

درس ۲۰:

فرایند تحلیل سلسله مراتبی یا *AHP*

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

روش تحلیل سلسله مراتبی یا **AHP** یا **Analytical Hierarchy Process** یک روش تصمیم گیری چند معیاره یا **Multiple-criteria decision-making** یا **MCDM** است. این روش توسط آقای **توماس ساعتی** (Thomas Saaty) در دهه هشتاد میلادی ابداع شد. در این روش قضاوت افراد خبره در مورد مساله مورد بحث خواهد گرفت.

خلاصه گام‌های حل یک مسئله تصمیم گیری چند معیار با استفاده از روش **AHP** به صورت زیر است:

گام (۱) تعریف به صورت سلسله مراتب درختی: در این گام مسئله به صورت یک سلسله مراتب چند سطحی تعریف می‌شود: در سطح ۱ هدف مساله، در سطح ۲ معیارها و در سطح ۳، آلترناتیوها یا گزینه‌ها تشکیل می‌دهند. هر یک از عناصر موجود در این سلسله مراتب به صورت گره نمایش داده می‌شود و ارتباط ما بین عنصرهای یک سطح و سطح دیگر از طریق یال مشخص می‌شود. بین عناصر در یک سطح یال موجود نیست. البته هر سطح اصلی می‌تواند دارای زیر سطح فرعی نیز باشد. برای روش شدن موضوع یک مثال می‌زنیم.

مثال انتخاب یک شغل

فرض کنید که جهت انتخاب شغل آینده چهار معیار زیر در نظر است:

✓ میزان حقوق سالانه (SAL)

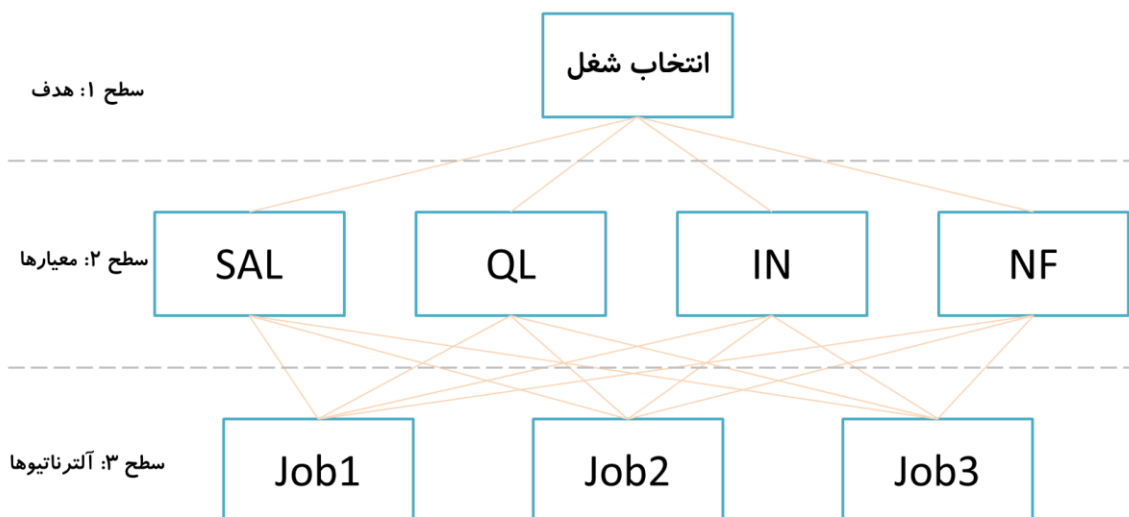
✓ محیط کاری (QL)

✓ علاقه مندی به شغل (IN)

✓ محل کار (NF)

با توجه به این معیارها می‌خواهیم از بین سه پیشنهاد شغلی Job_1 ، Job_2 و Job_3 یکی را انتخاب

کنیم. نمایش سلسله مراتبی این انتخاب به صورت زیر می‌شود:



گام ۲) تعیین اهمیت هر معیار از دید تصمیم گیرنده یا فرد خبره: در این گام با استفاده از نظر تصمیم گیرنده یا تصمیم گیرندگان یا افراد خبره، اهمیت نسبی معیارهای نسبت به هم تعیین می‌شود و با استفاده از **روش انتخاب وزن**، وزن w_i معیار i -ام تخصیص می‌یابد. برای محاسبه وزن n معیار فرض می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

گام ۳) تعیین امتیاز نسبی هر آلترناتیو با توجه به معیارها: در این گام امتیاز نسبی آلترناتیو j نسبت به معیار i بدست می‌آید که به صورت S_{ij} نمایش می‌دهیم و بیانگر علاقه نسبی به آلترناتیو i با توجه به معیار i است. محاسبه S_{ij} با استفاده از روش تخصیص امتیاز نسبی و با کمک اطلاعات ورودی از تصمیم گیرندگان انجام می‌شود. در این حالت نیز فرض می‌شود که:

$$\sum_{j=1}^m S_{ij} = 1 \quad \forall i$$

	Job1	Job2	Job3
SAL	0.571	0.286	0.143
QL	0.159	0.252	0.589
IN	0.088	0.669	0.243
NF	0.069	0.425	0.506

$$\rightarrow = 0.571 + 0.286 + 0.143 = 1$$

گام ۴: محاسبه امتیاز نهایی هر آلترناتیو: در این گام امتیاز نهایی هر آلترناتیو با استفاده از وزن

نسبی هر معیار و امتیاز نسبی آلترناتیو z نسبت به تمامی معیارها به صورت محاسبه می‌شود:

$$P_j = \sum_{i=1}^n w_i S_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, m$$

گام ۵: انتخاب بهترین آلترناتیو: آلترناتیو یا گزینه ای انتخاب می‌شود که $\max_j \{P_j\}$ داشته باشد.

یکی از مهمترین مزایا روش **AHP** تعیین میزان ناسازگاری قضاوت‌های تصمیم گیرنده است. برای مثال اگر معیار A دو برابر B و معیار B سه برابر معیار C اهمیت داشته باشد، از دید یک **فرد کاملاً منطقی** باید اهمیت معیار A نسبت به معیار C ، شش برابر باشد. اما از دید انسان‌ها که کاملاً منطقی نیستند ارزش گذاری اهمیت نسبی هر دو معیار نسبت به هم می‌تواند کاملاً براساس نظر تصمیم گیرنده تعیین شود. با استفاده از روش **AHP** می‌توان میزان سازگاری تصمیم گیران را محاسبه کرد و در صورت ناسازگار بودن تصمیم گیر، وی را از فرایند انتخاب تصمیم نهایی حذف کرد.

در ادامه این جزوه، گام‌های اشاره شده در بالا با جزییات بیشتر بیان می‌شود.

روش انتخاب وزن هر معیار Assign weights to criteria

فرض کنید n معیار در مساله موجود است. ابتدا با نظر تصمیم گیرنده (یا افراد خبره) **ماتریس**

مقایسه جفتی (**Pairwise Comparison Matrix**) $A_{n \times n}$ را تشکیل می‌دهیم که در آن هر عنصر a_{ij} بیانگر

آن است که از دید تصمیم گیرنده چقدر معیار i -م نسبت به معیار j -ام دارای اولویت است.

جهت انجام این مقایسه، از سیستم مقیاس عددی زیر استفاده می‌شود.

a_{ij}	نوع اهمیت
1	اهمیت یکسان
3	اهمیت ضعیف
5	اهمیت قوی
7	اهمیت خیلی قوی
9	اهمیت مطلق

در هنگام تشکیل این ماتریس سه نکته زیر رعایت را باید مدنظر گرفت.

نکته ۱: اگر معیار i ام k برابر معیار j - ام اهمیت داشته باشد معیار j - ام $1/k$ معیار i - ام اهمیت دارد. به این اصل، **اصل وارستگی** اتلاق می‌شود.

نکته ۲: $a_{ii} = 1$

برای مثال می‌توانید در ماتریس مقایسه جفتی دو نکته فوق را مشاهده کرد.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{SAL} & \text{QL} & \text{IN} & \text{NF} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{SAL} \\ \text{QL} \\ \text{IN} \\ \text{NF} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0 & 5 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

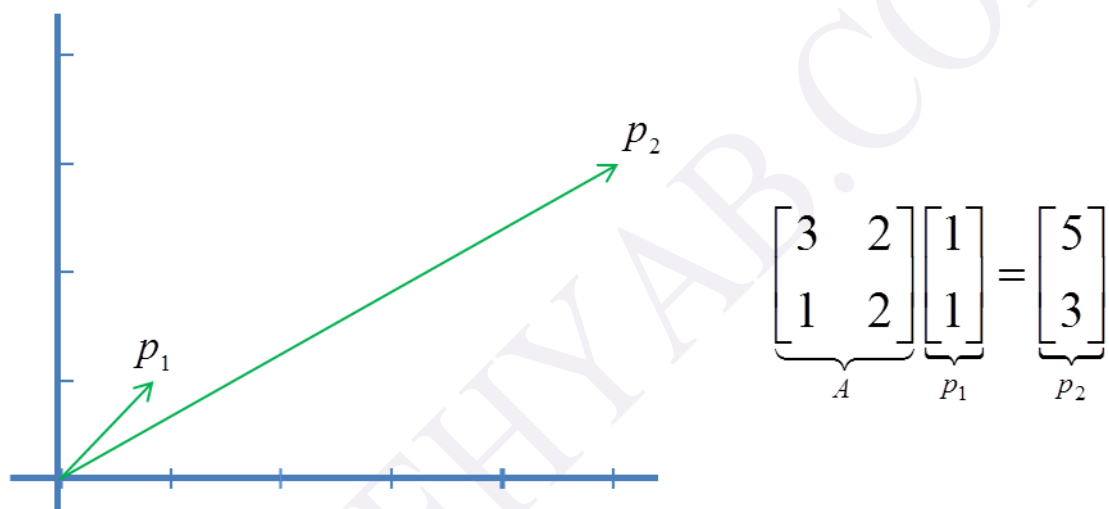
برای مسئله انتخاب شغل

نکته ۳: مرتبه یا رنک $Rank$ این ماتریس برابر یک است.

در روش *AHP*، ابتدا باید ماتریس مقایسه‌های جفتی A که اولویت معیارها را نسبت به هم مشخص می‌کند تبدیل به بردار می‌شود که در حقیقت این بردار وزن هر معیار را مشخص می‌کند.

A ماتریس مقایسات جفتی $\leftarrow W$ بردار وزن

یک ماتریس در حقیقت یک **تبدیل خطی** یا *Linear Transformation* را می‌تواند بر روی یک بردار اعمال کند. برای مثال داریم:



برای تعیین وزن معیارها نیاز به تعاریف زیر است:

بردار ویژه یا *Eigen Vectors* برداری است که وقتی تبدیل خطی بر روی آن اعمال شود فقط طول آن تغییر می‌کند و نه جهت آن.

مقدار ویژه یا *Eigen Value* در حقیقت اندازه این تغییر طول را مشخص می‌کند. برای مثال داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Av = \lambda v \rightarrow Av - \lambda v = 0 \rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

$$\xrightarrow{\det(v) \neq 0} \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = -1, 3$$

جهت تبدیل ماتریس A به یک بردار وزنی از مفهوم بردار ویژه استفاده می‌کنیم.

$$Aw^T = \lambda w^T$$

که در آن:

A ماتریس مقایسات جفتی،

w^T بردار ویژه یا همان بردار وزنی و

λ مقدار ویژه هستند.

در این سیستم معادلات w^T و λ مجهول هستند. فرم گسترده معادله فوق به صورت زیر می‌شود.

$$Aw^T = \lambda w^T \rightarrow \begin{aligned} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n &= \lambda w_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n &= \lambda w_2 \\ &\dots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nn}w_n &= \lambda w_n \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

و همچنین باید $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد که از روی آن λ تعیین می‌شود و سپس با حل دستگاه فوق

$w_1, w_2, \dots, w_n$ را بدست می‌آوریم. در عمل به دلیل وقت گیر بودن سعی می‌کنیم از روش‌های تخمینی که

با دقت کافی این مقادیر را بدست می‌آورد استفاده کنیم.

توجه: برای مطالعه ادامه روش AHP و حل مثال‌ها با حل تشریحی، جزوه این

درس را از طریق وب سایت بهینه یاب به نشانی www.behinehyab.com تهیه

فرمایید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی **behinehyab@gmail.com** و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**