درس ۲۸:

روش تجزیه دانتزیگ – ولف

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مسائل چند بخشی (بلوکی)

الگوریتم **تجزیه دانتزیگ - ولف** اغلب توانایی حل مسائل بسیار بزرگ را دارد. خوشبختانه برای مسائلی که ماتریس ضرایب آن ها دارای ساختار خاص **زاویه ای**، مانند مسائل چندبخشی، باشد کارایی این الگوریتم بسیار افزایش می یابد. مسائل چندبخشی بخش های مستقلی دارند که با **تعدادی** محدودیت مشترک به هم مرتبط می شوند. در این گونه مسائل، محدودیت های مشترک، محدودیت های **سخت** تلقی می شوند که متغیرهای هر بخش در آن ها مشاهده می شود، به طوری که حذف این محدودیت ها مسئله را به مسائلی **مجزا** و **مستقل** تبدیل می کند. هر مسئله چندبخشی ساختاری خاص به شکل زیر دارد:

$$\operatorname{Max} z = C_1^T X_1 + C_2^T X_2 + \ldots + C_n^T X_n$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & A_1 X_1 && \le b_1 \\
& \quad A_2 X_2 && \le b_2 \\
& \qquad \ddots && \\
& \qquad\quad A_n X_n && \le b_n \\
& B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_n X_n \le h && \\
& X_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, n &&
\end{aligned}$$

در مدل بالا n (i=۱,...,n) بخش داریم که تعداد متغیرهای بخش i برابر با q_i است. h برداری ستونی با m مؤلفه (سطر) و X_i دارای q_i مؤلفه و b_i دارای m_j مؤلفه، هر B_i ماتریسی $m \times q_i$، هر A_i ماتریسی $m_j \times q_i$ است. توجه کنید که معادله آخر بیانگر محدودیت های **مشترک** بین بخش ها (بلوک ها) است و سایر معادلات، محدودیت های مختص هر بخش را نشان می دهد. از روش **دانتزیگ- ولف** می توان برای حل این گونه مسائل استفاده کرد.

الگوریتم تجزیه دانتزیگ-ولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مسئله مدل سازی به مسئله جدیدی با عنوان **مسئله اصلی** الگوریتم تجزیه که فقط شامل محدودیت های سخت است، استفاده می کند. از این رو، با کاهش تعداد محدودیت ها، مسئله با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به مسئله اولیه حل شدنی است. البته برای بررسی شرط بهینگی لازم است مسائل اضافی با محدودیت های آسان نیز حل شوند. این مسائل، **مسائل فرعی** الگوریتم دانتزیگ - ولف نامیده می شوند.

مسئله فرعی iام مسئله چندبخشی بالا به صورت زیر است:

$$\text{Max } z = C_i^T X_i$$

$$\text{s.t.} \quad A_i X_i \le b_1$$

$$X_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n$$

قضیه ۱: منطقه موجه مسائل برنامه ریزی خطی به صورت چندضلعی محدب است، در این صورت منطقه موجه هر یک از مسائل فرعی نیز چند ضلعی محدب است.

قضیه ۲: برای سادگی، فرض بر آن است که هر یک از مسائل فرعی مدل بالا دارایی منطقه موجه **محدود** هستند و مسئله فرعی iام دارای K_i **گوشه موجه** به صورت $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iK_i}$ است. اندیس j، jامین گوشه موجه هر یک از مسائل فرعی را نشان می دهد که از ۱ تا K_i است. در این صورت، منطقه موجه مسئله فرعی iام را می توان به صورت **ترکیب خطی محدب** از نقاط گوشه ای آن به صورت زیر نوشت:

$$X_i = \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} X_{ij} \quad \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1 \quad \delta_{ij} \ge 0$$

برای مثال فرض کنید مسئله چند بخشی به صورت زیر باشد:

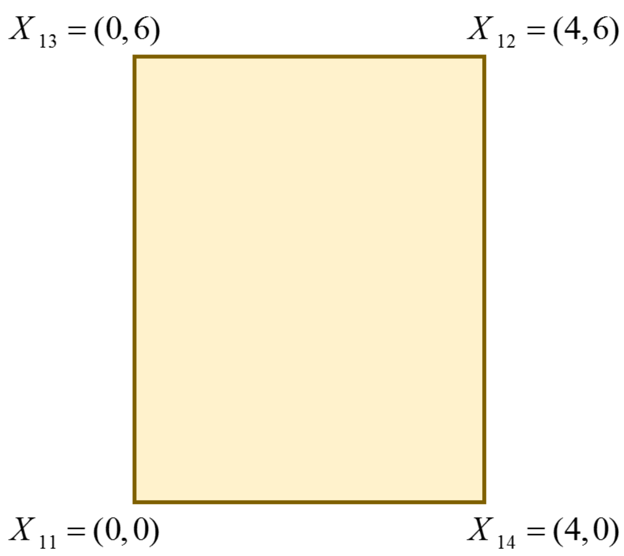
$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

مدل بالا، دارای یک محدودیت **مشترک** (محدودیت اول) و یک مسئله **فرعی** (محدودیت دوم و سوم) است. برای به دست آوردن نقاط گوشه ای مسئله فرعی آن، به روش ترسیمی عمل می کنیم:



شکل ۱- پوسته محدب یا منطقه موجه مسئله فرعی اول

هر نقطه داخل یا روی اضلاع این چهار ضلعی در شکل ۱را، که منطقه موجه مدل فرعی بالا است، می توان به صورت زیر که مجموع ترکیب محدب از نقاط گوشه موجه از آن ها، نوشت.

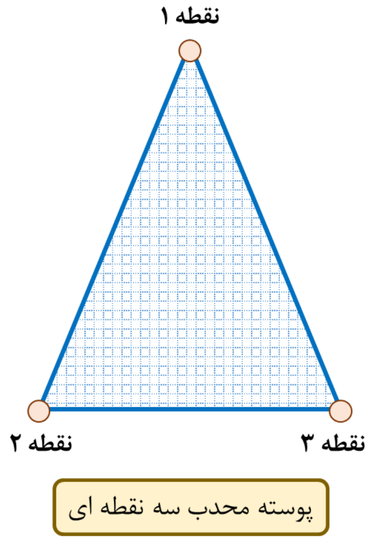
$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \delta_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_{12} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \delta_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \delta_{14} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

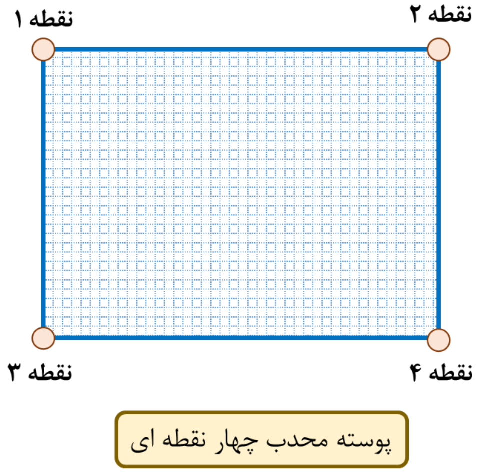
$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1 \qquad \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \ge 0$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\delta_{12} + 4\delta_{14} \\ 6\delta_{12} + 6\delta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1 \qquad \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \ge 0$$

مجموعه ترکیب محدب نقاط گوشه ای، **پوسته محدب** نامیده می شود. روشن است که مجموعه ترکیب پوسته محدب سه و چهار نقطه متمایز در صفحه که همه آن ها روی یک خط نیستند، به ترتیب تشکیل یک مثلث و مربع (مستطیل) را می دهند (شکل ۲).





شکل ۲- پوسته محدب سه نقطه ای و چهار نقطه ای

با جایگزین کردن $X_i = \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} X_{ij}$ از روی رابطه بالا به جای هر $X_i (i=1,\dots,n)$ و اضافه کردن محدودیت های $\sum_{i=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1$ و $\delta_{ij} \geq 0$ به جای محدودیت $A_i X_i \leq b_1$، مسئله چند بخشی بالا با شیوه کاهش تعداد محدودیت ها، به مسئله جدیدی برحسب δ_{ij}، که **مسئله اصلی** دانتزیگ - ولف نام دارد، بازنویسی می شود:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{k_1} \left(C_1^T X_{1j} \right) \delta_{1j} + \sum_{j=1}^{k_2} \left(C_2^T X_{2j} \right) \delta_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_n} \left(C_n^T X_{nj} \right) \delta_{nj}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{k_1} \delta_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k_2} \delta_{2j} = 1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \delta_{nj} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k_1} \left(B_1 X_{1j} \right) \delta_{1j} + \sum_{j=1}^{k_2} \left(B_2 X_{2j} \right) \delta_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_n} \left(B_2 X_{nj} \right) \delta_{nj} \leq h_0$$

$\delta_{ij} \geq 0 \quad i=1,\ldots n \quad j=1,\ldots,k_i$

مسئله اصلی بالا دارای m + n محدودیت یعنی برابر با تعداد محدودیت های سخت و تعداد مسائل فرعی است. به ازای هر گوشه موجه از هر مسئله فرعی، X_{ij}، یک متغیر به صورت δ_{ij} در مسئله اصلی در نظر می گیریم.

در مثال بالا، با جایگزین کردن مقدار x_1 بر حسب روابط بالا در تابع هدف و محدودیت های مشترک مسئله و در نظر گرفتن $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ و $\delta_{1j} \geq 0$، تعداد محدودیت های مسئله به دو محدودیت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\text{Max } z = 42\delta_{12} + 30\delta_{13} + 12\delta_{14}$$

$$\text{s.t.} \qquad 24\delta_{12} + 12\delta_{13} + 12\delta_{14} \leq 18$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \geq 0$$

مدل جدید بالا، **مسئله اصلی** دانتزیگ - ولف نام دارد. هر مسئله تبدیل یافته، یک مسئله برنامه ریزی خطی بوده که با استفاده از **روش سیمپلکس** حل شدنی است. با حل این مدل، $\delta_{12}=0.5$ و $\delta_{13}=0.5$ و سایر متغیرها برابر با صفر هستند؛ از این رو خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\delta_{12} + 4\delta_{14} \\ 4\delta_{12} + 6\delta_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب بهینه این مسئله عبارت است از:

$$x_1^0 = 2, \qquad x_2^0 = 6, \qquad z^0 = 36,$$

دقت کنید که در این روش، به ازای هر بخش با هر تعداد محدودیت فقط یک محدودیت جدید یعنی $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ به نام **قید تحدب** و به ازای هر تعداد محدودیت مشترک به **همان** تعداد محدودیت جدید تولید

می کنیم.

با توجه به بالا بودن تعداد نقاط گوشه ای به خصوص در مسائل بسیار بزرگ، معمولا به دلایل مختلفی امکان شناسایی این نقاط وجود ندارد. خوشبختانه در روش دانتزیگ- ولف نیازی به **دانستن تمام** نقاط گوشه ای هر یک از مسائل نیست و می توان با روش **تولید ستون**[1]، ستون مورد نیاز (ستون ورودی) را به دست آورد.

الگوریتم تجزیه دانتزیگ - ولف

در مسئله اصلی دانتزیگ - ولف، ضریب متغیر δ_{ij} در تابع هدف و محدودیت (محدودیت های) مشترک به ترتیب برابر با $C_i^T X_{ij}$ و $B_i X_{ij}$ و در محدودیت (سطر) iام برابر با یک و سایر محدودیت ها صفر است:

$$\begin{bmatrix} C_i^T X_{ij} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{سطر مربوط به قید تحدب iام}$$

به طور کلی ضرایب متغیرها در تابع هدف (بـه جـز ضـرایب متغیرهـای اساسـی شـروع مسـئله) بـا عبـارت $Z_j - C_j$ نشان داده می شوند که در اینجا به صورت $RC(\delta_{ij})$ نشان داده می شود. مقـدار آن بـرای متغیـر تصمیم δ_{ij}، با استفاده از رابطه زیر عبارت است از:

$$RC(\delta_{ij}) = Y \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} - C_i^T X_{ij}$$

---

[1] Column generation

که Y بردار قیمت های سایه[۲] است. بردار Y را می توان به دو قسمت تقسیم کرد: Y_i قیمت های سایه نظیر محدودیت تحدب مسئله فرعی iام (i=۱,...,n) و Y_{n+k} قیمت های سایه نظیر محدودیت مرکزی kام (k=۱,...,m) بر این اساس رابطه بالا به صورت زیر تعریف می شود:

$$RC(\delta_{ij}) = [Y_1 \ \cdots \ Y_n \ \ Y_{n+1} \cdots \ Y_{n+m}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} - C_i^T X_{ij}$$

با توجه به اینکه هدف، یافتن متغیر δ_{ij} که با منفی ترین ضریب در تابع هدف به منظور تعیین متغیر ورودی است، باید $RC(\delta_{ij})$ حداقل شود:

$$\underset{i=1,\dots,n}{\text{Min}}\left\{\underset{j=1,\dots,K_i}{\text{Min}}\left(RC(\delta_{ij})\right) = \underset{i=1,\dots,n}{\text{Min}}\left\{\underset{j=1,\dots,K_i}{\text{Min}}\left\{Y_i + [Y_{n+1} \dots Y_{n+m}] B_i X_{ij} - C_i^T X_{ij}\right\}\right.\right.$$

به ازای هر مسئله فرعی i=۱,...,n، مسئله $\underset{j=1,\dots,K_i}{\text{Min}}\{Y_i + [Y_{n+1} \dots Y_{n+m}], B_i X_{ij} - C_i^T X_{ij}\}$ حل می شود. اما با یادآوری این نکته که X_i نقاط گوشه ای مجموعه محدب مسئله فرعی iام است، این مجموعه محدودیت ها را باید با تابع هدف بالا در نظر گرفت. از این رو، iامین مسئله فرعی جهت یافتن ضرایب متغیر δ_{ij}، معادل با حل مسئله زیر است:

$$\text{Min}\, z = \{[Y_{n+1} \ \dots \ Y_{n+m}] B_i - C_i^T\} x_i + Y_i$$

$$\text{s.t.} \qquad A_i x_i \le b_i,$$

$$x_i \ge 0$$

بر این اساس، برای محاسبه کوچکترین ضریب کاهش هزینه، کافی است به ازای هر i=۱,...,n، i امین مسئله فرعی را حل کنیم. سپس مقدار تابع هدف مسئله فرعی با کمترین مقدار مشخص می شود.

[۲] Shadow price

مراحل الگوریتم دانتزیگ - ولف

مراحل الگوریتم دانتزیگ – ولف به صورت زیر بیان می شود:

مرحله اول: شناسایی یک نقطه کوشه به ازای هر مسئله فرعی و تشکیل مسئله اصلی محدود[۳]

برای مسائل فرعی ۱ تا n، یک نقطه گوشه ای پیدا می کنیم و آن را با X_{i1} نشان می دهیم و ضریب آن را δ_{i1} قرار می دهیم. به ازای هر i=۱,…,n، $K_i=1$ را در نظر می گیریم. یعنی تعداد نقاط گوشه ای هر مسئله فرعی را **یک** می گیریم. مسئله اصلی محدود را با توجه به نقاط گوشه ای X_{i1}، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

$$\text{Max } z=\left(C_1^T X_{11}\right)\delta_{11}+\left(C_2^T X_{21}\right)\delta_{21}+\ldots+\left(C_n^T X_{n1}\right)\delta_{n1}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & \delta_{11}=1\\
& \delta_{21}=1\\
& \vdots\\
& \delta_{n1}=1\\
& \left(B_1X_{11}\right)\delta_{11}+\left(B_2X_{21}\right)\delta_{21}+\ldots+\left(B_2X_{n1}\right)\delta_{n1}\le h,\\
& \delta_{i1}\ge 0\quad i=1,\ldots,n
\end{aligned}$$

مرحله دوم: حل مسائل فرعی و ارزیابی بهینگی

مسئله اصلی محدود بالا را حل می کنیم. تابع هدف مسائل فرعی را با توجه به جواب مسئله اصلی محدود و مشخص شدن قیمت های سایه، تشکیل می دهیم یا اصلاح می کنیم. محدودیت های مربوط به مسائل فرعی نیز مشخص است. با حل مسائل فرعی، با **دو حالت** ممکن رو به رو می شویم:

۱. در صورت **نامنفی بودن** تابع هدف همه مسائل فرعی، جواب فعلی مسئله اصلی محدود، جواب

---

[۳] Restricted master problem

بهینه مسئله اصلی است و در نتیجه توقف می کنیم.

۲. در صورت **منفی بودن** حداقل یکی از توابع هدف مسائل فرعی، مسئله فرعی با منفی ترین تابع هدف را شناسایی می کنیم. از آنجا که مسئله اصلی در دسترس است، متغیر ورودی بعد از آن را با فرض اینکه مسئله فرعی iام دارای منفی ترین مقدار است، δ_{i2} در نظر می گیریم و به مسئله اصلی محدود شده **اضافه** می کنیم. در واقع این متغیر به پایه فعلی اضافه می شود. سپس مجدد **مرحله دوم** را تکرار می کنیم.

توجه: در هر تکرار برای تشکیل مسائل فرعی، فقط ضرایب تابع هدف تغییر می کند. برای این منظور قیمت های سایه ای حاصل از حل مسئله اصلی محدود را می گیریم و در تابع هدف آن ها لحاظ می کنیم.

توجه: روشن است که محدودیت های هر مسئله فرعی، از یک تکرار به تکرار دیگر تغییر نمی کند.

مثال ۱: مسئله زیر را به روش دانتزیگ - ولف حل کنید.

$$\text{Mix}\, z = -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 12$$

$$3x_1 - x_2 \le 15$$

$$x_3 + x_4 \le 5$$

$$-x_3 + x_4 \le 15$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 19$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \le 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

حل:

نقاط گوشه ای مسئله فرعی اول و ضریب آن در ترکیب محدب به ترتیب، $X_{1j}=(x_1,x_2)$ و δ_{1j}؛ نقاط گوشه مسئله فرعی دوم و ضریب آن در ترکیب محدب به ترتیب، $X_{2j}=(x_3,x_4)$ و δ_{2j} هستند. بر این اساس، هر کدام از δ_{1j} و δ_{2j} را در تابع هدف، قید تحدب و قید مرکزی ظاهر می شود.

ضریب δ_{1j} در تابع هدف مسئله اصلی برابر با

$$-3x_1+7x_2$$

است. همچنین ضریب δ_{ij} در محدودیت محدب مسئله فرعی اول برابر با یک، در محدودیت محدب سایر مسائل فرعی برابر با صفر و در محدودیت مرکزی اول و دوم به ترتیب برابر با $(2x_1-x_2)$ و $(-2x_1+2x_2)$ است. ستون عمومی آن در مسئله اصلی به صورت $\begin{bmatrix}1\\0\\2x_1-x_2\\-2x_1+2x_2\end{bmatrix}$ است.

به همین ترتیب، ضریب δ_{2j} در تابع هدف مسئله اصلی برابر است با:

$$5x_3+4x_4$$

ستون عمومی آن در مسئله اصلی به صورت $\begin{bmatrix}0\\1\\2x_3+2x_4\\x_3-3x_4\end{bmatrix}$ است.

مسئله اصلی شامل ۴ محدودیت است. متناظر با هر محدودیت، یک متغیر دوگان یا همزاد در نظر می گیریم.

تعریف متغیر	بیان متغیر
متغیر دوگان متناظر با محدودیت تحدب مسئله فرعی اول	λ_1
متغیر دوگان متناظر با محدودیت تحدب مسئله فرعی دوم	λ_2
متغیر دوگان متناظر با محدودیت مرکزی اول	λ_3
متغیر دوگان متناظر با محدودیت مرکزی دوم	λ_4

با توجه به متغیرهای دوگان، کاهش هزینه متغیر δ_{1j} و δ_{2j} را به ترتیب با $RC\left(\delta_{1j}\right)$ و $RC\left(\delta_{2j}\right)$ نشان می دهیم که برابر است با:

$$RC\left(\delta_{1j}\right)=[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1-x_2 \\ -2x_1+2x_2 \end{bmatrix}-\left(-3x_1+7x_2\right)=$$

$$\lambda_1+\left(2\lambda_3-2\lambda_4+3\right)x_1+\left(-\lambda_3+2\lambda_4-7\right)x_2$$

$$RC\left(\delta_{2j}\right)=[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_3+2x_3 \\ x_3-3x_4 \end{bmatrix}-\left(-5x_3+4x_4\right)=$$

$$\lambda_2+\left(2\lambda_3+\lambda_4-5\right)x_3+\left(2\lambda_3-3\lambda_4-4\right)x_4$$

از حل هر مسئله فرعی یک نقطه فرعی شناسایی می کنیم و مسئله اصلی محدود تشکیل می دهیم. پس از حل آن، اگر به ازای هر نقطه راسی **حداقل** یک $RC\left(\delta_{ij}\right)$ها منفی بود، جواب فعلی بهینه نیست و باید نقطه رأسی با منفی ترین مقدار را به مسئله اصلی محدود **اضافه** و دوباره آن را حل کنیم. برای این منظور به جای محاسبه صریح کاهش هزینه تمام نقاط رأسی، فقط مسائل فرعی زیر را حل می کنیم و بدین ترتیب

همه ستون های مسئله اصلی ارزش گذاری می شوند. در صورت نامنفی شدن مقدار بهینه تابع هدف مسائل فرعی ارزش گذاری، جواب فعلی بهینه مسئله اصلی محدود دانتزیگ - ولف، جواب بهینه مسئله اصلی دانتزیگ- ولف است، در غیر این صورت، نقطه رأسی متناظر با کوچک ترین مقدار بهینه مسئله فرعی ارزش گذاری به مجموعه نقاط رأسی مسئله اصلی محدود اضافه می شود و این مسئله را دوباره حل می کنیم.

اولین مسئله فرعی متناظر با

$$\text{Min}\, z = \lambda_1 + (2\lambda_3 - 2\lambda_4 + 3)x_1 + (-\lambda_3 + 2\lambda_4 - 7)x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 12$$

$$3x_1 - x_2 \le 15$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

دومین مسئله فرعی متناظر با

$$\text{Min}\, z = \lambda_2 + (2\lambda_3 + \lambda_4 - 5)x_3 + (2\lambda_3 - 3\lambda_4 - 4)x_4$$

$$x_3 + x_4 \le 5$$

$$-x_3 + x_4 \le 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \le 0$$

تکرار اول: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی اول را (۰،۰)، ضریب آن را δ_{11} و نقطه راسی متناظر با مسئله فرعی دوم را (۰،۰) و ضریب آن را δ_{21} اختیار می کنیم. مسئله اصلی محدود متناظر با این نقاط را حل می کنیم:

$$\text{Max}\, z = 0$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} = 1$$

$$\delta_{21} = 1$$

$$0 \le 19$$

$$0 \le 21$$

$$\delta_{11}, \delta_{21} \ge 0$$

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به نابع هدف $z_1=-84$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(0,12)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم به تابع هدف $z_2=-25$ با مقادیر $(x_3,x_4)=(5,0)$ می رسیم. مقدار تابع هدف هر دو مسئله فرعی **منفی** است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا **بهینه نیست**.

تکرار دوم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی اول (۰,۱۲) را به مجموعه نقاط رأسی اضافه می کنیم. متغیر نظیر آن را δ_{12}، در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max}\, z = 84\delta_{12}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} = 1$$

$$-12\delta_{12} \le 19$$

$$24\delta_{12} \le 21$$

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,3.5)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1=-27$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(6.75,5.25)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم به تابع هدف $z_2=-72.5$ با مقادیر $(x_3,x_4)=(0,5)$ می رسیم. مقدار تابع هدف هر دو مسئله فرعی **منفی** است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا **بهینه نیست**.

تکرار سوم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی دوم (۰,۵) را به مجموعه نقاط رأسی اضافه می کنیم. متغیر نظیر آن را δ_{22}، در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } z = 84\delta_{12} + 20\delta_{22}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} = 1$$

$$-12\delta_{12} + 10\delta_{22} \le 19$$

$$24\delta_{12} - 15\delta_{22} \le 21$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22} \ge 0$$

که در آن $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (84, 20, 0, 0)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1 = 0$ با مقادیر $(x_1, x_2) = (0, 12)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم به تابع هدف $z_2 = -5$ با مقادیر $(x_3, x_4) = (5, 0)$ می رسیم. مقدار تابع هدف مسئله فرعی دوم **منفی** است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا **بهینه نیست**.

تکرار چهارم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی دوم (۵,۰) را به مجموعه نقاط رأسی اضافه می کنیم. متغیر نظیر آن را δ_{23} در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } z = 84\delta_{12} + 20\delta_{22} + 25\delta_{23}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = 1$$

$$-12\delta_{12} + 10\delta_{22} + 10\delta_{23} \le 19$$

$$24\delta_{12} - 15\delta_{22} + 5\delta_{23} \le 21$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23} \ge 0$$

که در آن $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (78, 23.75, 0, 0.25)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1 = 0$ با مقادیر $(x_1, x_2) = (0, 12)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم نیز

به نابع $z_2 = 0$ هدف با مقادیر $(x_3, x_4) = (5,0)$ می رسیم. مقدار تابع هدف مسئله فرعـی اول و دوم **غیر منفی** است، بنابراین جواب فعلی مدل اصلی محدود بالا **بهینه** است و برابر است با:

$$\delta_{11}^0 = 0, \delta_{12}^0 = 1, \delta_{21}^0 = 0, \delta_{22}^0 = 0.4, \delta_{23}^0 = 0.6, z^0 = 107$$

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**