0.5115)+(0.0986\times0.0269)+(0.2433\times0.0004)+(0.1466\times0.0138)}{(1\times0.9)+(0.5115\times0.58)+(0.0986\times0.58)+(0.2433\times0.58)+(0.1466\times0.58)}$$

$$\to O.C.R = 0.0139 < 0.1 \quad o.k.$$

مثال: برای انتخاب چهار اتومبیل؛ چهار معیار ایمنی، شکل ظاهری، راحتی، و قیمـت اهمیـت دارد. در شکل زیر ارتباط بین معیارها و گزینه ها آورده شده است:



ماتریس مقایسات جفتی معیارها به صورت زیر بدست آمده است.

مقایسه جفتی معیارها

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 7.0 & 2.0 \\ 0.2 & 1.0 & 3.0 & 0.5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1.0 & \frac{1}{7} \\ 0.5 & 2.0 & 7.0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس مقایسات جفتی گزینه ها در هر یک از معیارها به صورت زیر داده شده است.

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار A

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار C

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 5 & 2 & 1 & \frac{1}{4} \\ 9 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار B

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 4 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار D

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 \\ 5 & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

با استفاده از روش *AHP* بهترین گزینه را انتخاب کنید.

حل:

برای محاسبه میانگین وزنی معیارها از روش میانگین هندسی استفاده می‌شود.

مقایسه جفتی معیارها

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 7.0 & 2.0 \\ 0.2 & 1.0 & 3.0 & 0.5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1.0 & \frac{1}{7} \\ 0.5 & 2.0 & 7.0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} & A \times B \times C \times D \\ \begin{array}{c} SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5116 \\ 0.0986 \\ 0.2433 \\ 0.1466 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} & \sqrt[4]{A \times B \times C \times D} \\ \begin{array}{c} SAL \\ QL \\ IN \\ NF \end{array} & \begin{bmatrix} 2.890 \\ 0.740 \\ 0.287 \\ 1.626 \end{bmatrix} \\ & k_j = 5.5464 \end{array} \rightarrow w = \begin{bmatrix} 0.5215 \\ 0.1334 \\ 0.0518 \\ 0.2933 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه میزان سازگاری ماتریس *A* به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$v = Aw = \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 7.0 & 2.0 \\ 0.2 & 1.0 & 3.0 & 0.5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1.0 & \frac{1}{7} \\ 0.5 & 2.0 & 7.0 & 1.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5215 \\ 0.1334 \\ 0.0518 \\ 0.2933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1376 \\ 0.5397 \\ 0.2127 \\ 1.1837 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{v}{w} = \begin{bmatrix} 2.1376/0.5215 \\ 0.5397/0.1334 \\ 0.2127/0.0518 \\ 1.1837/0.2933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0997 \\ 4.0457 \\ 4.1067 \\ 4.0357 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{4}\left[4.0997 + 4.0457 + 4.1067 + 4.0357\right] = 4.071$$

$$C.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{4.0718 - 4}{3} = 0.0293$$

$$C.R = \frac{0.0293}{0.9} = 0.0265 < 0.1 \quad o.k.$$

خلاصه محاسبات به صورت زیر می شود.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow w_A = \begin{bmatrix} 0.5324 \\ 0.2812 \\ 0.1453 \\ 0.0410 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{\max} = 4.0907, C.R = 0.033 < 0.1$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار A

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 4 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow w_B = \begin{bmatrix} 0.0594 \\ 0.1747 \\ 0.4923 \\ 0.2735 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{\max} = 4.0574, C.R = 0.0202 < 0.1$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار B

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 5 & 2 & 1 & \frac{1}{4} \\ 9 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow w_C = \begin{bmatrix} 0.0471 \\ 0.1273 \\ 0.2112 \\ 0.6152 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{\max} = 4.1067, C.R = 0.0268 < 0.1$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار C

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R & F & V & P \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ F \\ V \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 \\ 5 & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow w_D = \begin{bmatrix} 0.0908 \\ 0.2696 \\ 0.5842 \\ 0.0547 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{\max} = 4.0357, C.R = 0.0903 < 0.1 \quad o.k$$

مقایسه جفتی چهار ماشین در معیار D

و امتیاز نهایی هر گزینه به صورت زیر می‌شود:

$$p = (0.5215, 0.1334, 0.0518, 0.2933) \times \begin{bmatrix} 0.5324 & 0.0594 & 0.0471 & 0.0908 \\ 0.2812 & 0.1747 & 0.1273 & 0.2696 \\ 0.1453 & 0.4923 & 0.2112 & 0.5842 \\ 0.0410 & 0.2735 & 0.6152 & 0.0544 \end{bmatrix} = (0.3148 \quad 0.2555 \quad \underline{0.3238} \quad 0.1060)$$

لذا گزینه V انتخاب می‌شود.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**