به نام خدا

درس ۲۰: تحلیل سلسله مراتبی یا AHP

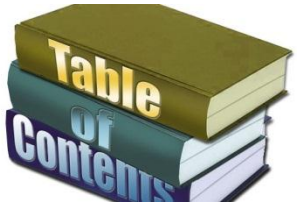
فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

۳ نحوه محاسبه وزن ها

۴ تمرین با حل تشریحی



مقدمه

روش تحلیل سلسله مراتبی یا *AHP* یا *Analytical Hierarchy Process* یک روش تصمیم گیری چند معیاره یا *Multiple-criteria decision-making* یا *MCDM* است. این روش توسط آقای توماس ساعتی (*Thomas Saaty*) در دهه هشتاد میلادی ابداع شد

خلاصه گام‌های حل یک مسئله تصمیم گیری چند معیار با استفاده از روش *AHP* به صورت زیر است:

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

گام ۱) تعریف به صورت سلسله مراتب درختی: در این گام مسئله به صورت یک سلسله مراتب چند سطحی تعریف می‌شود: در سطح ۱ هدف مساله، در سطح ۲ معیارها و در سطح ۳، آلترناتیوها یا گزینه‌ها تشکیل می‌دهند. هر یک از عناصر موجود در این سلسله مراتب به صورت گره نمایش داده می‌شود و ارتباط ما بین عنصرهای یک سطح و سطح دیگر از طریق یال مشخص می‌شود. بین عناصر در یک سطح یال موجود نیست. البته هر سطح اصلی می‌تواند دارای زیر سطح فرعی نیز باشد. برای روشن شدن موضوع یک مثال می‌زنیم.

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

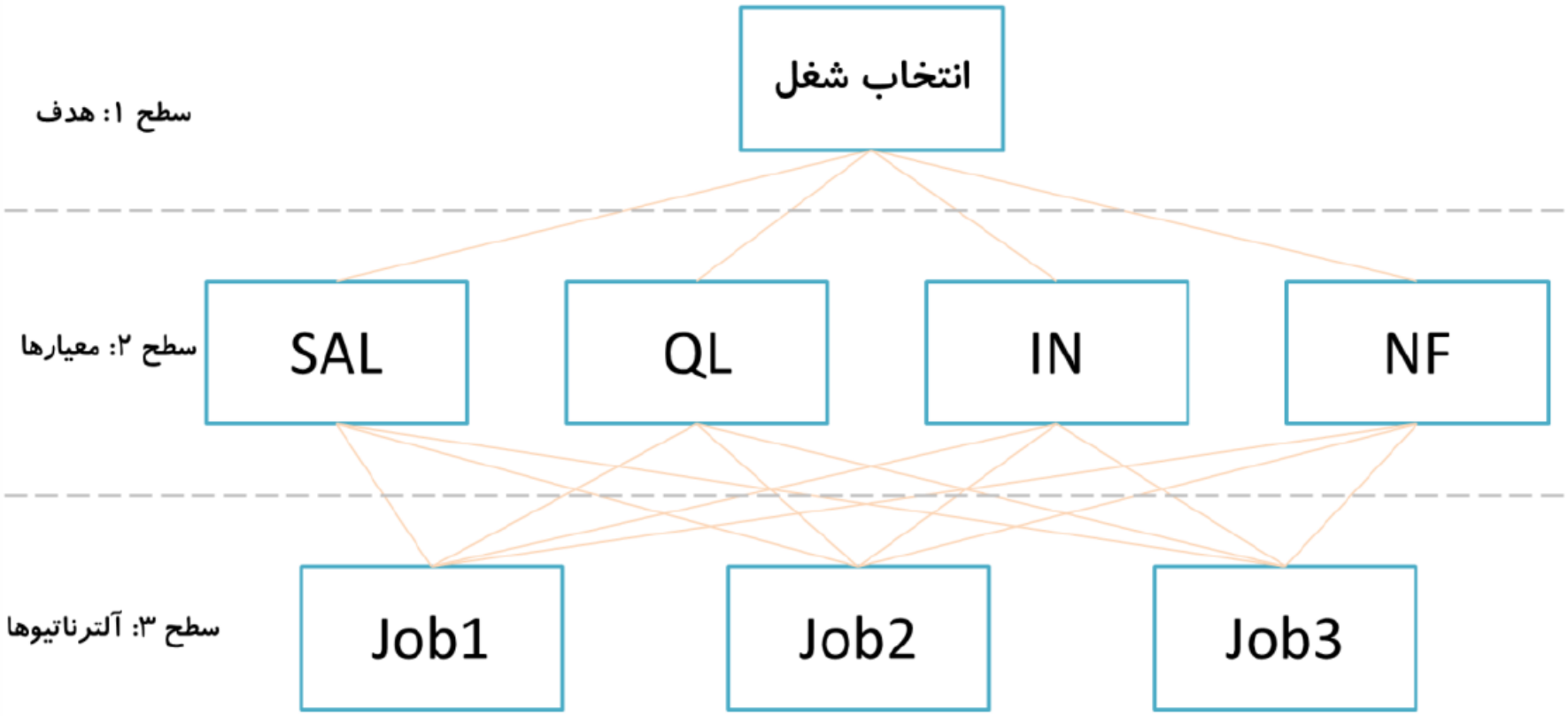
مثال انتخاب یک شغل

فرض کنید که جهت انتخاب شغل آینده چهار معیار زیر در نظر است:

- ✓ میزان حقوق سالانه (*SAL*)
- ✓ محیط کاری (*QL*)
- ✓ علاقه مندی به شغل (*IN*)
- ✓ محل کار (*NF*)

با توجه به این معیارها می‌خواهیم از بین سه پیشنهاد شغلی *Job*۱ ، *Job*۲ و *Job*۳ یکی را انتخاب کنیم. نمایش سلسله مراتبی این انتخاب به صورت زیر می‌شود:

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی



مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

گام ۲) تعیین اهمیت هر معیار از دید تصمیم گیرنده یا فرد خبره: در این گام با استفاده از نظر تصمیم گیرنده یا تصمیم گیرندگان یا افراد خبره، اهمیت نسبی معیارهای نسبت به هم تعیین می‌شود و با استفاده از روش انتخاب وزن، وزن w_i معیار i –ام تخصیص می‌یابد. برای محاسبه وزن n معیار فرض می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad , \quad w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

گام ۳) تعیین امتیاز نسبی هر آلترناتیو با توجه به معیارها: در این گام امتیاز نسبی آلترناتیو j نسبت به معیار i بدست می آید که به صورت S_{ij} نمایش می‌دهیم و بیانگر علاقه نسبی به آلترناتیو j با توجه به معیار i است. محاسبه S_{ij} با استفاده از روش تخصیص امتیاز نسبی و با کمک اطلاعات ورودی از تصمیم گیرندگان انجام می‌شود. در این حالت نیز فرض می‌شود که:

$$\sum_{j=1}^{m} S_{ij} = 1 \quad \forall i$$

مراحل روش تحلیل سلسله مراتبی

گام ۴: محاسبه امتیاز نهایی هر آلترناتیو: در این گام امتیاز نهایی هر آلترناتیو با استفاده از وزن نسبی هر معیار و امتیاز نسبی آلترناتیو j نسبت به تمامی معیارها به صورت محاسبه می‌شود:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} w_i S_{ij} \quad \forall j = 1,\ldots,m$$

گام ۵: انتخاب بهترین آلترناتیو: آلترناتیو یا گزینه ای انتخاب می‌شود که $\underset{j}{Max}\{P_j\}$ داشته باشد.

نحوه محاسبه وزن ها

روش انتخاب وزن هر معیار Assign weights to criteria

فرض کنید n معیار در مساله موجود است. ابتدا با نظر تصمیم گیرنده (یا افراد خبره) ماتریس مقایسه جفتی (*Pairwise Comparison Matrix*) $A_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهیم که در آن هر عنصر a_{ij} بیانگر آن است که از دید تصمیم گیرنده چقدر معیار i –ام نسبت به معیار j–ام دارای اولویت است.

جهت انجام این مقایسه، از سیستم مقیاس عددی زیر استفاده می‌شود.

a_{ij}	نوع اهمیت
1	اهمیت یکسان
3	اهمیت ضعیف
5	اهمیت قوی
7	اهمیت خیلی قوی
9	اهمیت مطلق

نحوه محاسبه وزن ها

در هنگام تشکیل این ماتریس سه نکته زیر رعایت را باید مدنظر گرفت.

نکته ۱: اگر معیار i ام k برابر معیار j ام اهمیت داشته باشد معیار j ام $1/k$ معیار i ام اهمیت دارد.

به این اصل، **اصل وارانگی** اتلاق می‌شود.

نکته ۲: $a_{ii} = 1$

نکته۳: مرتبه یا رنک *Rank* این ماتریس برابر یک است.

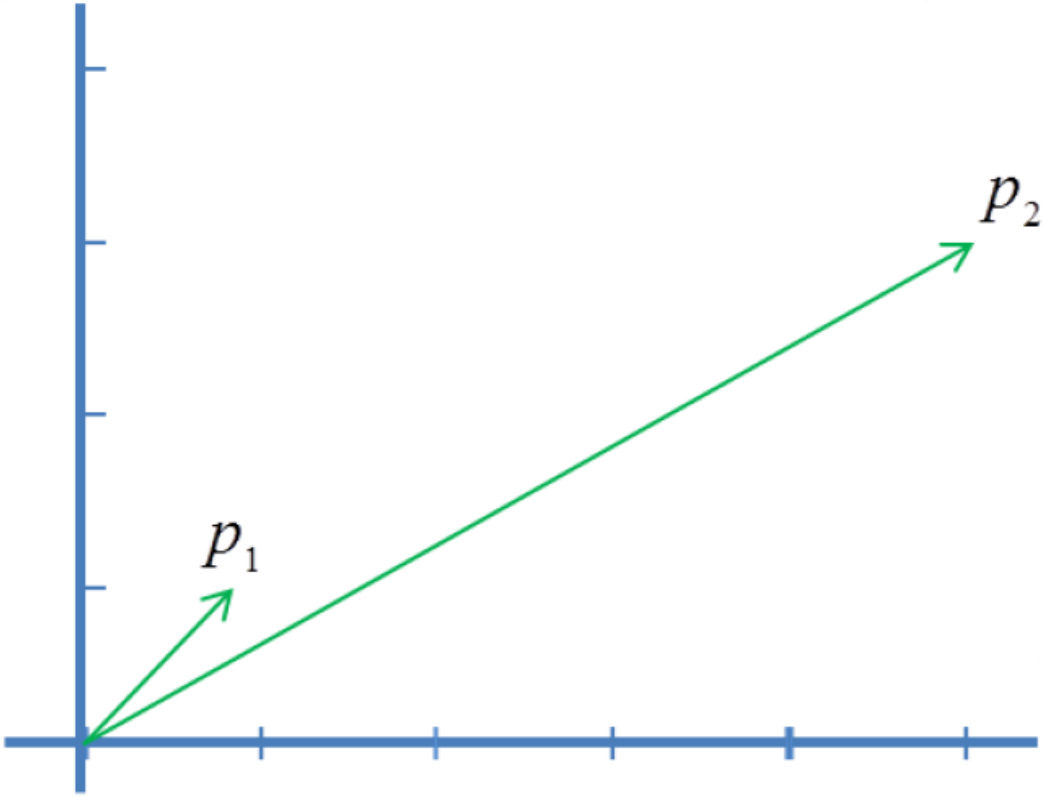
$$A = \begin{array}{c} \\ \text{SAL} \\ \text{QL} \\ \text{IN} \\ \text{NF} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{SAL} & \text{QL} & \text{IN} & \text{NF} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 5 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نحوه محاسبه وزن ها

در روش *AHP*، ابتدا باید ماتریس مقایسه‌های جفتی A که اولویت معیارها را نسبت به هم مشخص می‌کند تبدیل به بردار می‌شود که در حقیقت این بردار وزن هر معیار را مشخص می‌کند.

ماتریس مقایسات جفتی A ⟵ بردار وزن w

نحوه محاسبه وزن ها



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}_{p_2}$$

نحوه محاسبه وزن ها

برای تعیین وزن معیارها نیاز به تعاریف زیر است:

بردار ویژه یا *Eigen Vectors* برداری است که وقتی تبدیل خطی بر روی آن اعمال شود فقط طول آن تغییر می‌کند و نه جهت آن.

مقدار ویژه یا *Eigen Value* در حقیقت اندازه این تغییر طول را مشخص می‌کند. برای مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow Av=\lambda v \rightarrow Av-\lambda v=0 \rightarrow (A-\lambda I)v=0$$

$$\longrightarrow \det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda=-1,3$$

نحوه محاسبه وزن ها

جهت تبدیل ماتریس A به یک بردار وزنی از مفهوم بردار ویژه استفاده می‌کنیم.

$$Aw^T = \lambda w^T$$

که در آن:

A ماتریس مقایسات جفتی،

w^T بردار ویژه یا همان بردار وزنی و

λ مقدار ویژه هستند.

در این سیستم معادلات w^T و λ مجهول هستند.

نحوه محاسبه وزن ها

$$Aw^T = \lambda w^T \rightarrow \begin{aligned} &a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n = \lambda w_1 \\ &a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n = \lambda w_2 \\ &\ldots \\ &a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n = \lambda w_n \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$$

و همچنین باید $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد که از روی آن λ تعیین می‌شود و سپس با حل دستگاه فوق $w_1, w_2, \ldots, w_n$ را بدست می آوریم. در عمل به دلیل وقت گیر بودن سعی می‌کنیم از روش‌های تخمینی که با دقت کافی این مقادیر را بدست می آورد استفاده کنیم.

نحوه محاسبه وزن ها

روش اول: ماتریس A سازگار باشد

اگر ماتریس A سازگار باشد، در این حالت ماتریس مقایسات جفتی به صورت ذیل از سوی تصمیم گیرنده تعیین می شود.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \ddots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \rightarrow \quad a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

نحوه محاسبه وزن ها

روش دوم: ماتریس A ناسازگار باشد.

در این حالت توماس ساعتی نشان داد که مقادیر ویژه ماتریس A دارای خواص زیر است:

۱- اگر $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسات جفتی باشند آنگاه $\sum_i \lambda_i = n$

۲- محاسبه مقدار سازگاری ماتریس A با پارامتری به نام شاخص سازگاری یا *Consistency Index* که به اختصار *CI* است محاسبه می‌شود که به صورت زیر است:

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

نحوه محاسبه وزن ها

نکته: اگر مقدار ناسازگاری نسبتا کم باشد آنگاه $\lambda_{\max} \approx n$ و $C.I.$ نسبتا کوچک است و w حاصل از به کارگیری $\lambda_{\max}$ به مقدار واقعی w نزدیک است.

مقادیر شاخص سازگاری جهت ماتریس‌های تصادفی (که اعداد آن کاملا به صورت تصادفی تولید شده اند) به نام **شاخص سازگاری تصادفی** یا ***R.C.I*** یا ***Random Consistency Index*** نامیده می‌شود و متوسط آن برای ماتریس‌های تصادفی با رتبه n به صورت جدول زیر است.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RCI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

نحوه محاسبه وزن ها

نرخ سازگاری یا ***C.R*** یا ***Consistency Ratio*** ماتریس مقایسه جفتی A، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C.R = \frac{C.I}{R.C.I}$$

نکته: توماس ساعتی نشان داد که اگر $C.R \le \frac{1}{10}$ باشد درجه سازگاری ماتریس A قابل قبول است.

نحوه محاسبه وزن ها

روش اول: روش مجموع ستونی

روش مجموع ستونی برای تخمین w در حالتی که A سازگار نیست به صورت مراحل زیر انجام می‌شود.

گام ۱: مقادیر عناصر هر یک از ستون‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

گام ۲: هر عنصر موجود در هر ستون را بر مجموع عناصر بدست آمده از آن ستون تقسیم می‌کنیم تا ماتریس A_{norm} بدست آید.

گام ۳: w_i برابر متوسط عناصر موجود در ردیف i–ام ماتریس A_{norm} است.

نحوه محاسبه وزن ها

مثال: ماتریس مقایسات جفتی A به صورت زیر داده شده است.

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & 5 & 2.0 & 4.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0\\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}$$

برای یافتن بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

گام ۱: مقادیر عناصر هر یک از ستون ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & 5 & 2.0 & 4.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0\\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1.95 & 10 & 4 & 7.5\end{bmatrix}$$

$1.95 = 1+0.2+0.5+0.25$

$10 = 5+1+2+2$

$4 = 2+0.5+1+0.5$

$7.5 = 4+0.5+2+1$

نحوه محاسبه وزن ها

گام ۲: هر عنصر موجود در هر ستون را بر مجموع عناصر بدست آمده از آن ستون تقسیم می‌کنیم تا ماتریس A_{norm} بدست آید. در این مثال داریم:

$$A_{norm} = \begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{1.95}}^{0.5128} & \frac{5}{10} & \frac{2}{4} & \overbrace{\frac{8}{15}}^{0.5333} \\ \overbrace{\frac{0.2}{1.95}}^{0.1026} & \frac{1}{10} & \frac{0.5}{4} & \overbrace{\frac{0.5}{7.5}}^{0.0667} \\ \overbrace{\frac{0.5}{1.95}}^{0.2564} & \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & \overbrace{\frac{1}{7.5}}^{0.2666} \\ \overbrace{\frac{0.25}{1,95}}^{0.1025} & \frac{2}{10} & \frac{0.5}{4} & \overbrace{\frac{1}{7.5}}^{0.1333} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0.5 \\ 0.500 \\ 0.1 \\ 0.125 \\ 0.2 \\ 0.250 \\ 0.2 \\ 0.125 \end{matrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

گام ۳: w_i برابر متوسط عناصر موجود در ردیف i–ام ماتریس A_{norm} است. در این مثال داریم:

$$A_{norm}=\begin{bmatrix}0.5128 & 0.5 & 0.500 & 0.5333\\ 0.1026 & 0.1 & 0.125 & 0.0667\\ 0.2564 & 0.2 & 0.250 & 0.2666\\ 0.1025 & 0.2 & 0.125 & 0.1333\end{bmatrix} \rightarrow w=\begin{bmatrix}\overbrace{\frac{0.5128+0.5+0.5+0.533}{4}}^{0.5115}\\ \overbrace{\frac{0.1026+0.1+0.125+0.0667}{4}}^{0.0986}\\ \overbrace{\frac{0.2564+0.2+0.25+0.2666}{4}}^{0.2433}\\ \overbrace{\frac{0.1025+0.2+0.125+0.1333}{4}}^{0.1466}\end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

روش دوم: روش میانگین هندسی

میانگین هندسی k عدد $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ به صورت $\sqrt[k]{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$ بدست می‌آید. در این روش مراحل زیر را پیگیری می کنید.

گام ۱: ابتدا میانگین هندسی عناصر سطر i –ام را بدست می‌آوریم.

گام ۲: جهت تعیین بردار نرمالایزه شده وزنی کافی است هر عنصر بردار ستونی میانگین هندسی را بر مجموع عناصر بردار تقسیم کنیم.

نحوه محاسبه وزن ها

برای مثال اگر ماتریس جفتی به صورت زیر در اختیار باشد.

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0\\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}$$

آنگاه برای محاسبه بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}\sqrt[4]{1\times5\times2\times4}\\ \sqrt[4]{0.2\times1\times0.5\times0.5}\\ \sqrt[4]{0.5\times2\times1\times2}\\ \sqrt[4]{0.25\times2\times0.5\times1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.51\\ 0.47\\ 1.19\\ 0.70\end{bmatrix}\rightarrow\ w=\begin{bmatrix}0.51\\ 0.09\\ 0.24\\ 0.16\end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

روش سوم: محاسبه حدی

برای یافتن بردار وزنی نیاز به بیان قضیه زیر است:

قضیه: اگر A یک ماتریس مقایسه جفتی باشد در این صورت داریم:

$$W = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k . e}{e^T . A^k . e} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بر مبنای این قضیه می‌توان در توان‌های مختلف A بردار وزنی را بدست آورده و هر گاه اختلاف w^{k+1} و w^k ناچیز بود متوقف می شویم.

نحوه محاسبه وزن ها

مثال: ماتریس مقایسه جفتی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن بردار وزنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$k=1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.69 \\ 15 \\ 4.83 \\ 7.5 \end{bmatrix} \rightarrow w^{1}=\begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.516 \\ 0.166 \\ 0.258 \end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

برای $k=2$ داریم:

$$A^{2}=\begin{bmatrix} 4 & 0.458 & 1.5 & 0.88 \\ 35 & 4 & 13 & 7.75 \\ 11 & 1.25 & 4 & 2.41 \\ 18.5 & 2.11 & 6.82 & 4 \end{bmatrix}$$

$$k=2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6.84 \\ 59.75 \\ 18.66 \\ 31.44 \end{bmatrix} \rightarrow w^{2}=\begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.512 \\ 0.160 \\ 0.269 \end{bmatrix} \quad \bullet \bullet \bullet \quad w^{5}=\begin{bmatrix} 0.059 \\ 0.513 \\ 0.160 \\ 0.270 \end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

روش تخمین λ_{max}

گام ۱: در نظر بگیرید بردار w توسط یکی از روش‌های گفته شده قبلی به صورت w_0 تخمین زده شده باشد.

گام ۲: بردار v را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$v = A w_0^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

نحوه محاسبه وزن ها

گام ۳: انجام دهید $\lambda_i = \frac{v_i}{w_0^i} \quad i = 1,2,\ldots,n$

گام ۴: میانگین مقادیر λ_i **ها برابر** $\lambda_{\max}$ **است.**

نحوه محاسبه وزن ها

روش امتیاز دهی هر آلترناتیو نسبت به هر معیار

در این حالت تصمیم گیرنده باید ابتدا ماتریس مقایسات جفتی را مشخص کند که در آن هر عنصر a_{lk} اهمیت نسبی آلترناتیو i نسبت به آلترناتیو k را با توجه به معیار مشخص شده تعیین می‌کند. با استفاده از روش های بیان شده، برای هر ماتریس مقایسات جفتی، بردار امتیاز نسبی آلترناتیوها با توجه به معیار مشخص شده محاسبه می شود.

تمرین

مثال: برای تصمیم گیری در خصوص سه شغل، از چهار معیار میزان حقوق(*SAL*)، محیط کاری(*QL*)، علاقمندی به شغل (*IN*) و محل کار (*NF*) استفاده می شود. ماتریس مقایسات جفتی معیارهای چهارگانه و مقایسه جفتی سه شغل در هر معیار به صورت زیر است. کدام شغل با استفاده از روش *AHP* توصیه می‌شود.

$A =$ مقایسه جفتی معیارها

	SAL	QL	IN	NF
SAL	1.0	5.0	2.0	4.0
QL	0.2	1.0	0.5	0.5
IN	0.5	2.0	1.0	2.0
NF	0.25	2.0	0.5	1.0

تمرین

مقایسه جفتی سه شغل در معیار QL

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار SAL

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار NF

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار IN

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

تمرین

حل:

در ابتدا بردار وزنی چهار معیار با استفاده از روش مجموع ستونی محاسبه می‌شود.

$A =$ مقایسه جفتی معیارها

	SAL	QL	IN	NF
SAL	1.0	5.0	2.0	4.0
QL	0.2	1.0	0.5	0.5
IN	0.5	2.0	1.0	2.0
NF	0.25	2.0	0.5	1.0

$\longrightarrow$

$w =$

SAL	0.5116
QL	0.0986
IN	0.2433
NF	0.1466

مقایسه جفتی سه شغل در معیار SAL

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{SAL} = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.286 \\ 0.143 \end{bmatrix}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار QL

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{QL} = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{bmatrix} 0.1592 \\ 0.2580 \\ 0.5828 \end{bmatrix}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار IN

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{IN} = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{bmatrix} 0.088 \\ 0.669 \\ 0.243 \end{bmatrix}$$

مقایسه جفتی سه شغل در معیار NF

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow S_{NF} = \begin{array}{c} \\ \text{job1} \\ \text{job2} \\ \text{job3} \end{array} \begin{bmatrix} 0.0690 \\ 0.3197 \\ 0.6113 \end{bmatrix}$$

تمرین

با استفاده از امتیاز نسبی هر یک از معیارها و وزن معیارها، می‌توان امتیاز کلی را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\text{امتیاز کل} = [0.5116 \quad 0.0986 \quad 0.2433 \quad 0.1466] \times \begin{matrix} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \\ \begin{bmatrix} 0.571 & 0.286 & 0.143 \\ 0.159 & 0.251 & 0.588 \\ 0.088 & 0.664 & 0.243 \\ 0.069 & 0.319 & 0.616 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{job1} & \text{job2} & \text{job3} \\ [0.339 & 0.379 & 0.280] \end{matrix}$$

نتیجه نهایی: با توجه به امتیاز کلی، **شغل دوم** در اولویت انتخاب است. در ادامه سازگاری ماتریس‌های مقایسات جفتی محاسبه می‌شود.

تمرین

محاسبه معیار سازگاری ماتریس مقایسه جفتی معیارها

$$Aw_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.25 & 2.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overbrace{0.5116}^{w_0^1} \\ \overbrace{0.0986}^{w_0^2} \\ \overbrace{0.2433}^{w_0^3} \\ \overbrace{0.1466}^{w_0^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{2.0775}^{v_1} \\ \overbrace{0.3959}^{v_2} \\ \overbrace{0.9894}^{v_3} \\ \overbrace{0.5933}^{v_4} \end{bmatrix}$$

تمرین

با توجه به روش تخمینی λ_{max} داریم:

$$\lambda_i = \frac{v_i}{w_i} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2.0775}{0.5116} = 4.0616 \\ \lambda_2 = \dfrac{0.3959}{0.0989} = 4.0152 \\ \lambda_3 = \dfrac{0.9894}{0.2433} = 4.0666 \\ \lambda_4 = \dfrac{0.5933}{0.1466} = 4.0470 \end{cases}$$

مقدار میانگین λ_i ها برابر با ۴.۰۴۷۶ می‌شود لذا داریم: $\lambda_{max} = 4.0476$

تمرین

برای محاسبه مقدار شاخص سازگاری یا $C.I$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$C.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{4.0476 - 4}{3} = 0.0158$$

با توجه به جدول $R.C.I$، برای $n = 4$، داریم: $R.C.I = 0.9$. لذا نرخ سازگاری یا $C.R$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C.R = \frac{C.I}{R.C.I} = \frac{0.0158}{0.9} = 0.017 < 0.1 \quad o.k.$$

تمرین

روند فوق برای ماتریس مقایسه جفتی گزینه ها برای محاسبه نرخ سازگاری انجام می‌شود که نتایج آن در ادامه آمده است.

$$A_{SAL} \rightarrow C.I = 0 \rightarrow C.R = 0 < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{QL} \rightarrow C.I = 0.0269 \rightarrow C.R = 0.046 < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{IN} \rightarrow C.I = 2.1\times10^{-4} \rightarrow C.R = 3.4\times10^{-4} < 0.1 \quad o.k.$$

$$A_{NF} \rightarrow C.I = 0.0138 \rightarrow C.R = 0.0239 < 0.1 \quad o.k.$$

نوع ماتریس	A	A_{SAL}	A_{QL}	A_{IW}	A_{NF}
وزن	1	0.511	0.0986	0.2433	0.1466
C.I	0.0158	-	0.0269	0.0004	0.0138
R.C.I	0.9	0.58	0.58	0.58	0.58

تمرین

برای کل فرآیند تصمیم گیری، شاخص *O.C.R* به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$O.C.R = \frac{\text{مجموع وزن دار C.I. هر ماتریس}}{\text{مجموع وزن دار R.C.I هر ماتریس}}$$

که در این مثال مقدار *O.C.R* به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$O.C.R = \frac{(1\times 0.0158)+(0\times 0.5115)+(0.0986\times 0.0269)+(0.2433\times 0.0004)+(0.1466\times 0.0138)}{(1\times 0.9)+(0.5115\times 0.58)+(0.0986\times 0.58)+(0.2433\times 0.58)+(0.1466\times 0.58)}$$

$$\rightarrow O.C.R = 0.0139 < 0.1 \quad o.k.$$

تمرین

برای حل تمرین های تکمیلی در خصوص مباحث مطروحه، به جزوه این درس مراجعه کنید.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com