

درس ۲۱:

برنامه ریزی غیر خطی

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

از آنجا که برنامه‌ریزی خطی را می‌توان شالوده تحقیق در عملیات دانست، بسیاری از مباحث تحقیق در عملیات با آن سروکار دارد. فرض اصلی برنامه‌ریزی خطی این است که همه توابع (اعم از تابع هدف یا محدودیت‌ها) خطی باشند. اگر چه این فرض در بسیاری از مسائل واقعی برقرار است لیکن در مواردی هم صادق نیست.

هدف مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در شکل کلی آن، پیدا کردن مقادیر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است به طوریکه :

$$\begin{aligned} \text{Max } & f(x) \\ & g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که $f(x)$ و $g_i(x)$ توابعی معلوم از n متغیر تصمیم هستند.

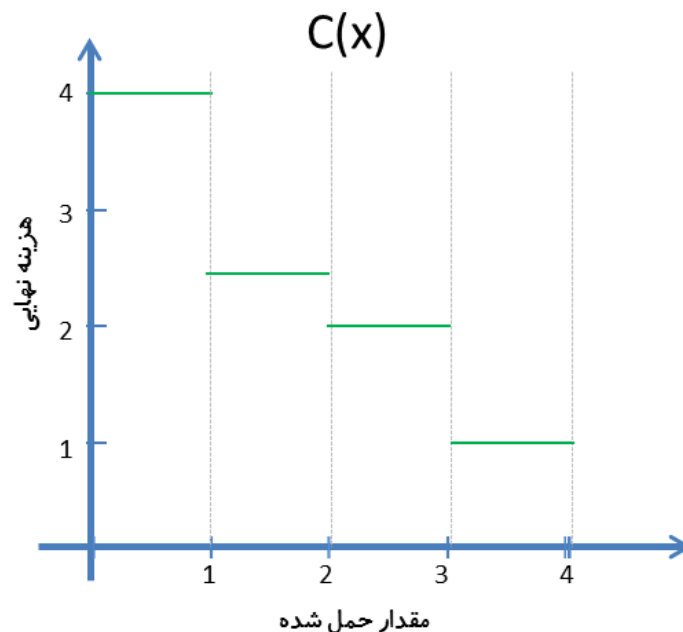
نکته: در این درس برای راحتی فرض می‌شود که کلیه توابع مشتق پذیر هستند.

الگوریتمی وجود ندارد که بتواند همه مسائلی که در چارچوب برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت فوق را حل کنند. لیکن، چنانچه فرضیات مشخصی در مورد این توابع به کار گرفته شود، آن گاه حالت‌های خاصی از برنامه‌ریزی غیرخطی بدست می‌آیند که در رابطه با حل آن‌های پیشرفت‌های چشمگیری حاصل شده است. در این درس، ابتدا چند نمونه از کاربرد برنامه‌ریزی غیرخطی و سپس اصول و مفاهیم اساسی حل برخی از انواع مهم مسائل آن ارائه می‌گردد.

مسئله حمل و نقل با تخفیف هزینه حمل نسبت به میزان بار

همان طور که در درس ۵ گروه آموزشی بهینه یاب گفته شد با معلوم بودن میزان عرضه و تقاضا، هدف مسئله حمل و نقل تعیین برنامه بهینه حمل کالا از مبادی گوناگون به مقصدهای مختلف است، به طوری که کل هزینه‌ها کمینه شود. در آن جا فرض بر این بود که هزینه حمل هر واحد کالا بین هر مبدا و مقصد مشخص، صرف‌نظر از میزانی که حمل می‌شود مقداری ثابت باشد. در عمل، ممکن است این هزینه

ثابت نبوده و برای محموله‌های بزرگ تخفیف‌هایی منظور گردد، به طوری که هزینه نهایی حمل یک واحد کالا، شبیه شکل زیر باشد. در این صورت هزینه حمل x واحد محصول به صورت **تابع غیرخطی** $C(x)$ از نوع تابع خطی شکسته یا *Piecewise linear function* است.



بنابراین، در صورتی که چنین فرضی در مورد هر مبدا و مقصد صدق نماید، یعنی هزینه حمل x_{ij} واحد از مبدا i (به ازای $i=1,2,\dots,m$) به مقصد j (برای $j=1,2,\dots,n$) برابر $C_{ij}(x_{ij})$ باشد، آنگاه تابع هدف به شکل زیر در می‌آید.

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}(x_{ij})$$

با این وجود، در چنین مسائلی حتی اگر تابع هدف هم غیرخطی باشد، محدودیت‌ها عموماً دارای ساختار ویژه‌ای هستند که **همچنان** در چارچوب مدل حمل و نقل خطی فرموله می‌شوند.

انتخاب ترکیب سرمایه گذاری با بازده قطعی

امروزه جهت انتخاب گزینه‌های مناسب برای سرمایه گذاری، مدل‌های کامپیوتری که بر مبنای برنامه‌ریزی غیرخطی پایه گذاری شده‌اند، به صورت ابزاری متداول در خدمت مدیران حرفه‌ای بازار بورس

سهام درآمده اند. از آن جایی که سرمایه گذاران به **دو عامل**، یعنی **میزان بازدهی سرمایه گذاری‌ها** و همچنین **خطرهایی که در بطن** آن‌ها وجود دارد اهمیت می دهند، لذا ترکیب سرمایه گذاری باید طوری انتخاب شود که تحت شرایط موجود، بین بازده سرمایه و خطری که متوجه آن است رابطه بهینه ای برقرار باشد.

در مورد چنین مسئله ای، مدل برنامه‌ریزی غیرخطی به شکل زیر بیان می‌شود:

فرض کنید که خرید n نوع سهام مختلف تحت بررسی است و متغیر تصمیم x_j معرف تعداد سهام نوع j است که انتخاب می‌شود (به ازای $j=1,2,\dots,n$). چنانچه μ_j و δ_{jj} به ترتیب بیانگر **میانگین** و **انحراف معیار** بازده یک عدد از نوع سهام نوع j باشند (δ_{jj} معرف میزان خطر در این سرمایه گذاری است). لذا میانگین $R(x)$ و واریانس $V(x)$ کل بازده سرمایه گذاری، به شرح زیر بدست می‌آید.

$$R(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

که در روابط بالا، $V(x)$ معیار سنجش خطر مجموع سرمایه گذاری‌ها است. تبادل بهینه بین دو عامل فوق، از طریق ترکیب نمودن آن‌ها در تابع هدف به صورت زیر انجام می‌گیرد.

$$f(x) = R(x) - \beta V(x)$$

در تابع هدف فوق که باید حداکثر شود، عدد غیرمنفی β بیانگر میزان مطلوب تبادل بین **بازده** و **خطر سرمایه** از دید سرمایه گذار است. معنای $\beta=0$ این است که خطر سرمایه گذاری مطرح نیست و انتخاب مقدار بزرگ برای β به معنای اهمیت دادن زیاد به خطرناک بودن سرمایه گذاری خواهد بود.

مدل کامل برنامه‌ریزی غیرخطی این مسئله به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= \sum_{j=1}^n \mu_j x_j - \beta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ \sum_{j=1}^n P_i x_j &\leq B \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

که P_i بیانگر قیمت یک عدد از سهم نوع i و B کل بودجه ای است که برای سرمایه گذاری در نظر گرفته شده است و تابع هدف، همان امید ریاضی مطلوبیت سرمایه گذاری است که در مدل فوق به دنبال بیشینه کردن آن هستیم.

بیان ترسیمی مسایل برنامه ریزی غیرخطی

در صورتیکه مسئله برنامه ریزی غیرخطی دارای فقط یک یا دو متغیر باشد، می توان آن را با **روش ترسیمی** حل کرد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: یک شرکت تولیدی درب و پنجره، داراه سه کارگاه است. در کارگاه ۱ قابهای آلومینیومی و قسمت های فلزی تولید می شود. در کارگاه ۲، قابهای چوبی تولید می شود و در کارگاه ۳، برش شیشه و سوار کردن آن به قابها انجام می شود. مدیریت این کارگاهها به دنبال تولید دو محصول جدید هستند و از مرکز تحقیق در عملیات خواسته اند که میزان تولید از هر محصول را با توجه به ظرفیت کارگاه چند واحد است. محصول ۱، دری با قابی آلومینیومی و محصول ۲ پنجره ای شیشه با قاب چوبی است. با توجه به این که هر دو محصول برای جوشکاری نیاز به کارگاه ۳ دارد، ظرفیت این کارگاه باعث می شود که رقابتی بین این دو محصول ایجاد شود. در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است.

ظرفیت لازم برای تولید هر واحد (در هر دقیقه)		
محصول کارگاه	1	2
1	1	0
2	0	2
3	3	2
سود هر واحد	3	5

x_1 و x_2 به ترتیب تعداد محصولات ۱ و ۲ در هر دقیقه است و z نشان دهنده سود حاصل از فروش در هر دقیقه است. در ادبیات تحقیق در عملیات به x_1 و x_2 **متغیرهای تصمیم‌گیری** (decision variables) و z را **تابع هدف** (objective function) گفته می‌شود.

برای تولید هر واحد محصول ۱، یک واحد از کارگاه ۱ مصرف می‌شود که در هر دقیقه کارگاه ۱ تنها چهار واحد ظرفیت برای محصول جدید موجود دارد. این محدودیت به صورت جبری $x_1 \leq 4$ نمایش داده می‌شود. به طور مشابه برای کارگاه شماره ۲، محدودیت $2x_2 \leq 12$ برای محصول ۲ مورد نیاز است. ظرفیت کارگاه ۳ توسط هر دو محصول استفاده می‌شود که باعث محدودیت $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ می‌شود. چون محصول‌ها نمی‌توانند منفی باشند، متغیرهای تصمیم‌گیری نامنفی هستند و نمایش ریاضی آن به صورت $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ می‌شود. به طور خلاصه نمایش ریاضی مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله به صورت زیر می‌شود.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

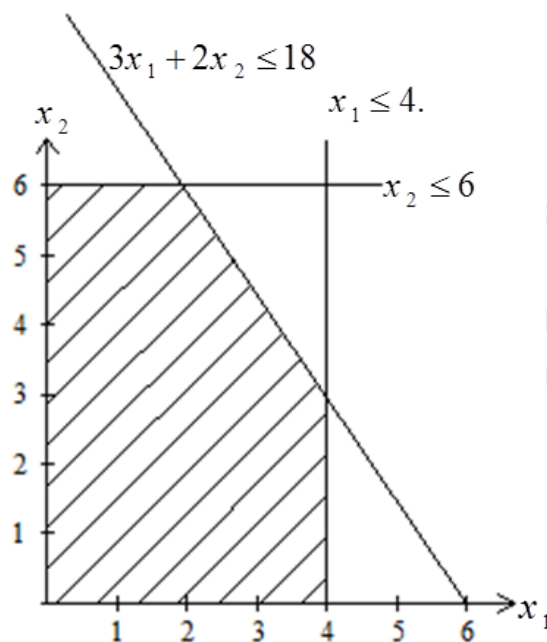
$$1) \quad x_1 \leq 4$$

$$2) \quad 2x_2 \leq 12$$

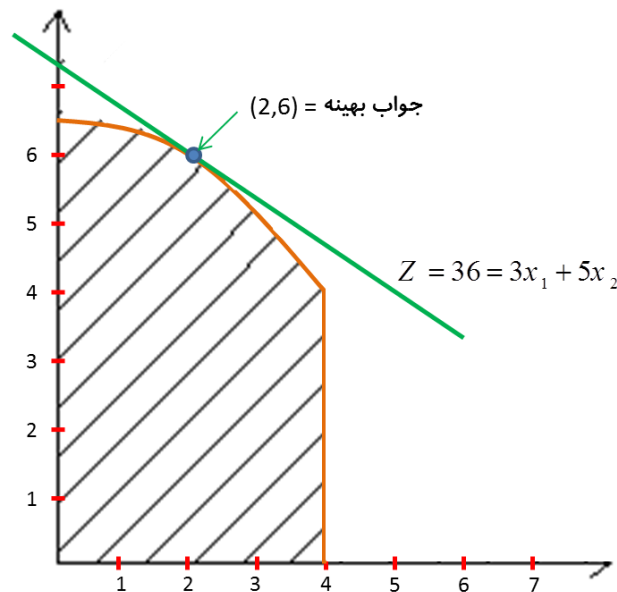
$$3) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$4) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

به دلیل این که این مدل برنامه‌ریزی خطی شامل تنها دو متغیر x_1 و x_2 است، می‌توان برای حل آن از روش ترسیمی بهره برد. این شیوه مستلزم رسم یک شکل با محورهای x_1 و x_2 است. هر یک از محدودیت‌ها بخشی از محور دوبعدی را پوشش می‌دهد که از اشتراک این محدودیت‌ها، فضای موجه یا امکان پذیر مسئله ایجاد می‌شود. ما به دنبال نقطه‌ای هستیم که بیشترین مقدار عبارت z را ایجاد می‌کند.

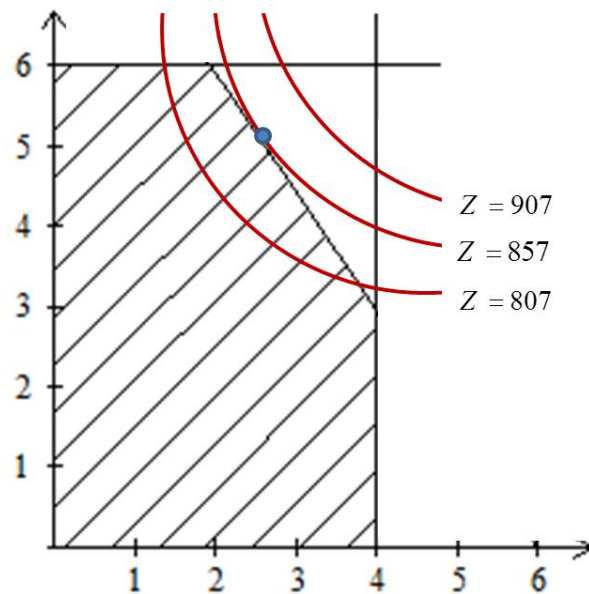


شکل زیر نمایش هندسی مدل این مسئله را نشان می‌دهد با این تفاوت که محدودیت‌های ۲ و ۳ با محدودیت $9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216$ جایگزین شده است. در شکل زیر مشخص است که جواب بهینه برابر با $(x_1, x_2) = (2, 6)$ خواهد بود.



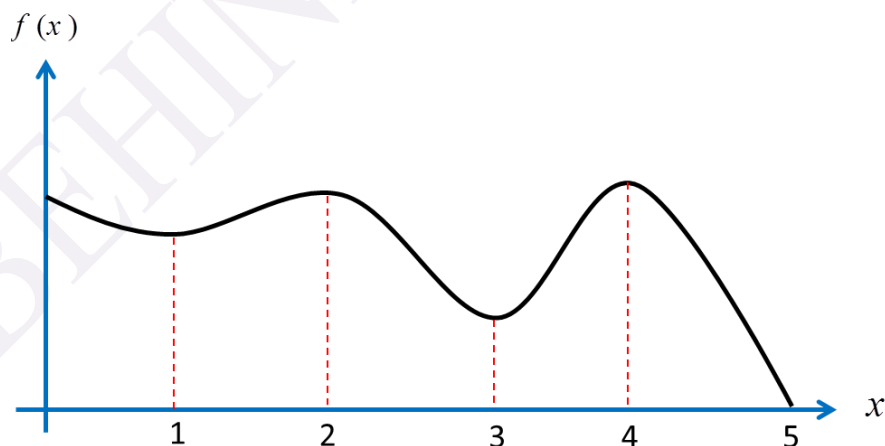
به علاوه، جواب همچنان روی مرز منطقه موجه قرار می‌گیرد لیکن یک جواب گوشه موجه نیست. چنانچه تابع هدف نیز تغییر کرده بود (مثلاً $Z = 3x_1 + x_2$)، آنگاه جواب بهینه می‌توانست بر یک جواب گوشه موجه منطقاً باشد. اما به هر حال، این واقعیت که جواب بهینه لزوماً در یک گوشه قرار ندارد و به معنای آن است که نتیجه بسیار مهمی که در برنامه‌ریزی خطی مورد استفاده قرار می‌گرفت، یعنی فقط جستجوی جواب‌های گوشه موجه، دیگر در مورد برنامه‌ریزی غیرخطی کارسازی نیست.

حال فرض کنید که محدودیت خطی مثال فوق همچنان در مسئله باقی باشند، اما تابع هدف غیرخطی گردد. برای نمونه، اگر $Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$ باشد، در این صورت بیان ترسیمی مسئله به صورت شکل زیر و جواب بهینه آن $x_1 = 2.666$ و $x_2 = 5$ خواهد بود. این جواب هم روی مرز منطقه موجه قرار می‌گیرد.



از این رو، یک الگوریتم عمومی و کلی برای این نوع مسائل نمی تواند تنها به جواب های حدی بپردازد و باید تمام جواب های داخلی را بررسی نماید.

پیچیدگی دیگری که در مسائل برنامه ریزی غیرخطی ظاهر می شود این است که یک جواب حداکثر نسبی **لزوماً** یک جواب حداکثر مطلق **نیست**. برای نمونه، تابع یک متغیره ای که در شکل زیر ترسیم شده است را در نظر بگیرید.

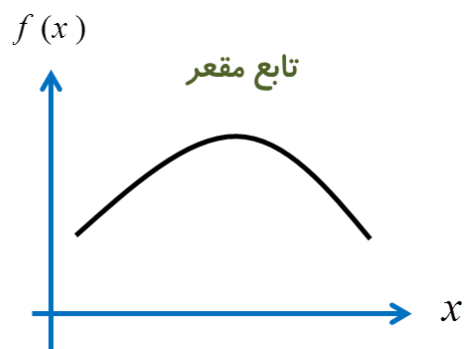
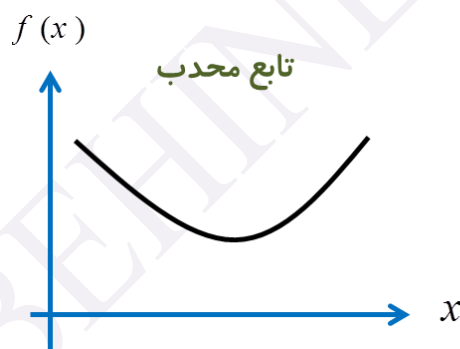


این تابع در فاصله $0 < x < 5$ سه حداکثر نسبی یعنی $x=0$ و $x=2$ و $x=4$ دارد، در حالی که فقط یکی از آن‌ها یعنی $x=4$ جواب حداکثر مطلق است. به همین ترتیب تابع دارای سه حداقل نسبی $x=1, 3, 5$ و فقط یک حداقل مطلق $x=5$ است.

از آنجا که الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی تنها می‌توانند جواب‌های حداکثر نسبی (حداقل نسبی) را بدست آورند، لذا آگاهی از این که یک جواب حداکثر نسبی تحت چه شرایطی حداکثر مطلق نیز خواهد بود اهمیت زیادی دارد. یادآوری می‌شود که در مورد تابع یک متغیری و بدون محدودیت $f(x)$ (با فرض داشتن مشتق‌های اول و دوم)، برای اثبات این که جواب حداکثر نسبی همان حداکثر مطلق است، کافی است که رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0 \quad \forall x$$

چنین تابعی که خمیدگی آن همیشه به سمت پایین است تابع مقعر یا **Concave function** نامیده می‌شود. به همین ترتیب، اگر علامت $\leq$ را با $\geq$ جایگزین کنیم، به تابع حاصل که خمیدگی آن همیشه به طرف بالا است تابع محدب یا **Convex function** می‌گویند.



وقتی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی محدودیتی ندارد، مقعر بودن تابع هدف تضمین می‌کند که هر جواب حداکثر نسبی یک جواب حداکثر مطلق باشد. به طور مشابه محدب بودن تابع برای حداقل مطلق بودن هر جواب حداقل نسبی کفایت می‌کند.

چنانچه مسئله دارای محدودیت باشد، آنگاه برای اطمینان از مطلق بودن جواب نسبی باید شرط دیگری را نیز در نظر گرفت که آن منطقه موجه **یک مجموعه محدب** باشد.

نکته: مجموعه $S = \{s \mid g(x) \leq b\}$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $g(x)$ یک تابع محدب باشد، آنگاه مجموعه S یک مجموعه محدب است.

انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی

مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در شکل‌ها و قالب‌های مختلف ظاهر می‌شوند. برخلاف نقش روش سیمپلکس در برنامه‌ریزی خطی، **هیچ** الگوریتمی که بتواند همه نوع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را حل کند، وجود **ندارد**. با این همه، الگوریتم‌ها مختلفی برای حل بسیاری از این مسائل توسعه یافته‌اند. در بخش بعدی، مهمترین انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی معرفی می‌شوند که شامل بهینه‌سازی بدون محدودیت، بهینه‌سازی با محدودیت، برنامه‌ریزی محدب و برنامه‌ریزی غیرمحدب است و برای هر یک روش‌های حلی ارائه می‌شود.

بهینه‌سازی بدون محدودیت

مسائل **بهینه‌سازی بدون محدودیت** یا **Unconstrained optimization** همان طور که از نامشان بر می‌آید هیچ محدودیتی ندارند، لذا هدف آن‌ها حداکثر کردن تابع $f(x)$ بازای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است. شرط این که جواب مشخصی مانند $x = x^*$ در تابع $f(x)$ بیشینه است (به شرط مقعر بودن) که در نقطه $x = x^*$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0 \rightarrow x = x^* \quad j = 1, 2, \dots, n$$

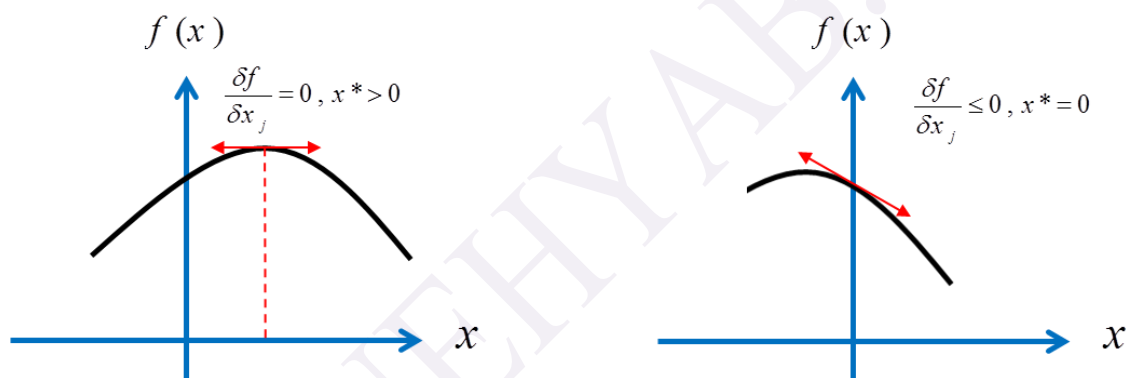
برای بدست آوردن مقدار بردار x کافی است که جواب دستگاه n معادله‌ای حاصل از مساوی صفر قراردادن n مشتق جزئی محاسبه شود. متأسفانه، در مورد توابع غیرخطی $f(x)$ ، چنین معادلاتی نه تنها غالباً غیرخطی هستند، بلکه حل دستگاه حاصل نیز **ناممکن** است. در بخش‌های بعدی پیدا کردن راه حل

این دستگاه‌ها تشریح می‌شود. این فرایندها نقش مهمی در حل بسیاری از انواع مسائل دیگر که حتی دارای محدودیت هم هستند بازی می‌کنند، زیرا بسیاری از الگوریتم‌های حل مسائل محدودیت دار غیرخطی طوری طراحی شده اند که در هر تکرار می‌توانند به یک مسئله بهینه سازی **بدون محدودیت** تبدیل شوند.

چنانچه متغیر x_j دارای محدودیت غیرمنفی $x_j \geq 0$ باشد، در این صورت تغییر مختصری در یافتن نقطه بهینه به صورت زیر صورت می‌گیرد.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \begin{cases} \leq 0 & \mathbf{x} = \mathbf{x}^* & \text{if } x_j^* = 0 \\ = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{x}^* & \text{if } x_j^* > 0 \end{cases}$$

نمایش گرافیکی رابطه بالا در شکل زیر آورده شده است.



راه حل این گونه بهینه سازی در دو بخش بهینه سازی یک متغیره و چند متغیره بدون محدودیت ارایه می‌شود.

بهینه سازی توابع یک متغیری و بدون محدودیت

فرایند جستجوی یک بعدی نظیر سایر فرایندهای جستجو، سلسله ای از جواب‌های آزمایشی را دنبال می‌کند که به جواب بهینه منتهی می‌شود. در هر تکرار، از جواب آزمایشی فعلی شروع کرده و با یک جستجوی منظم، یک جواب آزمایشی بهتر را می‌یابد. در مباحث پیشرو به دنبال **حداکثر سازی** هستیم.

فرایند جستجوی یک بعدی براساس یک نکته ساده، یعنی تشخیص مثبت یا منفی بودن شیب یا همان مشتق تابع در نقطه جواب آزمایشی فعلی ساخته شده است. با دانستن این موضوع معلوم می‌شود که برای

حرکت به طرف یک جواب بهینه، آیا باید بدنبال جوابی بزرگتر از جواب آزمایشی بود یا کوچکتر از جواب آزمایشی. از این رو، مثبت بودن مشتق بازای جواب فعلی نشان می‌دهد که جواب بهینه از جواب فعلی x بزرگتر است. بنابراین در چنین حالتی x قبلی می‌تواند یک **حد پایینی** برای جواب‌های آزمایشی بعدی باشد. به همین ترتیب، چنانچه مشتق منفی شود، جواب بهینه x^* یک **حد بالا** برای جواب بهینه اصلی خواهد شد.

برای بیان این فرآیند با اختصار، از تعاریف زیر استفاده می‌کنیم.

x' جواب آزمایشی فعلی

$\underline{x}$ حد پایینی برای x^*

$\bar{x}$ حد بالایی برای x^*

ε فاصله خطای قابل گذشت برای x^*

قواعد منطقی گوناگونی برای انتخاب یک جواب آزمایشی جدید وجود دارد، اما در روش ساده زیر که **قاعده نقطه وسط** یا **Midpoint rule** نامیده می‌شود. هر بار نقطه وسط دو حد انتخاب می‌شود. در ادامه خلاصه فرایند جستجوی یک بعدی ارائه می‌شود.

خلاصه فرآیند جستجوی یک بعدی

قدم ابتدایی: مقدار ε را مشخص نمایید. یک حد پایینی و بالایی را با روش جستجو (با پیدا کردن دو مقدار x که مشتق آن‌ها به ترتیب مثبت و منفی باشد) پیدا کنید. جواب آزمایشی ابتدایی عبارت است از:

$$x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$$

قدم تکراری:

۱- در نقطه $x = x'$ مقدار $\frac{df(x)}{dx}$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ باشد، مقدار حد پایینی را برابر با x' قرار دهید یعنی $\underline{x} = x'$

۳- اگر $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ باشد، مقدار حد بالایی را برابر با x' قرار دهید یعنی $\bar{x} = x'$

۴- جواب آزمایشی جدید برابر با $x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$ است.

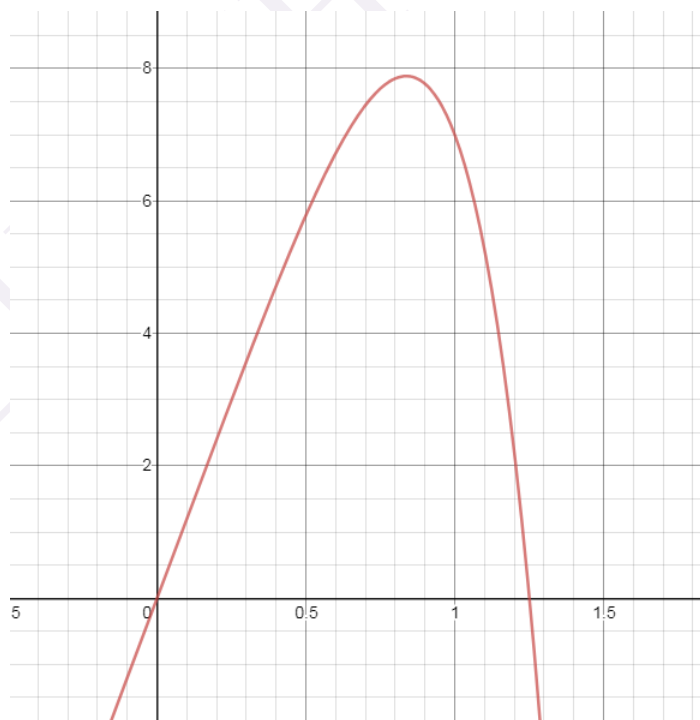
دستور توقف: اگر $(\bar{x} + \underline{x}) \leq 2\varepsilon$ باشد، یعنی جواب x' جدید در فاصله ε از x^* قرار دارد. در این

صورت، **توقف** کنید. در غیر این صورت به **قدم تکراری** بازگردید.

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$

فرض کنید بخواهیم مقدار حداکثر تابع فوق که در شکل زیر نشان داده شده است را بدست آوریم.



مشتق‌های اول و دوم این تابع عبارتست از:

$$\frac{df(x)}{dx} = 12(1 - x^3 - x^5)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12(3x^2 + 5x^4)$$

چون مشتق دوم همیشه مقدار منفی دارد لذا $f(x)$ یک تابع مقعر است و می‌توان از فرایند جستجوی یک بعدی برای پیدا کردن حداکثر آن استفاده کرد. در نظر بگیرید $\underline{x} = 0$ و $\bar{x} = 2$. نقطه وسط یعنی $x' = 1$ به عنوان جواب آزمایشی ابتدایی انتخاب می‌کنیم. فاصله قابل گذشت را برابر با $\varepsilon = 0.01$ می‌گیریم. بنابراین در تکرار نهایی لازم است داشته باشیم $\frac{(\bar{x} - \underline{x})}{2} \leq 0.01$ و جواب نهایی را نقطه وسط این بازه در نظر می‌گیریم. سلسله جواب‌هایی که براساس فرایند جستجوی یک بعدی بدست می‌آید در جدول زیر آمده است.

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		0	2	1	7
1	-12	0	1	0.5	5.7812
2	10.12	0.5	1	0.75	7.6948
3	4.09	0.75	1	0.875	7.8439
4	-2.19	0.75	0.875	0.8125	7.8672
5	1.31	0.8125	0.875	0.84375	7.8828
6	-0.34	0.8125	0.84375	0.828125	7.8815
7	0.51	0.828125	0.84375	0.835937	7.8839
توقف					

با توجه به جواب بالا، جواب بهینه برابر با $x^* = \frac{0.82812 + 0.84375}{2} \approx 0.836$ می‌شود.

بهینه سازی مسائل چند متغیره بدون محدودیت

اکنون حداکثر کردن تابع $f(x)$ که تابعی مقعر از چند متغیر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است و هیچ محدودیتی هم در مورد مقادیر موجه آن وجود ندارد را در نظر بگیرید. از مساوی صفر قراردادن مشتق‌های جزئی این تابع، یک دستگاه معادلات حاصل می‌گردد که حل آن شرط **لازم و کافی** بهینگی است. چنانچه این دستگاه با روش تحلیلی میسر نباشد، لاجرم باید یک فرایند جستجوی عددی برای حل آن به کار گرفته شود. سوالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان روش جستجوی یک متغیری بخش قبل را به این مسئله نیز تعمیم داد؟

در بخش قبلی با افزایش یا کاهش مقدار x' ، از جواب آزمایشی فعلی به جواب بعدی حرکت می‌کردیم. جهت حرکت از طریق علامت مشتق مشخص می‌شد. هدف نهایی، رسیدن به نقطه‌ای بود که مقدار مشتق آن برابر صفر باشد. در مسئله تابع چند متغیری، حرکت نقطه تنها به دو جهت محدود نمی‌شود بلکه می‌توان در جهت‌های بیشماری حرکت نمود، که هر کدام، متناظر با **آهنگ نسبی تغییرات** متغیرهای مربوطه هستند. هدف از این کار نیز در نهایت، رسیدن به نقطه‌ای است که تمام مقادیر مشتق‌های جزئی آن برابر با صفر باشد. از این رو، برای تعمیم روش جستجوی یک متغیری ابتدا باید جهت حرکت را با استفاده از مقادیر مشتق‌های جزئی مشخص ساخت. برای انتخاب جهت حرکت، با **مفهوم گرادیان** سروکار خواهیم داشت.

از آن جایی که فرض می‌شود تابع $f(x)$ مشتق پذیر است، لذا هر نقطه مانند x دارای بردار گرادیان خواهد بود که به صورت $\nabla f(x')$ نشان داده می‌شود. به طور مشخص، در نقطه $x = x'$ گرادیان برداری است که عناصر آن مشتق‌های جزئی تابع در این نقطه باشد به طوری که به ازای $x = x'$

$$\nabla f(x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad x = x'$$

اهمیت گرادیان از آن رو است که **حداکثر** میزان تغییرات تابع در نقطه x به ازای حرکت در جهت گرادیان حاصل می‌گردد. برای بیان هندسی این مفهوم، جهت گرادیان را جهت پاره خطی بگیرید که مبدا

مختصات را به نقطه $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ متصل می سازد و مقدار $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ نیز به ازای $x_j = x'_j$ محاسبه

می شود. از آنجا که هدف مسئله پیدا کردن جواب موجهی است که تابع هدف را حداکثر کند، لذا به نظر می رسد چنانچه حتی الامکان در جهت گرادیان حرکت کنیم زودتر به مقصد برسیم.

برای تضمین یافتن جواب بهینه جهانی در حالت بیشینه سازی، باید در ابتدا ثابت کرد که تابع هدف

مقعر است. در صورتی که به دنبال کمینه سازی تابع هدف باشیم باید نشان داده که تابع هدف **محدب**

است. برای نشان دادن مقعر بودن تابع $f(x)$ به صورت زیر عمل می کنیم.

۱- **تشکیل ماتریس هسیان:** در ابتدا ماتریس هسیان به صورت زیر محاسبه می شود. این ماتریس

مربعی است و تعداد سطر یا ستون های آن به تعداد متغیرهای تابع $f(x)$ است.

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

۲- **تعیین منفی معین بودن یا نیمه منفی معین بودن:** اگر $x^T H x < 0$ باشد آنگاه ماتریس H

منفی معین است و اگر $x^T H x \leq 0$ نیمه منفی معین است.

نکته: برای محدب بودن تابع $f(x)$ کافی است نشان دهیم که ماتریس H نیمه معین مثبت یا معین

مثبت است.

روش جستجوی گرادیان

روش جستجوی گرادیان یکی از روش های حل برای بهینه سازی بدون محدودیت با چند متغیر است.

از آن جا که محدودیتی در مسئله وجود ندارد، بنابراین به نظر می رسد که حرکت در جهت گرادیان

می تواند یک روش کارا باشد. این حرکت آنقدر ادامه می یابد تا بالاخره جواب بهینه حاصل شود که در این نقطه مقدار گرادیان برابر با صفر است. ولی تغییر مداوم مقدار x در جهت گرادیان طبیعتاً عملی نیست، زیرا این کار باعث تغییر دائمی جهت می شود. به جای چنین رویکردی، پیشنهاد می شود که حرکت از جواب فعلی در جهت بدست آمده از جواب فعلی شروع گردد و تا هنگامی که مقدار $f(x)$ افزایش می یابد توقفی صورت نگیرد. در اینجا گرادیان مجدد محاسبه می شود تا جهت حرکت بعدی مشخص گردد. با این رویکرد، هر تکرار شامل تغییر جواب فعلی x' به شرح زیر است.

$$x' = x' + t^* \nabla f(x')$$

که مقدار t^* مقدار مثبت t که رابطه زیر را حداکثر می کند یعنی

$$f(x' + t^* \nabla f(x')) = \max_{t \geq 0} f(x' + t \nabla f(x'))$$

نکته: عبارت $f(x' + t \nabla f(x'))$ همان تابع $f(x)$ به ازای مقادیر زیر است:

$$x_j = x'_j + t \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_{x=x'} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

عبارت فوق فقط شامل x_j و مقادیر ثابت t است و در نتیجه $f(x)$ تابعی یک متغیری از t خواهد شد. تکرارهای این روش تا آنجا ادامه می یابد که مقدار گرادیان با یک تقریب قابل قبولی برابر با **صفر** گردد، یعنی اگر فاصله قابل قبول برابر با ε در نظر گرفته شود، در این صورت موقعی توقف می کنیم که داشته باشیم:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \leq \varepsilon \quad j = 1, 2, \dots, n$$

در روش جستجوی گرادیان، مشکل ترین قسمت هر تکرار تعیین t^* یعنی مقداری که تابع f را در جهت بردار گرادیان حداکثر کند خواهد بود. از آنجا که مقادیر x' و $\nabla f(x')$ مشخص هستند و تابع نیز

مقعر است (مشتق دوم نامثبت است)، لذا حل مسئله به حداکثر کردن یک تابع مقعر یک متغیری تبدیل می‌شود. از این رو، برای حل آن از روش جستجوی یک متغیری که در بخش قبل ارایه شد استفاده می‌شود.

خلاصه روش گرادیان

قدم ابتدایی: مقدار ε و یک جواب ابتدایی x' را تعیین کنید. به **دستور توقف** بروید.

قدم تکراری:

۱- تابع $f(x' + t \nabla f(x'))$ را به صورت تابعی از t بیان کنید. این کار را با قرار دادن x' به صورت زیر انجام می‌گیرد.

$$x_j = x'_j + t \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x=x'} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

سپس این عبارت در $f(x)$ قرار داده می‌شود.

۲- با بهره‌گیری از روش جستجوی یک متغیری یا مشتق‌گیری، مقدار t^* که تابع $f(x' + t \nabla f(x'))$ را به ازای تمامی مقادیر غیرمنفی t حداکثر می‌کند تعیین نمایید.

۳- x' را برابر با $x' + t^* \nabla f(x')$ قرار دهید. به **دستور توقف** بروید.

دستور توقف: در نقطه $x = x'$ ، مقدار گرادیان را محاسبه کنید. اگر رابطه زیر برقرار بود توقف کنید.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon \quad j = 1, 2, \dots, n$$

مقدار فعلی x' با تقریب ε جواب بهینه است. در غیر این صورت، به **قدم تکرار** بازگردید.

مثال: مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Max } f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

مشتقات جزئی بر حسب x_1 و x_2 به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2 - 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 2 - 4x_2$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع $f(x)$ یک تابع مقعر است. ماتریس هسیان تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌شود.

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

برای نشان دادن این که تابع $f(x)$ مقعر است کافی است نشان دهیم که ماتریس H نیمه معین منفی یا معین منفی است. برای این منظور باید نشان داده که $x^T H x \leq 0$. لذا داریم:

$$\begin{aligned} x^T H x &= (x_1, x_2) \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-2x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 = -2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_2^2 = -2(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

با توجه به این که ماتریس H شرط نیمه معین منفی را برآورده کرده است لذا تابع $f(x)$ مقعر است.

روش جستجوی گرادیان را از $x = (0, 0)$ شروع می‌کنیم. چون در این نقطه مشتق‌های جزئی به

ترتیب برابر با صفر و دو است، لذا گرادیان برابر با

$$\nabla f(0, 0) = (0, 2)$$

خواهد بود. حال، اولین تکرار را به ترتیب زیر شروع می‌کنیم.

$$x_1 = 0 + t(0) = 0$$

$$x_2 = 0 + t(2) = 2t$$

آنگاه مقادیر فوق را در تابع $f(x)$ قرار می‌دهیم.

$$f(x' + t \nabla f(x')) = f(0, 2t) = 2(0)(2t) + 2(2t) - (0)^2 - 2(2t)^2 \\ = 4t - 8t^2$$

با توجه به اینکه

$$f(0, 2t^*) = \max_{t \geq 0} f(0, 2t) = \max_{t \geq 0} \{4t - 8t^2\}$$

و همچنین

$$\frac{d}{dt} \{4t - 8t^2\} = 4 - 16t = 0 \rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

بنابراین، جواب جدید را بدست می‌آوریم.

$$x' = (0, 0) + \frac{1}{4}(0, 2) = (0, \frac{1}{2})$$

در این جواب جدید، گرادیان برای این جواب به صورت زیر می‌شود.

$$\nabla f(0, \frac{1}{2}) = (1, 0)$$

بنابراین در تکرار دوم:

$$x = (0, \frac{1}{2}) + t(1, 0) = (t, \frac{1}{2})$$

پس داریم:

$$f(x' + t \nabla f(x')) = f(0 + t, \frac{1}{2} + 0t) = f(t, \frac{1}{2}) = (2t)(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2}) - t^2 - 2(\frac{1}{2})^2 \\ = t - t^2 + \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه:

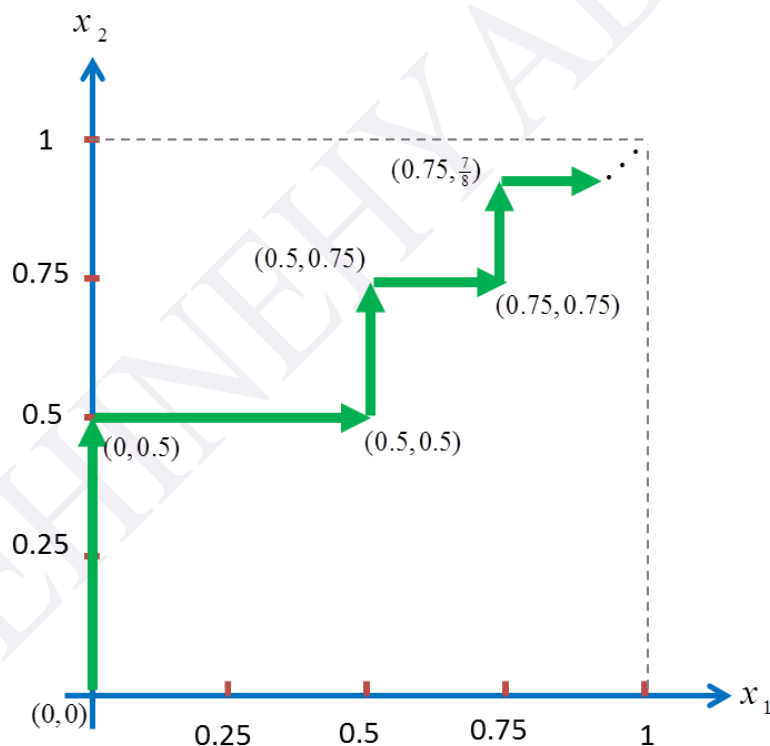
$$f(t^*, \frac{1}{2}) = \max_{t \geq 0} f(t, \frac{1}{2}) = \max_{t \geq 0} \left\{ t - t^2 + \frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ t - t^2 + \frac{1}{2} \right\} = 1 - 2t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

لذا جواب جدید را به صورت زیر داریم.

$$x' = \left(0, \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

چنانچه این فرآیند رو ادامه دهیم، جوابهای بعدی به صورت $(0.5, 0.75)$ ، $(0.75, 0.75)$ ، $(0.75, 0.875)$ و $(0.875, 0.875)$ بدست می‌آیند. این جوابها به جواب $(1, 1)$ میل می‌کند که در شکل زیر این روند نشان داده شده است.



نکته: در صورتی که $f(x)$ مقعر نباشد، استفاده از این روش به یک **حداکثر نسبی** می انجامد که لزوما حداکثر مطلق نیست.

نکته: چنانچه هدف مسئله حداقل کردن تابع $f(x)$ باشد، در این صورت در هر تکرار باید در جهت منفی گرادیان حرکت کرد. به عبارت دیگر، برای پیدا کردن جواب بعدی باید نقطه بعدی را به صورت زیر جایگزین کند.

$$x' = x' - t^* \nabla f(x')$$

بهینه سازی با محدودیت

در این بخش به چگونگی تشخیص جواب بهینه یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی (با توابع مشتق پذیر) با محدودیت می پردازیم.

شرایط بهینگی کان-تاکر

شرایط کلی بهینگی برای مسائل بهینه سازی با محدودیت که به شرایط کان-تاکر یا *Kuhn-Tucker* به صورت زیر بیان می شود.

قضیه: فرض کنید که توابع مشتق پذیر $f(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ در اختیار است. در این صورت جواب زیر می تواند بهینه باشد:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

به شرط آن که بتوان m عدد $u_1, u_2, \dots, u_m$ یافت که در شرایط زیر صدق نمایند.

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
- 2) $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
- 3) $g_i(x^*) - b_i \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$
- 4) $u_i (g_i(x^*) - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$
- 5) $x_j^* \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
- 6) $u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

شرایط ۳ و ۵ فقط موجه بودن جواب رو مورد بررسی قرار می دهند.

نکته: شرایط فوق، شرط لازم برای بهینه بودن است و برای کافی بودن شرایط فوق، فضای امکان پذیر باید محدب و تابع هدف مقعر باشد.

یادآوری: فضای امکان پذیر S به صورت $S = \{x \mid g_i(x) \leq b, \forall i\}$ تعریف می شود. مجموعه K یک مجموعه محدب است اگر توابع $g_i(x)$ محدب باشند.

مثال: مسئله برنامه ریزی غیرخطی دو متغیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= \ln(x_1 + 1) + x_2 \\ \text{s.t. } 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

در این مسئله $m=1$ ، $g_1(x) = 2x_1 + x_2$ و در نتیجه $g_1(x)$ محدب است (تابع خطی هم محدب است و هم مقعر). برای نشان دادن مقعر بودن $f(x)$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$f(x) = \ln(x_1 + 1) + x_2 \rightarrow H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(x_1 + 1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T H x < 0 \rightarrow (x_1, x_2) \begin{bmatrix} \frac{-1}{(x_1 + 1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_1}{(x_1 + 1)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{-x_1^2}{(x_1 + 1)^2} \leq 0$$

لذا $f(x)$ مقعر است. با توجه به شرایط کان-تاکر داریم.

$$1(a) \quad \frac{1}{x_1+1} - 2u_1 \leq 0$$

$$2(a) \quad x_1 \left(\frac{1}{x_1+1} - 2u_1 \right) = 0$$

$$1(b) \quad 1 - u_1 \leq 0$$

$$2(b) \quad x_2 (1 - u_1) = 0$$

$$3 \quad 2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$4 \quad u_1 (2x_1 + x_2 - 3) = 0$$

$$5 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$6 \quad u_1 \geq 0.$$

برای حل این شرایط به صورت زیر عمل می‌کنیم.

از شرط 1(b) نتیجه می‌شود که $u_1 \geq 1$. از $x_1 \geq 0$ رابطه $\frac{1}{x_1+1} \leq 1$ نتیجه می‌شود. $u_1 \geq 1$ به معنای

آن است که $\frac{1}{x_1+1} - 2u_1 < 0$ و در نتیجه از شرط 2(a) رابطه $x_1 = 0$ بدست می‌آید. با روش مشابه از

شرط 4 و با توجه به این که $u_1 \geq 1$ است، نتیجه می‌شود که $2x_1 + x_2 - 3 = 0$ و لذا داریم $x_2 = 3$.

نکته: در مورد مسائل پیچیده تر، بدست آوردن یک جواب بهینه که مستقیماً از شرایط کان-تاکر بدست می‌آید اگر غیرممکن نباشد حداقل بسیار دشوار است.

نکته: این شرایط یک راهنما برای برای تشخیص بهینه بودن یک جواب پیشنهادی است.

بهینه سازی با محدودیت‌های خطی

مشخصه مسائل بهینه سازی با محدودیت‌های خطی این است که محدودیت‌های آن‌ها کاملاً در چارچوب برنامه‌ریزی خطی قرار می‌گیرند به طوری که تمام توابع محدودیت‌های $g_i(x)$ خطی هستند، اما تابع هدف غیرخطی است. مسئله ای که فقط با یک تابع غیرخطی روی منطقه موجه برنامه‌ریزی خطی سروکار داشته باشد، نسبت به سایر مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ساده تر می‌شود. برای حل توابع هدف غیرخطی الگوریتم‌های خاصی که اساس آن‌ها بر تعمیم برنامه‌ریزی خطی استوار است، توسعه یافته شده است.

برنامه‌ریزی کوادراتیک که در زیر مطرح می‌شود یک حالت خاص مهم از این نوع است.

برنامه‌ریزی کوادراتیک

در برنامه‌ریزی کوادراتیک همه محدودیت‌ها خطی هستند، اما تابع هدف $f(x)$ باید کوادراتیک باشد. بنابراین، تنها تفاوت آن با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی این است که بعضی از عبارات تابع هدف یا به صورت مجذور یک متغیر و یا حاصلضرب دو متغیر هستند.

برنامه‌ریزی کوادراتیک به واسطه آن که در فرموله کردن بسیاری از مسائل علمی ظاهر می‌شود اهمیت زیادی دارد. برای نمونه، مسئله سرمایه گذاری با بازده قطعی در چارچوب این مدل قرار می‌گیرد.

در مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک هدف پیدا کردن مقدار بردار x است به نحویکه:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = cx - \frac{1}{2} x^T Q x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که c یک بردار سطری، x و b بردارهای ستونی، Q و A ماتریس و T علامت ترانهاده ماتریس است. ضرایب q_{ij} (عناصر ماتریس Q) مقادیر ثابتی هستند و $q_{ij} = q_{ji}$ است.

الگوریتم‌های متعددی برای حالت خاصی که تابع هدف مقعر است، توسعه یافته است که در اینجا به تشریح یکی از این الگوریتم‌ها می‌پردازیم. چون این الگوریتم از روش سیمپلکس استفاده می‌کند بسیار متداول است.

در روش سیمپلکس تغییر یافته یا *The modified simplex method*، اولین قدم فرموله کردن

شرایط کان-تاکر است. یک راه آسان برای بیان این شرایط عبارت است از:

$$\begin{aligned} Qx + A^T u - y &= c^T \\ Ax + v &= b \\ x \geq 0 \quad u \geq 0 \quad y \geq 0 \quad v \geq 0 \\ x^T y + u^T v &= 0. \end{aligned}$$

به غیر از محدودیت آخر، سه محدودیت بالا همان برنامه‌ریزی خطی است و مسئله تبدیل می‌شود به پیدا کردن یک جواب اساسی موجه یک برنامه‌ریزی خطی که در آن محدودیت آخر را باید به نحوی در آن لحاظ کرد. به متغیرهای x و y همچنین متغیرهای u و v ، **متغیرهای مکمل** گفته می‌شود. برای برقرار محدودیت تکمیلی، امکان مثبت بودن متغیرهای مکمل وجود ندارد.

در صورتیکه $c^T \leq 0$ و $b \geq 0$ باشد، متغیرهای اساسی همان عناصر y و v هستند که به صورت زیر می‌شود:

$$x = 0, u = 0, y = -c^T, v = b$$

در صورتیکه شرط فوق برقرار نباشد، باید با افزودن یک متغیر مصنوعی به هر معادله ای که در آن $c_j > 0$ یا $b_i < 0$ باشد مسئله را تغییر داد. در حالتی که $c_j > 0$ باشد، با افزودن متغیر مصنوعی z_1 به سمت چپ و در حالتی که $b_i < 0$ با تفریق متغیر مصنوعی z_2 از سمت چپ و سپس ضرب کردن آن در عدد ۱- بدست می‌آید. در این حالت می‌توان متغیرهای مصنوعی z_1 و z_2 را به عنوان متغیر اساسی معرفی کرد. با در نظر گرفتن این متغیرهای مصنوعی، چون متغیرهای u و x غیراساسی می‌شوند لذا مقدار صفر می‌گیرند و محدودیت تکمیلی برقرار خواهد بود. برای حذف این دو متغیر می‌توان از فاز یک روش **سیمپلکس دو فاز** استفاده کرد و یک جواب اساسی موجه ابتدایی برای مسئله پیدا کرد. تابع هدف **فاز یک** به صورت زیر می‌شود:

$$\text{Min } Z = \sum_j z_j$$

در رابطه با محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی که شامل متغیرهای مصنوعی نیز هستند، تنها تغییری که باید در نظر گرفته شود نحوه انتخاب **متغیر اساسی ورودی** است که به صورت زیر انجام می‌گردد.

قاعده ورود محدود: متغیرهای غیراساسی که **متغیر مکمل** آن‌ها در حال حاضر اساسی است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب **نکنید**. از بین سایر متغیرهای غیراساسی، طبق ضابطه متداول روش سیمپلکس، متغیر اساسی ورودی را مشخص کنید.

قاعده فوق باعث می شود که در طول اجرای الگوریتم، محدودیت تکمیلی همواره برقرار باشد. هنگامی که یک جواب بهینه به شکل زیر برای این مسئله پیدا شود، آنگاه x^* جواب بهینه مسئله اصلی کوادراتیک خواهد بود.

$$x^*, u^*, y^*, v^*, z_1 = 0, \dots, z_n = 0$$

مثال: جواب بهینه مدل زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1, x_2) &= 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \\ \text{s.t. } x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

برای حل این مدل، ابتدا باید مدل فوق را به فرمت استاندارد تبدیل کرد. نمایش گسترده فرم عمومی به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned} f(x) &= cx - \frac{1}{2}x^T Qx \\ f(x) &= c_1x_1 + c_2x_2 - \frac{1}{2}(x_1 \ x_2) \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1x_1 + c_2x_2 - \frac{1}{2}(q_{11}x_1^2 + q_{21}x_1x_2 + q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2) \end{aligned}$$

با قرار دادن تابع هدف با فرم عمومی بالا خواهیم داشت:

$$c = (15 \ 30), Q = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که تابع f یک تابع مقعر است لذا می توان روش سیمپلکس تغییر یافته برای یافتن بهینه جهانی استفاده کرد.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= z_1 + z_2 \\
 \text{s.t. } 4x_1 - 4x_2 + u_1 - y_1 + z_1 &= 15 \\
 -4x_1 + 8x_2 + 2u_1 - y_2 + z_2 &= 30 \\
 x_1 + 2x_2 + v_1 &= 30 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

محدودیت مکمل اضافی که به طور صریح در نظر گرفته نشده عبارت است از:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_1 v_1 = 0$$

قاعده ورود محدود باعث می شود که محدودیت فوق همواره برقرار باشد. به طور مشخص، در مورد سه زوج مکمل یعنی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (u_1, v_1) هر گاه یکی از متغیرهای هر کدام از زوج ها، متغیری اساسی باشد، متغیر دیگر آن نمی تواند اساسی باشد. یادآوری می شود که تنها متغیرهای اساسی می توانند غیرصفر باشند. در جدول زیر گام های الگوریتم سیمپلکس تغییر یافته آورده شده است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	u_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	طرف سمت راست
Z	0	-1	0	-4	-3	1	1	0	0	0	-45
z_1	1	0	4	-4	1	-1	0	0	1	0	15
z_2	2	0	-4	8	2	0	-1	0	0	1	30
v_1	3	0	1	2	0	0	0	1	0	0	30
Z	0	-1	-2	0	-2	1	0.5	0	0	0.5	-30
z_1	1	0	2	0	2	-1	-0.5	0	1	0.5	30
x_2	2	0	-0.5	1	0.25	0	-0.125	0	0	0.125	3.75
v_1	3	0	2	0	-0.5	0	0.25	1	0	-0.25	22.5
Z	0	-1	0	0	-2.5	1	0.75	1	0	0.25	-7.5
z_1	1	0	0	0	2.5	-1	-0.75	-1	1	0.75	7.5
x_2	2	0	0	1	0.125	0	-0.062	0.25	0	0.0625	9.375
x_1	3	0	1	0	-0.25	0	0.125	0.5	0	-0.125	11.25
Z	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
u_1	1	0	0	0	1	-0.4	-0.3	-0.4	0.4	0.3	3
x_2	2	0	0	1	0	0.05	-0.025	0.3	-0.05	0.025	9
x_1	3	0	1	0	0	-0.1	0.05	0.4	0.1	-0.05	12

اولین قسمت جدول، دستگاه معادلات اولیه را بعد از تغییر تابع هدف از حداقل کردن Z به حداکثر کردن $-Z$ و حذف متغیرهای اساسی را نشان می‌دهد. در سه تکرار این جدول، قواعد روش سیمپلکس رعایت شده است با این استثنا که از بعضی متغیرهای غیراساسی که می‌توانستند اساسی شوند به علت رعایت قاعده ورود محدود صرفنظر گردیده است. در اولین قسمت، متغیر u_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی منظور نشده، زیرا متغیر مکمل آن v_1 در حال حاضر متغیر اساسی است. اما در هر حال x_1 که ضریب کوچکتری هم دارد انتخاب شده $-3 < -4$. در جدول دوم هر دو متغیر u_1 و x_2 حذف شده اند، و لاجرم x_1 به عنوان متغیر غیراساسی که دارای ضریب منفی در سطر صفر است انتخاب می‌شود. در قسمت سوم جدول، هر دو متغیر y_1 و y_2 حذف می‌شوند. ولی u_1 حذف نمی‌شود زیرا v_1 دیگر متغیر اساسی نیست، در نتیجه u_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌گردد.

جواب بهینه مسئله $u_1 = 3$ ، $x_2 = 9$ و $x_1 = 12$ و بقیه متغیرها با صفر برابر است. از این رو جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک به صورت $(x_1, x_2) = (12, 9)$ خواهد بود.

برنامه‌ریزی محدب

در بخش‌های قبلی، روش‌های مربوط به چند حالت خاص برنامه‌ریزی محدب مورد بحث قرار گرفت. در این بخش **الگوریتم فرانک - ولف** یا **Frank-wolfe**، برای حل مسائل برنامه‌ریزی محدب با محدودیت‌های خطی ارائه می‌شود.

تقریب خطی تابع هدف $f(x)$ در نقطه آزمایشی x' با استفاده از **بسط تیلور** عبارت است:

$$f(x) \approx f(x') + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x')}{\partial x_j} (x - x') = f(x') + \nabla f(x')(x - x')$$

چون $f(x')$ و $\nabla f(x')x'$ مقادیر ثابتی هستند، لذا پس از قرار دادن مقدار آن‌ها، تابع هدف به شکل $\nabla f(x')x$ بعلاوه مقدار ثابت می‌شود. مسئله برنامه‌ریزی خطی حاصل را می‌توان با روش سیمپلکس حل کرد، و جواب بهینه آن x_{LP} را تعیین نمود. باید توجه داشت که در اثر حرکت از x' به x_{LP} مقدار تابع هدف لزوماً و به طور مداوم افزایش می‌یابد. ولی موقعی که از x' دور می‌شویم، مقدار تابع هدف تقریبی

لزو با مقدار تابع هدف اصلی که غیرخطی است نزدیک نیست. از این رو، x_{LP} به عنوان جواب آزمایشی تلقی نمی‌شود بلکه به جای آن جوابی را جستجو می‌کنیم که تابع هدف را روی پاره خط رابط x' و x_{LP} حداکثر نماید. با کمک فرایند جستجوی یک متغیری، جوابی بر حسب t به عنوان کسری از فاصله x' و x_{LP} بدست می‌آید. این نقطه، جواب آزمایشی برای شروع تکرار بعدی الگوریتم است. جواب‌های متوالی که در تکرارهای متوالی بدست می‌آیند به طرف جواب بهینه اصلی گرایش دارند و وقتی جواب‌های آزمایشی به حد کافی به جواب بهینه نزدیک شود توقف می‌کنیم.

خلاصه الگوریتم فرانک-ولف

قدم ابتدایی:

با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی، یک جواب اساسی ابتدایی $x^{(0)}$ را مشخص کنید. K را مساوی یک قرار دهید.

قدم تکراری:

قسمت ۱- برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، مشتق‌های جزئی تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x^{(k-1)}$ محاسبه و c_j را برابر با $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ قرار دهید.

قسمت ۲- جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی زیر، یعنی $x_{LP}^{(k)}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & g(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

قسمت ۳- مقدار پارامتر t را حساب کنید. برای این منظور $x = x^{(k-1)} + t(x_{LP}^{(k)} - x^{(k-1)})$ را در تابع $f(x)$ قرار دهید و آن را بر حسب t ، یعنی $f(x) = h(t)$ بدست آورید. با استفاده از یکی از روش‌های جستجوی یک بعدی، تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \leq t \leq 1$ حداکثر و $x^{(k)}$ را به ازای t حاصل تعیین نمایید. به **دستور توقف** بروید.

دستور توقف:

چنانچه $x^{(k-1)}$ و $x^{(k)}$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند توقف کنید، و $x^{(k)}$ را جواب بهینه تلقی نمایید. در غیر این صورت، با قرار دادن $k = k + 1$ به **قدم تکراری** برگردید.

مثال: مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر را که دارای محدودیت‌های خطی است در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = 5x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که داریم:

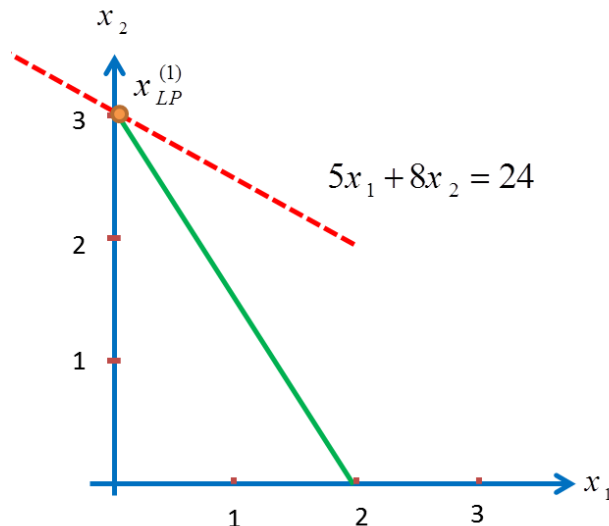
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 5 - 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 - 4x_2$$

لذا حداکثر این تابع به ازای $x = (2.5, 2)$ حاصل می‌شود، که محدودیت کارکردی را مشخصاً **نقض** می‌کند. از این رو، پیدا کردن جواب حداکثر که حتماً در محدودیت‌ها صدق کند به بررسی بیشتری نیاز دارد.

از آن جا که $x = (0, 0)$ یک جواب موجه (و همچنین یک جواب گوشه برای فضای امکان پذیر) است، لذا آن را به عنوان جواب موجه اساسی ابتدایی **الگوریتم فرانک-ولف** در نظر می‌گیریم. با قرار دادن این جواب در عبارات مربوط به مشتق‌های جزئی، $c_1 = 5, c_2 = 8$ و تابع $5x_1 + 8x_2$ که تقریب خطی تابع هدف است بدست می‌آید که لذا مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

حل ترسیمی مدل فوق به صورت زیر می‌شود.



با توجه به قسمت ۳ قدم تکراری، تمام نقاط پاره خط رابط بین $(0,0)$ و $(0,3)$ برای یافتن پارامتر t که منجر به بیشترین مقدار تابع هدف می‌شود به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$(x_1, x_2) = (0,0) + t[(0,3) - (0,0)] = (0, 3t) \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1$$

$$h(t) = f(0, 3t) = 8(3t) - 2(3t)^2 = 24t - 18t^2$$

مقدار t^* که تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \leq t \leq 1$ حداکثر می‌کند برابر با $t^* = \frac{2}{3}$ است و از رابطه زیر

بدست می‌آید.

$$\frac{dh}{dt} = 24 - 36t = 0$$

بدین ترتیب تکرار اول با تعیین جواب آزمایشی بعدی، به شرح زیر پایان می‌پذیرد.

$$x^{(1)} = (0,0) + \frac{2}{3}[(0,3) - (0,0)] = (0,2)$$

در تکرار دوم، $x^{(1)} = (0,2)$ است لذا ضرایب تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

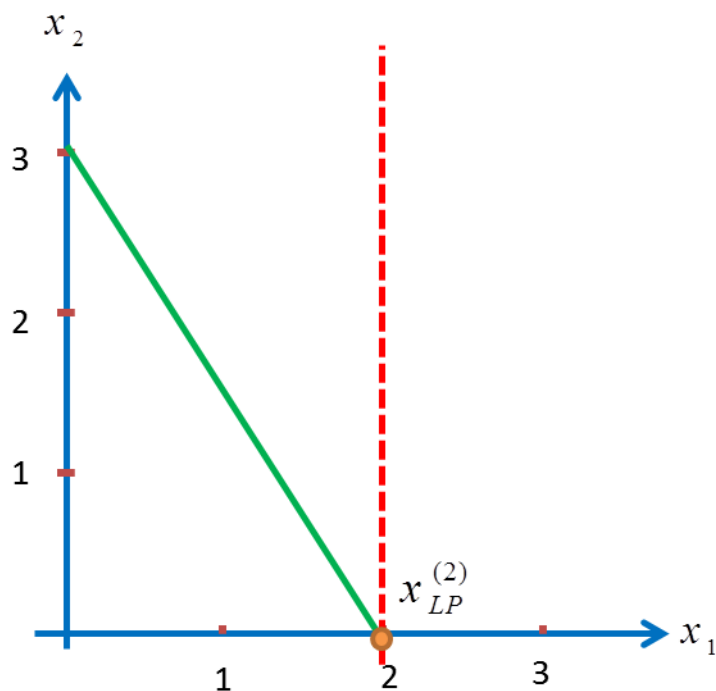
$$c_1 = 5 - 2(0) = 5$$

$$c_2 = 8 - 2(2^2) = 0$$

که در نتیجه تابع هدف به صورت $5x_1$ خواهد شد و لذا مدل برنامه‌ریزی خطی در این تکرار به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = 5x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

حل ترسیمی مدل بهینه سازی فوق به صورت زیر می‌شود.



جواب بهینه مدل بهینه سازی خطی برابر با $x_{LP}^{(2)} = (2, 0)$ بدست می‌آید. از این رو، پاره خط رابط بین $x^{(1)}$ و $x_{LP}^{(2)}$ به صورت زیر می‌شود.

$$x = (0, 2) + t[(2, 0) - (0, 2)] = (2t, 2 - 2t)$$

$$h(t) = f(2t, 2 - 2t) = 5(2t) - (2t)^2 + 8(2 - 2t) - 2(2 - 2t)^2$$

$$h(t) = 8 + 10t - 12t^2$$

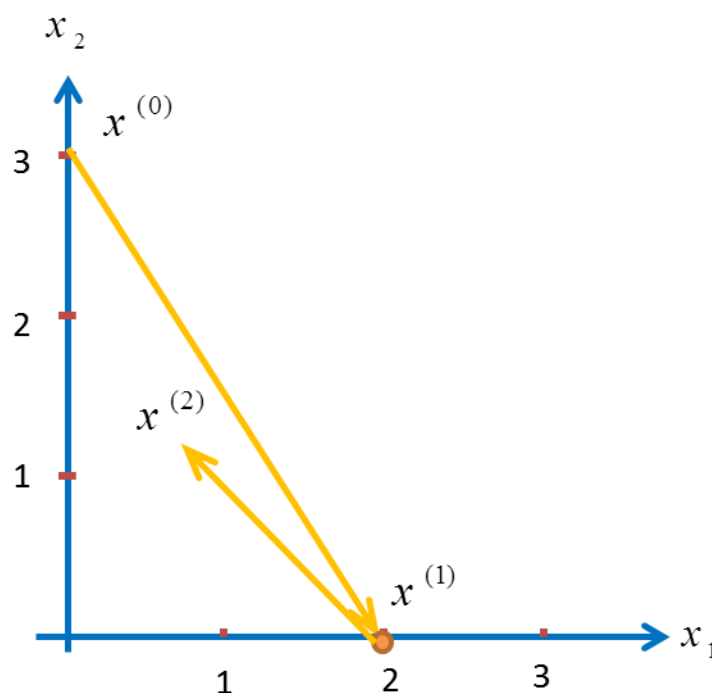
با مشتق گیری تابع فوق داریم:

$$\frac{dh(t)}{dt} = 10 - 24t = 0 \rightarrow t^* = \frac{5}{12}$$

در نتیجه داریم:

$$x^{(2)} = (0, 2) + \frac{5}{12}[(2, 0) - (0, 2)] = \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$$

نمایش جواب‌های این دو تکرار در شکل زیر ارایه شده است.



مشابه روند فوق را برای تکرارهای بعدی انجام می‌دهیم تا شرط توقف برآورده شود.

نکته: در برخی از الگوریتم‌ها، در هر تکرار به جای تقریب خطی از تقریب کوادراتیک استفاده می‌شود زیرا تقریب کوادراتیک به طور قابل ملاحظه‌ای دقیق‌تر از تقریب خطی است.

برنامه‌ریزی غیرمحدب

فرضیات برنامه‌ریزی محدب موجب می‌شود که حل مسئله ساده‌تر گردد، زیرا هر جواب **حداکثر نسبی**

که تحت این فرضیات بدست آید یک جواب **حداکثر مطلق** خواهد بود. هر چند مسائل واقعی برنامه‌ریزی

غیرخطی به چنین فرضیاتی نزدیک هستند، اما در برخی تفاوت‌های جزئی نیز می‌تواند وجود داشته باشد که منجر به برنامه‌ریزی غیرمحدب می‌شود.

یکی از روش‌هایی که برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرمحدب به طور گسترده به کار می‌رود، روش **تسلسلی حداقل کردن بدون محدودیت** یا **SUMT**^۱ است. این روش به دو گونه تقسیم می‌شود. گونه اول آن که **الگوریتم نقطه خارجی**^۲ است با جواب‌های **غیر موجه** سروکار دارد و با استفاده از یک تابع جریمه^۳ به طرف منطقه موجه سوق داده می‌شود. گونه دیگر که **الگوریتم نقطه داخلی**^۴ است به **جواب‌های موجه** می‌پردازد. در این روش یک تابع مانع باعث جلوگیری از خروج از منطقه موجه می‌شود.

روش SUMT یا روش تسلسلی حداقل کردن بدون محدودیت

همان طور که از نام این روش بر می‌آید، مسئله اصلی با یک سلسله از مسائل بهینه سازی بدون محدودیت جایگزین می‌شود، که جواب‌های این رشته از مسایل به جواب بهینه می‌انجامد. حل مسائل بهینه سازی بدون محدودیت (مانند روش گرادیان) در مقایسه با مسائل با محدودیت بسیار آسانتر است لذا این الگوریتم مطلوبیت خاصی دارد. برای هر کدام از این رشته مسایل بدون محدودیت، یک عدد مثبت انتخاب شده و هر بار نیز **کوچکتر** می‌گردد، آنگاه مقدار x با حل مسئله زیر بدست می‌آید.

$$\text{Max } P(x; r) = f(x) - rB(x)$$

$B(x)$ یک **تابع مانع** است که به ازای هر جواب موجه x (برای مسئله اصلی) خواص زیر را دارد:

(۱) چنانچه x از مرز منطقه موجه **دور** باشد مقدار $B(x)$ **کم** است.

(۲) چنانچه x **نزدیک** مرز منطقه موجه باشد مقدار $B(x)$ **زیاد** است.

^۱ Sequential Unconstrained Minimization Technique

^۲ Exterior Point Algorithm

^۳ Penalty Function

^۴ Interior Point Algorithm

۳) هنگامی که فاصله نقطه با یکی از مرزهای منطقه موجه به طرف **صفر** میل کند، مقدار $B(x)$ به طرف **بی نهایت** میل می کند.

به این ترتیب از یک جواب آزمایشی شروع می کنیم و حداکثر تابع $P(x;r)$ را با فرایند جستجو تعیین می نماییم. تابع $B(x)$ مانع عبور از مرز منطقه موجه مسئله اصلی و جستجو در خارج از آن می شود. متداول ترین روش انتخاب $B(x)$ عبارت است از:

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}$$

باید توجه داشت که به ازای مقادیر موجه x ، مقدار مخرج هر جمله متناسب با فاصله نقطه x از محدودیت کارکردی و یا محدودیت غیرمنفی بودن مربوط است.

نکته: خاصیت جالب $B(x)$ این است که اگر تمام فرضیات برنامه ریزی محدب برقرار باشد، $P(x;r)$ هم تابعی مقعر خواهد بود.

اگر $B(x)$ مانع جستجو در نقاط مرزی می شود پس چنانچه جواب مورد نظر در همین حوالی باشد چه باید کرد؟ به همین دلیل، روش $SUMT$ به حل یک رشته از مسایل بهینه سازی بدون محدودیت می پردازد که در آن هر بار مقدار r کوچکتر شده و به صفر میل می کند. همچنین جواب آزمایشی هر تکرار، جواب آزمایشی اولیه تکرار بعدی است. در ادامه خلاصه روش $SUMT$ ارائه می گردد.

قدم ابتدایی:

یک جواب موجه آزمایشی $x^{(0)}$ که روی مرز منطقه موجه نباشد را انتخاب نمایید. مقدار k را برابر با

یک قرار دهید و مقادیر مثبت r و θ را تعیین نمایید. برای مثال: $\theta = 0.01, r = 1$

قدم تکراری:

از $x^{(k-1)}$ شروع کرده و با استفاده از روش جستجوی گرادیان، $x^{(k)}$ جواب حداکثر نسبی تابع زیر را تعیین نمایید.

$$P(x; r) = f(x) - r \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right]$$

دستور توقف:

اگر مقدار تغییر از $x^{(k-1)}$ به $x^{(k)}$ ناچیز باشد توقف نمایید و $x^{(k)}$ را به عنوان جواب حداکثر نسبی مسئله اصلی منظور نمایید.

در غیر این صورت، k را برابر با $k+1$ و $r = \theta r$ قرار دهید و به **قدم تکراری** برگردید.

نکته: اگر فرضیات برنامه‌ریزی محدب برقرار نباشد، آنگاه باید از نقاط موجه مختلفی شروع کرد تا به جواب‌های متعدد دست یافت. بهترین جواب حداکثر نسبی که از مسئله اصلی بدست آید به عنوان جواب حداکثر مطلق تقریبی تلقی می‌گردد.

مثال: برای تشریح روش SUMT، مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } f(x) = x_1 x_2$$

$$\text{s.t. } x_1^2 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

هر چند $g_1(x) = x_1^2 + x_2$ به علت محدب بودن هر جمله آن محدب است، ولی چون $f(x) = x_1 x_2$

مقعر نیست لذا این مسئله نیز یک برنامه‌ریزی محدب نخواهد بود.

در قدم ابتدایی، جواب $(x_1, x_2) = (1, 1)$ آشکارا موجه است و روی مرز منطقه موجه هم قرار ندارد را به عنوان جواب ابتدایی برمی‌گزینیم. بنابراین، $x^{(0)} = (1, 1)$ است و مقادیر $r = 1, \theta = 0.01$ انتخاب می‌کنیم. در قدم تکراری داریم:

$$P(x; r) = x_1 x_2 - r \left(\frac{1}{3 - x_1^2 - x_2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \right)$$

برای حداکثر کردن تابع فوق، با شروع از نقطه $(1, 1)$ و با پارامتر $r = 1$ و با به کارگیری فرآیند جستجوی گرادیان به جواب $x^{(1)} = (0.9, 1.36)$ می‌رسیم. با انتخاب مقدار $r = 1 \times 0.01 = 0.01$ و شروع از نقطه $(0.9, 1.36)$ ، فرایند جستجوی گرادیان به جواب $x^{(2)} = (0.983, 1.933)$ می‌رسد. یک تکرار دیگر با $r = 0.01 \times 0.01 = 0.0001$ و شروع از $x^{(2)}$ به $x^{(3)} = (0.998, 1.994)$ منتهی می‌شود. مقدار جواب برای تکرارهای بعدی به صورت زیر می‌شود.

k	r	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0		1	1
1	1	0.90	1.36
2	0.01	0.983	1.933
3	0.0001	0.998	1.994
$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
		1	2

روش SUMT به علت سادگی و این که حالت‌های متنوعی را در بر می‌گیرد، کاربردهای گسترده‌ای دارد. لیکن، تحلیلگران دریافته‌اند که این روش می‌تواند از نظر محاسباتی نوسانات زیادی داشته باشد و باید با دقت زیادی به کار گرفته شود.

تمرین: تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = 240x - 300x^2 + 10x^3$$

الف) با استفاده از مشتق‌های اول و دوم، نقاط حداکثر و حداقل نسبی را پیدا کنید.

ب) با استفاده از مشتق‌های اول و دوم نشان دهید که $f(x)$ حداکثر مطلق یا حداقل مطلق ندارد.

حل:

الف)

$$\frac{df(x)}{dx} = 240 - 600x + 30x^2 = 0 \rightarrow x^* = \frac{600 \pm \sqrt{600^2 - 4 \times 30 \times 240}}{60} = 0.408 \text{ or } 19.592$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -600 + 60x$$

$$\frac{d^2f(0.408)}{dx^2} = -575.5 \rightarrow f(0.408) = 48.66 \text{ is local max.}$$

$$\frac{d^2f(19.592)}{dx^2} = 575.5 \rightarrow f(19.592) = -34248.7 \text{ is local min.}$$

ب) برای $x > 19.592$ ، داریم، $\frac{df(x)}{dx} > 0$ و $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 60x - 600 > 0$ لذا f از بالا بی کران است.

برای $x < 0.408$ ، داریم، $\frac{df(x)}{dx} < 0$ و $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 60x - 600 < 0$ لذا f از پایین بی کران است.

تمرین: در مورد هر یک از توابع زیر تحقیق کنید که آیا محدب، مقعر و یا نه مقعر و نه محدب است.

الف) $f(x) = 10x - x^2$

ب) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x$

ج) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

د) $f(x) = x^4 + x^2$

ه) $f(x) = x^3 + x^4$

حل:

الف) چون برای تمامی مقادیر x داریم $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -2 < 0$ لذا تابع f مقعر است.

ب) چون برای تمامی مقادیر x داریم $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 12x^2 + 12 > 0$ لذا تابع f محدب است.

ج) چون $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 12x - 6 \begin{cases} > 0 & \text{for } x > \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{for } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ است لذا تابع f نه محدب است و نه مقعر.

د) چون برای تمامی مقادیر x داریم $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 12x^2 + 2 > 0$ لذا تابع f محدب است.

ه) چون $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 6x + 12x^2 \begin{cases} > 0 & \text{for } x < -\frac{1}{2} \text{ or } x > 0 \\ < 0 & \text{for } -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$ است لذا تابع f نه محدب است و نه مقعر.

تمرین: با استفاده از ماتریس هسیان در مورد توابع زیر تحقیق کنید که آیا محدب، مقعر و یا نه محدب و نه مقعر هستند.

الف) $f(x) = 10x - x^2$

ب) $f(x) = 3x_1 + 2x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

ج) $f(x) = x_1x_2$

حل:

الف) ماتریس هسیان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow x^T H x \leq 0 \rightarrow (x_1 \ x_2) H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$(x_1 \ x_2) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-2x_1 + x_2 \ x_1 - 2x_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

$$= -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - 2\left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2 < 0$$

لذا تابع f نیمه معین منفی است و یعنی تابع f مقعر است. البته روش دیگری هم برای تعیین نوع تحدب تابع f وجود دارد که به صورت زیر است:

نکته: اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$ و $\det|H| > 0$ باشد تابع f معین منفی است و بنابراین تابع f مقعر است.

نکته: اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ و $\det|H| > 0$ باشد تابع f معین مثبت است و بنابراین تابع f محدب است.

نکته: اگر هر یک از نامساوی‌های فوق به صورت تساوی برقرار باشد آنگاه تابع f نیمه معین مثبت یا منفی می‌شود.

در این مثال داریم:

چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$ و $\det|H| = 4 - 1 > 0$ لذا تابع f معین منفی و مقعر است.

(ب) ماتریس هسیان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ و $\det|H| = 8 - 4 > 0$ لذا تابع f معین مثبت است و تابع f محدب است.

ج) ماتریس هسیان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون مقدار $\det|H| = 0 - 1 < 0$ است لذا در هیچ کدام از شرایط قرار نمی‌گیرد و لذا این تابع نه محدب است و نه مقعر.

تمرین: تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_3x_4 + 4x_4^2 + 2x_5^4 + x_5^2 + 3x_5x_6 + 6x_6^2 + 3x_6x_7 + x_7^2$$

نشان دهید که این تابع محدب است. برای انجام این کار تابع را به صورت مجموع توابع یک یا دو متغیره ای در آورید که هر کدام از آنها محدب است.

حل:

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_{34}(x_3, x_4) + f_{56}(x_5, x_6) + f_{67}(x_6, x_7)$$

در نظر بگیرید:

$$f_1(x_1) = 5x_1$$

$$f_2(x_2) = 2x_2^2$$

$$f_{34}(x_3, x_4) = x_3^2 - 3x_3x_4 + 4x_4^2$$

$$f_{56}(x_5, x_6) = x_5^2 + 3x_5x_6 + 3x_6^2$$

$$f_{67}(x_6, x_7) = 3x_6^2 + 3x_6x_7 + x_7^2$$

چون $\frac{\partial^2 f_1(x_1)}{\partial x_1^2} = 0$ برای تمامی مقادیر x تابع f_1 هم محدب است و هم مقعر.

چون $\frac{\partial^2 f_2(x_2)}{\partial x_2^2} > 0$ برای تمامی مقادیر x تابع f_1 محدب است.

برای تمام مقادیر x داریم: $\frac{\partial^2 f_{34}(x_3, x_4)}{\partial x_3^2} = 2 > 0$. همچنین $\frac{\partial^2 f_{34}(x_3, x_4)}{\partial x_4^2} = 8$ و

برای تمام مقادیر x و لذا داریم $\det|H| = 16 - 3^2 > 0$ ، بنابراین تابع f_{34} محدب است.

برای تمام مقادیر x داریم: $\frac{\partial^2 f_{56}(x_5, x_6)}{\partial x_5^2} = 2 > 0$. همچنین $\frac{\partial^2 f_{56}(x_5, x_6)}{\partial x_6^2} = 6$ و

برای تمام مقادیر x و لذا داریم $\det|H| = 12 - 3^2 > 0$ ، بنابراین تابع f_{56} محدب است.

چون $f_{67}(x_6, x_7) = f_{56}(x_7, x_6)$ است لذا تابع f_{67} هم محدب است.

با توجه به اینکه کلیه تابع‌ها محدب هستند لذا تابع f محدب است.

تمرین: به کمک روش فرایند جستجوی یک متغیری و با استفاده از خطای قابل گذشت $\varepsilon = 0.04$ و

حدود ابتدایی مشخص شده، مسائل زیر را با تقریب حل کنید.

$$\text{الف) } \max f(x) = 6x - x^2 \quad \underline{x} = 0, \bar{x} = 4.8$$

$$\text{ب) } \min f(x) = 6x + 7x^2 + 4x^3 + x^4 \quad \underline{x} = -4, \bar{x} = 1$$

حل:

الف) نتایج حل به صورت جدول زیر می‌شود.

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		0	4.8	2.4	8.64
1	+1.2	2.4	4.8	3.6	8.64
2	-1.2	2.4	3.6	3	9
3	0	3	3.6	3.3	8.91
4	-0.6	3	3.3	3.15	8.9775
5	-0.3	3	3.15	3.075	8.9944
6	-0.15	3	3.075	3.0375	8.9986
توقف					

ب) نتایج حل به صورت جدول زیر می شود.

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		-4	1	-1.5	-1.688
1	-1.5	-1.5	1	-0.25	-1.121
2	+3.188	-1.5	-0.25	-0.875	-1.984
3	+0.258	-1.5	-0.875	-1.188	-1.964
4	-0.401	-1.188	-0.875	-1.031	-1.999
5	-0.063	-1.031	-0.875	-0.953	-1.998
6	+0.094	-1.031	-0.953	-0.992	-2
توقف					

تمرین: مسئله بهینه سازی بدون محدودیت زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } f(x) = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

الف) با شروع از نقطه (1,1) و $\varepsilon = 0.3$ ، با استفاده از روش فرایند جستجوی گرادیان، جواب تقریبی

این مسئله را تعیین کنید.

ب) جواب دقیق مسئله را از طریق حل دستگاه معادلات $\nabla f(x) = 0$ بدست آورید.

ج) مسیر جواب‌های آزمایشی که از بند (الف) بدست آمده را در یک شکل نشان دهید. آنگاه با توجه به ادامه این مسیر، سه جواب بعدی را تخمین بزنید. ضمناً نشان دهید که رشته جواب‌های آزمایشی به جواب بند (ب) میل می‌کند.

حل:

(الف)

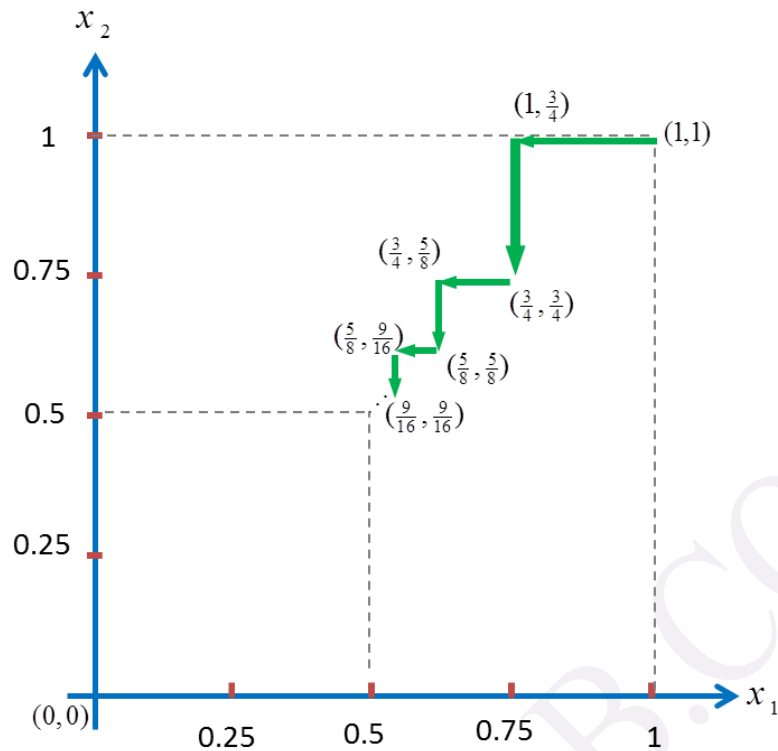
تکرار	x'	$\nabla f(x')$	$x' + t \nabla f(x')$	t^*	$x' + t^* \nabla f(x')$
1	(1,1)	(0,-1)	(1+0t, 1-1t)	0.25	(1,0.75)
2	(1,0.75)	(-0.5,0)	(1-0.5t, 0.75+0t)	0.5	(0.75, 0.75)
3	(0.75,0.75)	(0,-0.5)	(0.75+0t, 0.75-0.5t)	0.25	(0.75,0.625)
4	(0.75,0.625)	(-0.25,0)			
توقف					

چون $|-0.25| < 0.3$ لذا شرط توقف در تکرار ۴ برقرار است.

(ب)

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.5$$

(ج)



جواب بهینه به سمت جواب $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ میل می کند.

تمرین: مسئله بهینه سازی با محدودیت خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } f(x) = \ln(x_1 + 1) - x_2^2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

الف) نشان دهید که این مسئله، برنامه ریزی محدب است.

ب) با استفاده از شرایط KKT ، یک جواب بهینه را بدست آورید.

ج) با استدلالی ساده نشان دهید که جواب حاصل از بند (ب) بهینه است.

حل:

ماتریس هسیان تابع $f(x)$ به صورت زیر بدست می آید.

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ (x_1+1)^2 & -2 \end{bmatrix}$$

برای همه مقادیر x به جز $x_1 = -1$ و $\det|H(f(x))| = \frac{2}{(x_1+1)^2} > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$

به جز $x_1 = -1$ است. با توجه به این که $x_1 \geq 0$ است لذا شرایط برای منفی معین بودن تابع $f(x)$ برقرار است و لذا تابع $f(x)$ مقعر است. چون محدودیت‌ها خطی هستند لذا این مسئله برنامه‌ریزی محدب است.

(ب)

شرایط KKT برای این مسئله به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} (1a) \quad & \frac{1}{(x_1+1)} - u \leq 0 \\ (2a) \quad & x_1 \left(\frac{1}{(x_1+1)} - u \right) = 0 \\ (1b) \quad & -2x_2 - 2u \leq 0 \\ (2b) \quad & x_2 (-2x_2 - 2u) = 0 \\ (3) \quad & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ (4) \quad & u (x_1 + 2x_2 - 3) = 0 \\ (5) \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ (6) \quad & u \geq 0, \end{aligned}$$

فرض کنید $u \neq 0$. از (۴) داریم که $x_1 + 2x_2 = 3$. در نظر بگیرد $x_2 = 0$ باشد آنگاه $x_1 = 3$ می‌شود و

از (2a) داریم که $u = 0.25$. این فرضیات تمامی شرایط را برآورده می‌کند و لذا $(x_1, x_2) = (3, 0)$.

(ج) چون تابع $-x_2^2$ یک تابع اکیدا نزولی در بازه $x_2 \geq 0$ و تابع $\ln(x_1+1)$ یک تابع اکیدا صعودی در

$x_1 \geq 0$. بنابراین کامل واضح است که برای بیشینه کردن تابع f مقدار x_1 باید افزایش و مقدار x_2

باید کاهش یابد لذا با توجه به محدودیت $x_1 + 2x_2 \leq 3$ ، جواب $(x_1, x_2) = (3, 0)$ بهینه است.

تمرین: با استفاده از KKT، جواب بهینه هر کدام از مسائل زیر را پیدا کنید:

(الف)

$$\text{Max } f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2^3$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(ب)

$$\text{Max } f(x) = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t. } x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

حل:

(الف)

شرایط KKT به صورت زیر می شود.

$$(1a) 1 - u \leq 0$$

$$(2a) x_1(1 - u) = 0$$

$$(1b) 2 - 3x_2^2 - u \leq 0$$

$$(2b) x_2(2 - 3x_2^2 - u) = 0$$

$$(3) x_1 + x_2 \leq 1$$

$$(4) u(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

$$(5) x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$(6) u \geq 0.$$

جواب دستگاه فوق برابر با $(x_1, x_2, u) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ می شود که کلیه شرایط بالا را برقرار

می کند. به دلیل این که این مسئله یک برنامه ریزی محدب است لذا $(x_1, x_2, u) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ جواب

بهینه جهانی است.

(ب)

$$(1a) 20 - 2u_1x_1 - u_2 \leq 0$$

$$(2a) x_1(20 - 2u_1x_1 - u_2) = 0$$

$$(3a) x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$(4a) u_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

$$(1b) 10 - 2u_1x_1 - 2u_2 \leq 0$$

$$(2b) x_2(10 - 2u_1x_1 - 2u_2) = 0$$

$$(3b) x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$(4b) u_1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0$$

$$(5) x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$(6) u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

جواب دستگاه فوق برابر با $(x_1, x_2, u) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 5\sqrt{5}\right)$ می شود که کلیه شرایط بالا را برقرار

می کند. به دلیل این که این مسئله یک برنامه ریزی محدب است لذا $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ جواب بهینه

جهانی است.

تمرین: برنامه ریزی محدب زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \quad f(x) = 250x_1 - 25x_1^2 + 100x_2 - 100x_2^2 + 90x_1x_2$$

$$s.t. \quad 20x_1 + 5x_2 \leq 90$$

$$10x_1 + 10x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

با استفاده از الگوریتم سیمپلکس بهبود یافته، جواب بهینه مدل فوق را بدست آورید.

حل: نمایش برداری مدل به صورت زیر می شود.

$$\text{Max} \quad (250 \quad 100) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \infty (x_1 \quad x_2) \begin{bmatrix} 50 & -90 \\ -90 & 200 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Min} \quad z_1 + z_2$$

$$\text{s.t.} \quad 50x_1 - 90x_2 + 20u_1 + 10u_2 - y_1 + z_1 = 250$$

$$-90x_1 + 200x_2 + 5u_1 + 10u_2 - y_2 + z_2 = 100$$

$$20x_1 + 5x_2 + v_1 = 90$$

$$10x_1 + 10x_2 + v_2 = 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$$

در کنار مدل فوق، باید محدودیت تکمیلی زیر هم برقرار باشد.

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

برای حل با استفاده از روش سیمپلکس بهبود یافته، می بایست تابع هدف را از مجموع محدودیت‌های اول و دوم کم کرد. از آنجایی که فرمت استاندارد جدول سیمپلکس به صورت بیشینه سازی (Max) است لذا با ضرب تابع هدف در منهای یک می توان کمینه سازی را به بیشینه سازی تبدیل کرد. با انجام تغییرات فوق مدل اولیه به صورت زیر می شود.

$$\text{Max} \quad 40x_1 - 110x_2 - 25u_1 - 20u_2 + y_1 + y_2$$

$$\text{s.t.} \quad 50x_1 - 90x_2 + 20u_1 + 10u_2 - y_1 + z_1 = 250$$

$$-90x_1 + 200x_2 + 5u_1 + 10u_2 - y_2 + z_2 = 100$$

$$20x_1 + 5x_2 + v_1 = 90$$

$$10x_1 + 10x_2 + v_2 = 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$$

با توجه به مدل فوق، می توان از روش سیمپلکس بهبود یافته به صورت زیر مسئله را حل کرد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	u_1	u_2	z_1	z_2	y_1	y_2	v_1	v_2	طرف سمت راست
Z	0	1	40	-110	-25	-20	0	0	1	1	0	0	-350
z_1	1	0	50	-90	20	10	1	0	-1	0	0	0	250
z_2	2	0	-90	200	5	10	0	1	0	-1	0	0	100
v_1	3	0	20	5	0	0	0	0	0	0	1	0	90
v_2	4	0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	1	60
Z	0	1	-9.5	0	-22.2	-14.5	0	0.55	1	0.45	0	0	-295
z_1	1	0	9.5	0	22.25	14.5	1	0.45	-1	-0.45	0	0	295
x_2	2	0	-0.45	1	0.025	0.05	0	0.005	0	-0.005	0	0	0.5
v_1	3	0	22.25	0	-0.12	-0.25	0	-0.02	0	0.025	1	0	87.5
v_2	4	0	14.5	0	-0.25	-0.5	0	-0.05	0	0.05	0	1	55
Z	0	1	0	0	-22.4	-14.8	0	0.517	1	0.483	0	0.655	-259
z_1	1	0	0	0	22.4	14.8	1	0.483	-1	-0.48	0	-0.66	259
x_2	2	0	0	1	0.017	0.034	0	0.003	0	-0.003	0	0.031	2.207
v_1	3	0	0	0	0.259	0.517	0	0.052	0	-0.05	1	-1.53	3.103
x_1	4	0	1	0	-0.02	-0.03	0	-0.003	0	0.003	0	0.069	3.793
Z	0	1	0	0	-15	0	0	2	1	-1	28.67	-43.3	-170
z_1	1	0	0	0	15	0	1	-1	-1	1	-28.7	43.3	170
x_2	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.07	0.133	2
u_2	3	0	0	0	0.5	1	0	0.1	0	-0.1	1.933	-2.97	6
x_1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.067	-0.03	4
Z	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
u_1	1	0	0	0	1	0	0.067	-0.07	-0.07	0.067	-1.91	2.889	11.33
x_2	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.07	0.133	2
u_2	3	0	0	0	0	1	-0.03	0.133	0.033	-0.13	2.889	-4.41	0.333
x_1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.067	-0.03	4

جواب بهینه برابر با $(x_1, x_2) = (4, 2), (u_1, u_2) = (11.33, 0.33)$ می‌شود.

تمرین: برنامه‌ریزی محدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = 4x_1 - x_1^4 + 2x_2 - x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

الف) با شروع از جواب $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ چهار تکرار روش فرانک-ولف را بکار بگیرید.

ب) با نمایش گرافیکی نشان دهید که توالی جواب‌های بدست آمده در تکرارها چگونه است و تخمینی از روند جواب‌ها بدست آورید.

ج) با استفاده از شرایط KKT ، جواب بهینه را با استفاده از این شرایط بدست آورید و با جواب بند (ب) مقایسه کنید.

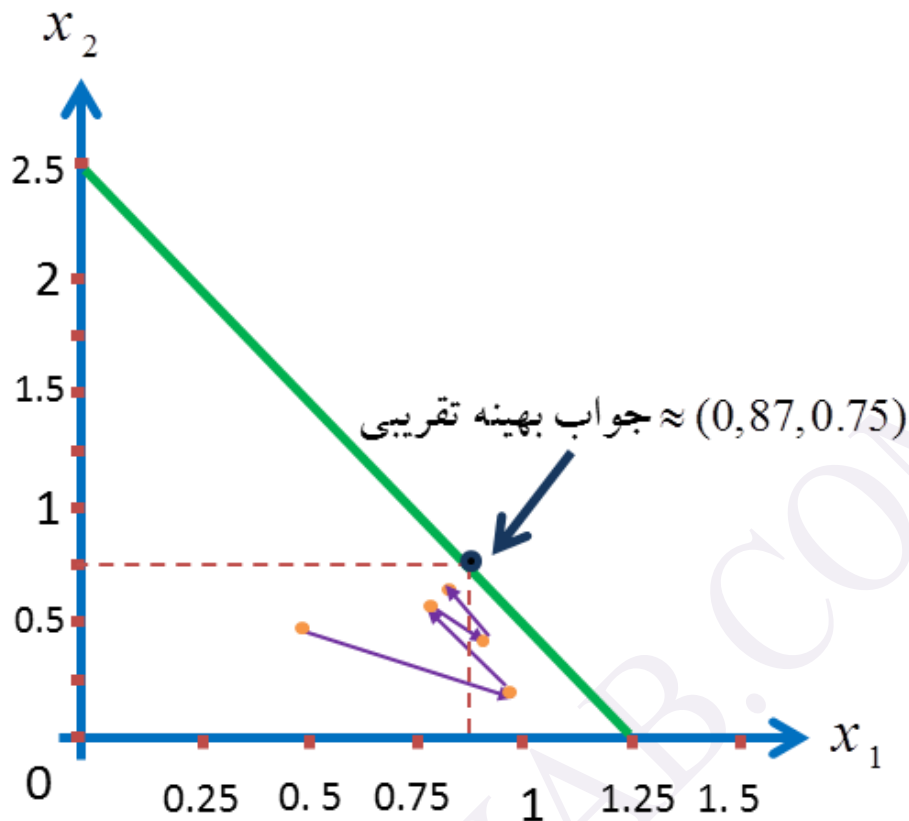
حل:

الف)

برای چهار تکرار روش فرانک-ولف نتایج به صورت زیر می‌شود.

k	$x^{(k-1)}$	c_1	c_2	$x_{LP}^{(k)}$	t^*	$x^{(k)}$
1	(0.5, 0.5)	3.5	1	(1.25, 0)	0.541	(0.906, 0.229)
2	(0.906, 0.229)	1.027	1.541	(0, 2.5)	0.148	(0.771, 0.566)
3	(0.771, 0.566)	2.164	0.867	(1.25, 0)	0.216	(0.875, 0.444)
4	(0.875, 0.444)	1.323	1.112	(0, 2.5)	0.076	(0.808, 0.601)
توقف						

ب)



(ج)

$$(1a) \ 4 - 4x_1^3 - 4u \leq 0$$

$$(2a) \ x_1 (4 - 4x_1^3 - 4u) = 0$$

$$(1b) \ 2 - 2x_2 - 2u \leq 0$$

$$(2b) \ x_2 (2 - 2x_2 - 2u) = 0$$

$$(3) \ 4x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$(4) \ u (4x_1 + 2x_2 - 5) = 0$$

$$(5) \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$(6) \ u \geq 0.$$

از حل دستگاه فوق، جواب بهینه برابر با $(x_1, x_2) = (0.8934, 0.7131), u = 0.5737$ است.

تمرین: روش SUMT را در مورد مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر به کار بگیرید. در نظر بگیرید

$$r = 1, 0.01, 0.0001$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = x_1 x_2 - x_1 - x_1^2 - x_2 - x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

حل:

در ابتدا $P(x;r)$ بدست می‌آوریم:

$$P(x;r) = f(x) - r \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right] = x_1 x_2 - x_1 - x_1^2 - x_2 - x_2^2 - \frac{r}{x_2}$$

k	r	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x)$
0		1	1	-3
1	1	-0.18	0.638	-1.01
2	0.01	-0.46	0.079	0.127
3	0.0001	-0.5	0.008	0.238

تمرین: روش SUMT را در مورد مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر به کار بگیرید. در نظر بگیرید

$$r = 1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6} \text{ و از جواب اولیه } (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ شروع کنید.}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

حل:

$$P(x;r) = f(x) - r \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right] = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - r \left[\frac{1}{2 - x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right]$$

k	r	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x)$
0		0.5	0.5	2
1	1	0.649	0.781	2.61
2	0.01	0.691	1.184	3.055
3	0.0001	0.743	1.243	3.118
4	0.000001	0.749	1.249	3.124

تمرین: برنامه‌ریزی غیرمحدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= 1000x - 400x^2 + 40x^3 - x^4 \\ \text{s.t. } x^2 + x &\leq 500 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

الف) منطقه موجه x را مشخص کنید. رابطه‌ای کلی برای سه مشتق اول $f(x)$ بدست آورید. با استفاده از این اطلاعات، شکل کلی $f(x)$ را در منطقه موجه رسم کنید. روی منحنی بدست آمده، نقاط حداکثر نسبی و مطلق تابع را مشخص کنید.

ب) برای تعیین هر کدام از نقاط حداکثر نسبی، از فرآیند جستجوی یک متغیری با $\varepsilon = 0.05$ استفاده کنید. برای تعیین حدود ابتدایی، از شکل کلی تابع که در بند (الف) رسم شده است استفاده نمایید. کدام یک از نقاط حداکثر نسبی حداکثر مطلق است؟

ج) برای تعیین نقاط حداکثر نسبی، روش SUMT را با $r = 1, 10^2, 10^4$ به کار بگیرید. از جواب‌های $x = 3$ و $x = 15$ به عنوان جواب ابتدایی برای این جستجوها استفاده نمایید. با کمک فرآیند جستجوی یک متغیری که در بند (ب) تشریح شد حداکثر $P(x; r)$ را بدست آورید. کدامیک از نقاط حداکثر نسبی حداکثر مطلق است؟

حل:

الف) برای یافتن فضای امکان پذیر جواب‌های معادله $x^2 + x - 500 = 0$ بدست می‌آید بنابراین فضای

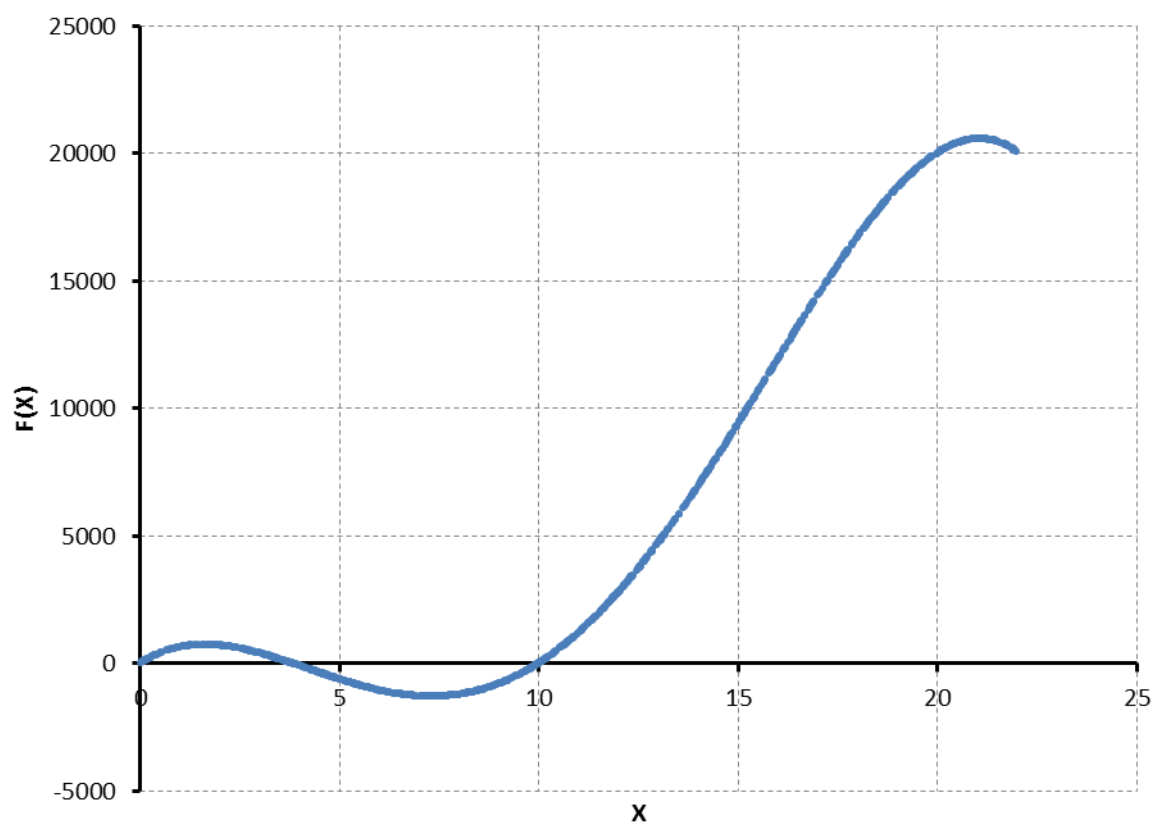
امکان پذیر به صورت $x \in [0, 21.866]$ می‌شود.

$$f'(x) = 1000 - 800x + 120x^2 - 4x^3$$

$$f''(x) = -800 + 240x - 12x^2$$

$$f'''(x) = 240 - 24x$$

براساس توابع بالا نمایش کلی تابع به صورت زیر می‌شود.



(ب)

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		0	5	2.5	585.94
1	-312.5	0	2.5	1.25	700.68
2	179.7	1.25	2.5	1.875	720.06
3	-104.5	1.25	1.875	1.5625	732.56
4	27.71	1.5625	1.875	1.7188	731.48
5	-40.82	1.5625	1.7188	1.6406	733.36
6	-7.166	1.5625	1.6406	1.6016	733.3
توقف					

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		18	21.866	19.933	19931
1	1053	19.933	21.866	20.899	20546
2	180.4	20.899	21.866	21.282	20509
3	-346.2	20.899	21.383	21.141	20559
4	-75.1	20.899	21.141	21.02	20560
5	54.58	21.02	21.141	21.081	20562
6	-9.778	21.02	21.081	21.051	20561
توقف					

بیشینه محلی برابر با ۱۶۰۱۶ است و بیشینه جهانی برابر با ۲۱۰۵۱ است.

(ج)

k	r	$x^{(k)}$	$f(x)$
0		3	399
1	1000	2.171	672.8
2	100	1.704	732
3	10	1.633	733.4
4	1	1.625	733.4

k	r	$x^{(k)}$	$f(x)$
0		15	9375
1	1000	21.04	20561
2	100	21.07	20562
3	10	21.07	20562
4	1	21.07	20562

با جواب اولیه $x = 3$ ، جواب بهینه بدست آمده از روش SUMT برابر با $x = 1.625$ با تابع هدف $f(x) = 733.4$ می‌شود. در چهار تکرار دوم با جواب اولیه $x = 15$ ، جواب بهینه برابر با $x = 21.07$ با تابع هدف $f(x) = 20562$ می‌شود که در این صورت بیشینه جهانی برابر با $x = 21.07$ است.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**