

درس ۲۴:

تئوری صف

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

شبیه‌سازی غالباً در تحلیل مدل‌های صف به کار می‌رود. در یک مدل ساده ولی رایج صف (مشابه شکل ۱)، متقاضیان از زمانی به زمان دیگر وارد سیستم می‌شوند، به صف انتظار می‌پیوندند، سپس خدمت دریافت می‌کنند و سرانجام سیستم را ترک می‌کنند. واژه "متقاضی" اشاره به هر نوع نهادی دارد که خواهان دریافت "خدمت" از سیستم باشد. بنابراین، تشکیلات خدماتی، سیستم‌های تولید، تشکیلات نگهداری و تعمیر سیستم‌های ارتباطات و کامپیوتر و سیستم‌های حمل و نقل مواد را می‌توان به منزله سیستم‌های صف نگریست.

مدل‌های صف صرفنظر از این که از طریق ریاضی حل یا از طریق شبیه‌سازی تحلیل شوند، ابزاری نیرومند را برای طراحی و ارزیابی عملکرد سیستم‌های صف در اختیار تحلیل گر قرار می‌دهند. از معیارهای رایج عملکرد سیستم می‌توان به ضریب بهره‌برداری خدمت دهنده که همان درصدی از زمان که خدمت دهنده مشغول است، طول صف‌های انتظار و مدت انتظار متقاضیان در صف را نام برد.



شکل ۱: مدل ساده صف

در بسیاری از موارد، به هنگام طراحی یا در تلاش برای اصلاح سیستم صف، تحلیل گر یا تصمیم گیرنده با ایجاد توازن بین ضریب اشتغال خدمت دهنده و میزان جلب رضایت متقاضی که رابطه مستقیم با طول صف و مدت انتظار در صف دارد، به اصلاح سیستم می‌پردازد. به منظور پیش بینی معیارهای عملکرد سیستم بر حسب تابعی از پارامترهای ورودی، از نظریه صف و یا شبیه‌سازی استفاده می‌کنند. از جمله پارامترهای ورودی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

✓ آهنگ ورود متقاضی به سیستم

✓ نوع خدمت دهی به متقاضی

✓ سرعت خدمت دهی

✓ تعداد خدمت دهنده‌ها

✓ نظام خدمت دهنده‌ها

برخی از پارامترهای ورودی تا حدی توسط مدیریت به طور **مستقیم** قابل کنترل و مهار است. اگر رابطه بین معیارهای عملکرد و پارامترهای ورودی در مورد سیستم در دست بررسی به طرز مناسبی شناسایی شده باشد، معیارهای عملکرد به طور **غیرمستقیم** توسط مدیریت پارامترهای ورودی قابل کنترل خواهد بود.

در مورد سیستم‌های نسبتاً ساده، می‌توان معیارهای عملکرد را از طریق **معادلات تحلیلی** به **فرم بسته** برآورد کرد که در مقایسه با کاربرد مدل شبیه‌سازی متضمن صرفه جویی قابل توجهی در وقت و هزینه است. اما برای ایجاد مدل‌های **واقع بینانه** و سیستم‌های **پیچیده** معمولاً نیاز به شبیه‌سازی وجود دارد. مدل‌های تحلیلی با وجود نیاز به فرض‌های ساده‌کننده متعدد، در ارایه **سریع** برآوردهای تقریبی در مورد عملکرد سیستم ارزشمند است. سپس، می‌توان با استفاده از مدل تفضیلی و واقع بینانه شبیه‌سازی، برآوردهای فوق را بهبود بخشید.

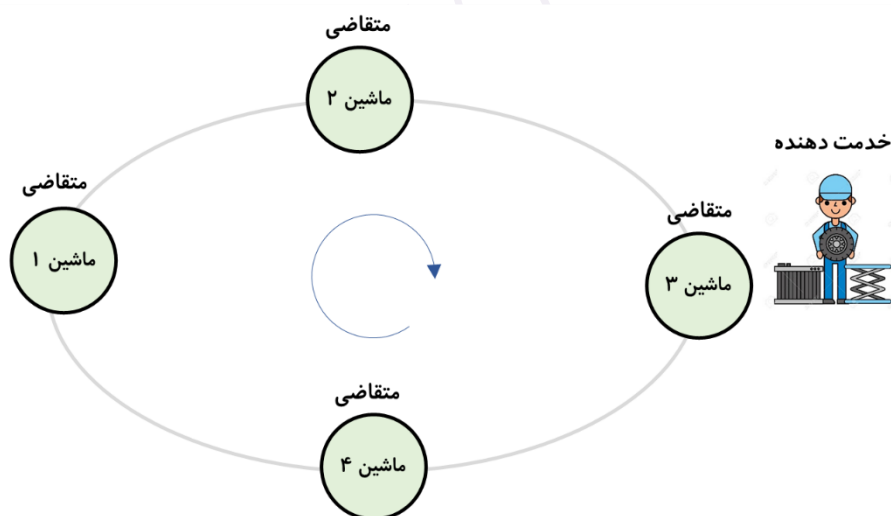
ویژگی‌های سیستم صف

عناصر عمده سیستم عبارتند از: **متقاضیان** و **خدمت دهنده‌ها**. واژه "**متقاضی**" را می‌توان به مردم، خودروها، کامیون‌ها، کارگران ساختمان، بیماران، پالت‌ها، هواپیما، جعبه‌ها، سفارش‌ها، یا البسه چرک و به طور کلی هر آنچه به منظور **دریافت خدمت** به امکاناتی نیاز دارد تعبیر کرد. واژه "**خدمت دهنده**" را می‌توان به راهنما، تعمیرکار، مکانیک خودرو، پزشک، ماشین خودکار انبارکردن و دریافت از انبار، باند

فرودگاه، دستگاه خودکار بسته بندی، ماشین لباس شویی و به طور کلی هر کس یا دستگاهی که خدمت مورد نیاز را **ارایه** می کند، تعبیر کرد.

جمعیت متقاضی

جمعیت متقاضیان بالقوه ممکن است **متناهی** یا **نامتناهی** باشند. برای جمعیت متقاضی متناهی این مثال را در نظر بگیرید. مجموعه ای متشکل از ۴ ماشین را در نظر بگیرید که عمل آوری لاستیک خودرو را انجام می دهند. با گذشت یک فاصله زمانی، هر ماشین به طور خودکار باز می شود و کارگری لاستیک موجود در آن را بیرون می آورد و یک حلقه لاستیک پخته نشده در داخل آن قرار می دهد. ماشین ها همان متقاضیان هستند که در لحظه باز شدن دستگاه، عمل وارد شدن به سیستم انجام می شود. کارگر همان خدمت دهنده است که به ماشین های باز شده خدمت می دهد. جمعیت متقاضی متناهی و متشکل از ۴ ماشین است که در شکل ۲ نمایش شماتیک آن آورده شده است.



شکل ۲: نمایش شماتیک سیستم صف با تعداد متقاضی متناهی

در بسیاری از سیستم ها با جمعیت بزرگ، معمولاً جمعیت متقاضی **نامتناهی** فرض می شود. این فرض در مورد چنین سیستم هایی معمولاً ضرر ندارد و باعث می شود که سیستم را ساده کند. مثال های از جمعیت های نامتناهی شامل متقاضیان بالقوه یک رستوران، بانک، و خدمت دهنده ها می تواند مانند بانه های سفارش غذا و بانه های بانک اشاره کرد.

نکته: اگر چه جمعیت واقعی ممکن است متناهی و بزرگ باشد ولی به طور کلی استفاده از مدل‌های مرتبط به جمعیت نامتناهی بدون ایراد است، مشروط بر این که تعداد متقاضیان در حال دریافت خدمت یا منتظر در صف برای خدمت‌گیری در هر لحظه نسبت به جمعیت متقاضیان بالقوه کوچک باشد.

تفاوت اصلی بین مدل‌های جمعیت متناهی و نامتناهی در این است که آهنگ ورود چگونه تعریف شود. در مدل جمعیت نامتناهی، **آهنگ ورود** (یعنی متوسط تعداد ورود در واحد زمان) تحت تاثیر تعداد متقاضیانی که جمعیت متقاضی را ترک می‌کنند و به سیستم صف می‌پیوندند قرار **نمی‌گیرد**.

نکته: اگر دوره **هجوم** بر متقاضیان وجود نداشته باشد، آهنگ ورود را **ثابت** در نظر می‌گیریم.

آهنگ ورود به سیستم صف در مدل‌های جمعیت **متناهی** متقاضیان قطعا به تعداد متقاضیان در حال خدمت‌گیری یا منتظر در صف بستگی دارد. جمعیت متقاضی می‌تواند شامل یک عضو باشد. مثلا هواپیمای شخصی ریس جمهور را در نظر بگیرید. وقتی گروه تعمیرکارانی که ۲۴ ساعته آماده آرایه خدمت هستند در حال خدمت دهی به این هواپیما هستند، آهنگ ورود صفر است زیرا هیچ متقاضی بالقوه دیگر وجود ندارد تا به تشکیلات نگهداری مراجعه کند.

ظرفیت سیستم

در بسیاری از سیستم‌های صف، حدی برای تعداد متقاضیانی که می‌توانند در صف انتظار یا در سیستم قرار گیرند وجود دارد. مثلا، یک کارواش خودکار ممکن است تنها دارای فضا برای ده خودرو در صف انتظار باشد. ممکن است توقف خودروها در خیابان بسیار خطرناک یا خلاف مقررات است. یک متقاضی تازه وارد که سیستم را پر بیابد، وارد آن نمی‌شود و فوراً به جمعیت متقاضی برمی‌گردد. برخی از سیستم‌ها مانند سیستم ثبت نام دانشجویان را می‌توان دارای ظرفیت نامحدود به شمار آورد و محدودیت‌هایی در مورد تعداد دانشجویانی که مجاز به قرار گرفتن در صف انتظار هستند وجود ندارد. چنانکه بعداً خواهیم دید، هر گاه ظرفیت سیستم محدود باشد تمیز بین **آهنگ ورود** (همان تعداد مراجعه به سیستم در واحد زمان) و **آهنگ موثر ورود** (همان تعداد موارد مراجعه به سیستم و ورود آنی در واحد زمان) **ضروری** است.

فرآیند ورود

فرآیند ورود برای مدل‌ها با جمعیت نامتناهی، معمولاً بر حسب مدت‌های بین ورود متقاضیان متوالی مشخص می‌شود. ورودها ممکن است در لحظات از قبل تعیین شده (همان قطعی) یا در لحظات تصادفی روی دهند. اگر ورود در لحظات تصادفی صورت گیرد، معمولاً مدت‌ها بین ورود با توزیع آماری مشخص می‌شوند. علاوه بر این، متقاضیان می‌توانند یک به یک یا به صورت گروهی وارد شوند. اندازه یک گره ممکن است ثابت یا متغیر و تصادفی باشد.

مهمترین مدل مربوط به ورود تصادفی فرایند ورود پواسون است. اگر مدت زمان بین ورود متقاضی $n-1$ و متقاضی n با A_n معرفی شود (A_1 لحظه واقعی ورود اولین متقاضی است)، در مورد فرایند ورود پواسون، A_n توزیع آماری نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ واحد زمان دارد و آهنگ ورود λ متقاضی در واحد زمان است. تعداد ورود در فاصله زمانی به طول t یعنی $N(t)$ ، توزیع پواسون با میانگین λ متقاضی دارد.

فرایند ورود پواسون به عنوان مدل ورود مردم به رستوران‌ها، اتوبانک‌ها و سایر تشکیلات خدماتی، ورود تقاضاهای تلفنی به مرکز هدایت مشتری، ورود تقاضا یا سفارش برای یک خدمت یا کالا و ورود قطعات یا ماشین آلات از کار افتاده به تعمیرگاه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

رفتار صف و قانون صف

منظور از رفتار صف، کنش‌های متقاضی تا زمان شروع خدمت‌گیری در صف انتظار است. در برخی موارد این امکان وجود دارد که متقاضی تازه از راه رسیده بلافاصله (با مشاهده صفی بسیار طولانی) یا با تاخیر (پس از مشاهده حرکت بسیار کند صف) از پیوستن به سیستم یا ماندن در آن منصرف شود و یا (پس از مشاهده این که در صفی است که آرام حرکت می‌کند) تغییر صف بدهد.

منظور از قانون صف، ترتیب منطقی متقاضیان در صف است و تعیین می‌کند که با آزاد شدن یک خدمت دهنده کدام متقاضی باید برای خدمت‌گیری انتخاب شود. قوانین رایج صف مشتمل بر خدمت‌گیری به ترتیب ورود (FIFO یا First In First Out)، به عکس ترتیب ورود (LIFO یا Last In First Out)، به ترتیب

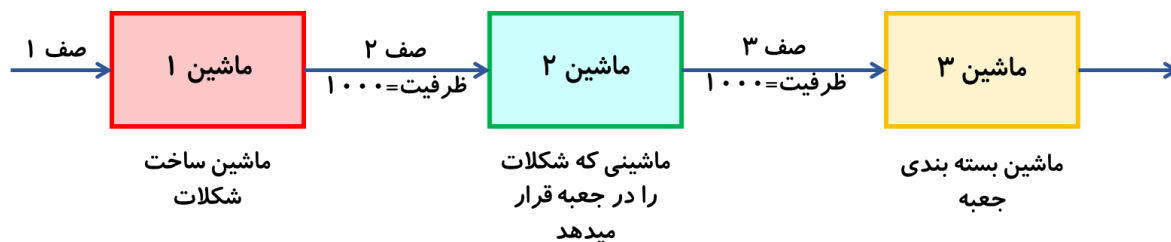
تصادفی (SIRO یا Served In Random Order)، براساس کوتاهترین مدت مورد نیاز (SPT یا Shortest Processing Time First)، و براساس اولویت (PR یا Priority) است.

مدت‌های خدمتدهی و مکانیزم آن

مدت‌های خدمت دهی متقاضیان با نمادهای $K_1, K_2, K_3, \dots$... نشان داده می‌شود. این مدت‌ها می‌تواند ثابت یا تصادفی باشند. در حالت تصادفی، معمولاً دنباله $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ ، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع هستند. توابع توزیع نمایی، ویبول، گاما، و نرمال همگی می‌توانند به عنوان توابع توزیع برای مدت خدمتگیری مورد استفاده قرار گیرد.

هر سیستم صف از تعدادی مرکز خدمتدهی و صف‌های مرتبط کننده آن‌ها تشکیل می‌شود. هر مرکز خدمت دهی مشتمل است بر تعدادی خدمت دهنده به تعداد c که به صورت موازی فعالیت دارند. موازی بودن به این معنا است که متقاضی با رسیدن به سر صف، هر متقاضی اولین خدمت دهنده بیکار را انتخاب می‌کند. تعداد خدمت دهنده می‌تواند از یک تا نامحدود تغییر کند.

مثال ۱: خط تولید یک واحد ساخت شکلات سه دستگاه ماشین را در بر می‌گیرد. ماشین اول قطعات شکلات را تولید و در بسته خود قرار می‌دهد. ماشین دوم هر ۵۰ قطعه شکلات را در یک جعبه می‌گذارد و ماشین سوم جعبه را کاملاً می‌بندد و آن را در سلفون قرار می‌دهد. هر یک از دو انبار میان خدمت دهنده‌ها ظرفیت ۱۰۰۰ جعبه را دارد. در شکل ۳ این سیستم نمایش داده شده است. سیستم سه مرکز خدمتدهی و هر مرکز یک خدمت دهنده دارد و ظرفیت صف‌های بین ماشین‌ها نیز دارای محدودیت است. چنین فرض می‌شود که در صف اول همواره موجودی کافی ماده خام در دست است. به سبب محدودیت ظرفیت صف، هر گاه که موجودی ماشین ۲ پر شود، ماشین ۱ متوقف می‌شود و حال آنکه با خالی شدن همین صف، ماشین ۲ متوقف می‌شود. به طور خلاصه، سیستم، سه صف تک مجرای زنجیره‌ای با محدودیت‌های ظرفیت صف و جریان پیوسته ورود به اولین صف است.



شکل ۳: نمایش شماتیک خط تولید شکلات

نمادگذاری سیستم‌های صف

با توجه به تنوع سیستم‌های صف، در ادبیات نظریه صف روالی برای معرفی سیستم‌های موازی صف پیشنهاد شده که به طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرد. نسخه اختصاری چنین عرفی مبتنی بر شکل $A/B/c/N/K$ است. این حروف معرف مشخصه‌های زیر برای سیستم صف است که در ادامه تعریف می‌شوند.

A: نشان دهنده تابع توزیع مدت زمان فواصل بین دو ورود متوالی است.

B: معرف تابع توزیع مدت زمان خدمت‌دهی است.

C: نشان دهنده تعداد خدمت دهنده‌های موازی است.

N: معرف ظرفیت سیستم است.

K: نشان دهنده اندازه جمعیت است.

نکته: علائم مرسوم برای A و B عبارت اند از M (نمایی)، D (ثابت یا قطعی)، E_k (ارلنگ مرتبه k) و G (عمومی یا دلخواه).

مثلا $M / M / 1 / \infty / \infty$ معرف سیستمی با یک خدمت دهنده است که ظرفیت صف آن نامحدود و جمعیت متقاضیان بالقوه آن نیز نامتناهی باشد. مدت‌های بین ورود و مدت زمان‌های خدمت دهی نیز توزیع نمایی دارند. هر گاه N و K نامتناهی باشند می‌توان آن‌ها را از انتهای علامت فوق حذف کرد. مثلا $M / M / 1 / \infty / \infty$ را اغلب به صورت کوتاه $M / M / 1$ می‌نویسند.

برای آرایه نظریه صف نیاز به معرفی علائم خاصی است که در جدول زیر آرایه می‌شود.

علامت	تعریف
P_n	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در حالت پایا
$P_n(t)$	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در لحظه t
λ	آهنگ ورود
λ_e	آهنگ ورود موثر
μ	آهنگ خدمت دهی یک خدمت دهنده
μ_e	آهنگ خدمت دهی موثر یک خدمت دهنده
ρ	ضریب بهره برداری از خدمت دهنده
A_n	مدت بین ورود متقاضی $n-1$ ام و متقاضی n ام
S_n	مدت خدمت دهی به n امین متقاضی
W_n	مجموع مدتی که متقاضی n ام در سیستم می‌ماند
W_n^Q	مجموع مدتی که متقاضی n ام در صف انتظار می‌ماند
$L(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در لحظه t
$L_Q(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در لحظه t
L	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم در بلند مدت
L_Q	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در صف انتظار در بلند مدت
w	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلند مدت
w_Q	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلند مدت

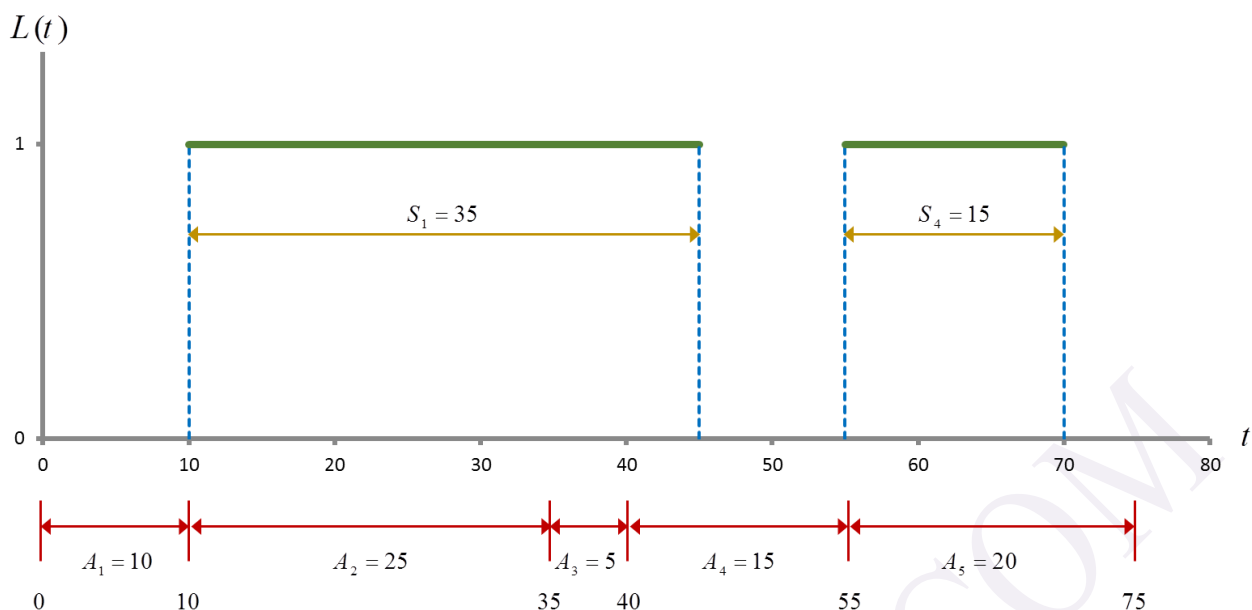
رفتار گذرا و پایای سیستم‌های صف

سیستم $M / M / 1 / 1 / \infty$ را در نظر بگیرید که در لحظه صفر خالی و بدون فعالیت است و یک صف تک مجرای با ورودهای پواسون با میانگین λ ورود در واحد زمان و مدت‌های خدمت دهی نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ واحد زمان در نظر بگیرید. ظرفیت سیستم برابر با یک است به طوری که هرگز صف انتظار تشکیل نمی‌شود و متقاضیان از جمعیت نامتناهی که خدمت دهنده را مشغول بیاوند برمی‌گردند.

مثال ۲: یک سکوی بارگیری را در نظر بگیرید که فضایی برای یک کامیون دارد و فاقد جا برای تشکیل صف انتظار است. اگر کامیونی در سکوی بارگیری باشد، تمام کامیون هایی که وارد می شوند باید به سکوهای دیگر بروند. هر گاه کامیونی وارد شود یا از سکو دور می شود و به محل دیگری برای تخلیه می رود و یا تخلیه آن سریعاً شروع می شود.

کامیون ها طبق توزیع پواسون با میانگین $\lambda = 2$ در ساعت وارد می شوند، در حالی که بارگیری و یا تخلیه در قالب متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\mu^{-1} = 120$ دقیقه است، به طوری که آهنگ خدمت دهی معادل $\mu = 0.5$ در ساعت است. چون جمعیتی بسیار بزرگ از کامیون ها متقاضی به صورت بالقوه وجود دارند، مدلی برای این سیستم صف به صورت $M / M / 1 / 1 / \infty$ است. در ادامه از طریق شبیه سازی این سیستم مورد بررسی قرار می گیرد.

فرض کنید سکو در لحظه صفر خالی است. به علاوه فرض کنید که مدت زمان های بین دو ورود متوالی تولید شده و برحسب دقیقه عبارت از $A_1 = 10$ ، $A_2 = 25$ ، $A_3 = 5$ ، $A_4 = 15$ ، $A_5 = 20$ و مدت های خدمت دهی نیز تولید شده و برحسب دقیقه عبارت از $S_1 = 35$ ، $S_2 = 20$ ، $S_3 = 60$ ، $S_4 = 15$ ، $S_5 = 134$ است. نمایشی از تغییرات $L(t)$ که همان تعداد کامیون های حاضر در لحظه t است در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴: نمایش تغییرات $L(t)$ در بازه زمانی صفر تا ۷۰

شکل فوق را می‌توان به عنوان شبیه‌سازی سکوی بارگیری و تخلیه کامیون‌ها از لحظه صفر تا لحظه ۷۵ به شمار آورد. باید توجه داشت که کامیون‌های دوم و سوم در لحظات ۳۵ و ۴۰ امکان ورود به سیستم را نمی‌یابند زیرا در این مدت کامیون اول هنوز در سیستم حاضر است و از این جهت S_2 و S_3 هیچ نقشی در شبیه‌سازی بازی نمی‌کنند.

ضریب بهره برداری مشاهده شده یا درصد مدتی که از لحظه صفر تا زمان $T = 75$ ، خدمت دهنده مشغول است با $\hat{\rho}$ نمادگذاری و براساس اطلاعات شبیه‌سازی شده به طریق زیر برآورد می‌شود.

$$\hat{\rho} = \frac{35+15}{10+25+5+15+20} = \frac{50}{75} = 0.67$$

در بسیاری از سیستم‌ها، تحلیل گر به خصوصیات سیستم در **بلند مدت** یا در **حالت پایا** علاقه مند است. درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده (در بلند مدت) در هر سیستم صف $M/M/1/1/\infty$ را می‌توان از طریق رابطه زیر محاسبه کرد.

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

نکته: مقدار ρ از شرایط شروع مستقل است. باید توجه داشت که ضریب بهره برداری در بلند مدت بین **صفر و یک** است. حال آن که ضریب بهره برداری مشاهده شده، $\hat{\rho}$ ، متغیر تصادفی است زیرا به ورودهای تصادفی خدمت دهی بستگی دارد. همچنین $\hat{\rho}$ به طول مدت مشاهده و به شرایط شروع همان **وضعیت سیستم در زمان صفر** بستگی دارد. با افزایش مدت شبیه سازی، تاثیر شرایط شروع کاهش می یابد و $\hat{\rho}$ به ρ میل می کند.

با استفاده از نظریه ریاضی صف می توان نشان داد که توزیع احتمال تعداد متقاضی در سیستم در لحظه t ، یعنی $L(t)$ به شرح زیر است:

$$P(L(t)=0) = P_0(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \alpha_0 \times e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P(L(t)=1) = P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \alpha_1 \times e^{-(\lambda+\mu)t}$$

که در آنها، α_0 و α_1 ثابت های مستقل از t ، ولی وابسته به شرایط اولیه مسئله هستند.

$$\alpha_0 = P_0(0) - \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$\alpha_1 = P_1(0) - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

چون $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ است، صرف نظر از شرایط شروع شبیه سازی، با میل زمان یا t به سمت **بی نهایت** داریم که $e^{-(\lambda+\mu)t} \rightarrow 0$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_0(t) \rightarrow P_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$P_1(t) \rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

نکته: به احتمالات P_0 و P_1 احتمالات **حالت پایا** می گویند.

نکته: به ازای هر مقداری از $t \geq 0$ رابطه $P_0(t) + P_1(t) = 1$ برقرار است.

نکته: پس از یک دوره زمانی به اندازه کافی طولانی، سیستم در **حالت پایا** یا **تعداد آماری** می‌رسد.

مثال ۳: سکوی تخلیه و بارگیری **مثال ۲** را در نظر بگیرید. در این مثال، صف را به صورت

$M / M / 1 / 1 / \infty$ با دو ورود در ساعت یا $\lambda = 2$ و متوسط مدت خدمت دهی ۲ ساعت یا $\mu = \frac{1}{2}$ در نظر

بگیرید. فرض کنید که در لحظه صفر سیستم خالی است بنابراین داریم:

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = 0$$

با توجه به معادله‌های زیر داریم:

$$P(L(t)=0) = P_0(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \alpha_0 \times e^{-(\lambda + \mu)t} = \frac{0.5}{2 + 0.5} + \left(1 - \frac{0.5}{2 + 0.5}\right) e^{-2.5t} = 0.2 + 0.8e^{-2.5t}$$

$$P(L(t)=1) = P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \alpha_1 \times e^{-(\lambda + \mu)t} = \frac{2}{2 + 0.5} + \left(0 - \frac{2}{2 + 0.5}\right) e^{-2.5t} = 0.8 - 0.8e^{-2.5t}$$

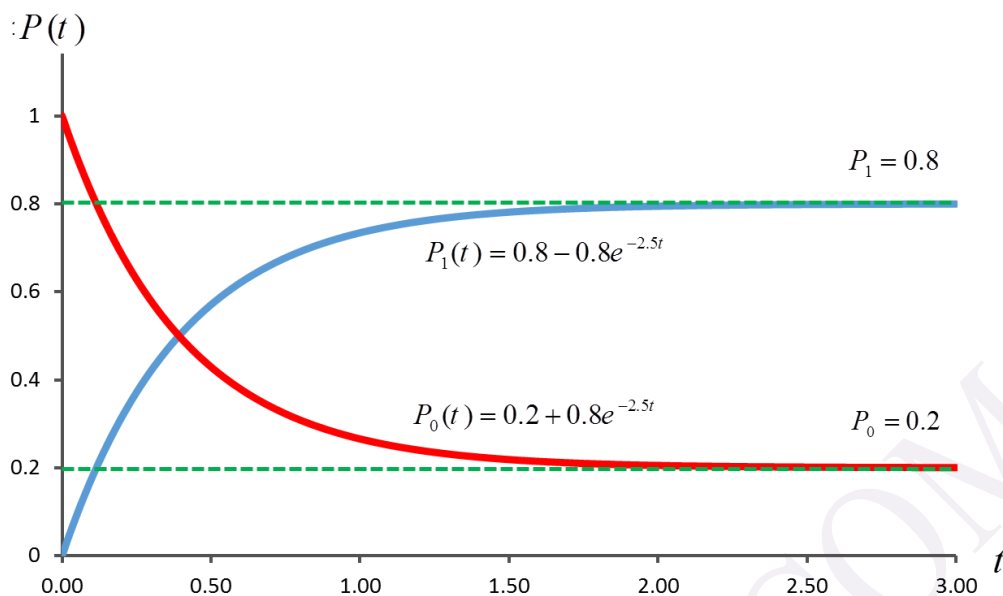
در صورت این که زمان به سمت بی نهایت میل کند، احتمالات **پایا** به شرح زیر بدست می‌آید.

$$P_0 = 0.2, \quad P_1 = 0.8$$

نکته: به ازای تمامی مقادیر $t \geq 0$ روابط زیر برقرار است.

$$P_1(t) < P_1, \quad P_0(t) > P_0$$

نمایش احتمالات گذرا براساس زمان برای دو احتمال $P_1(t), P_0(t)$ به صورت زیر می‌شود.



شکل ۵: احتمالات گذرا و احتمالات حالت پایا در مورد صف $M / M / 1 / 1 / \infty$

نکته: گرچه آهنگ ورود به سکو برای تخلیه و بارگیری برابر ۲ کامیون بر ساعت است، به سبب محدودیت مربوط به ظرفیت سیستم، این امکان از قوه به فعل در نمی‌آید. آهنگ موثر ورود که به صورت متوسط تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم در ساعت تعریف می‌شود، عبارت است از:

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_1) = 2 \times (1 - 0.8) = 0.4$$

همچنین آهنگ موثر خدمت دهی که به صورت تعداد متقاضیان خدمت گرفته در واحد زمان به صورت زیر تعبیر می‌شود.

$$\mu_e = \mu(1 - P_0) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$$

نکته: به طور کلی در مورد سیستم‌هایی که ورود آن‌ها فرایند پواسون باشد، اگر N ظرفیت سیستم باشد، **آهنگ موثر ورود** برابر $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$ است. همچنین **آهنگ موثر خدمت دهی** با یک خدمت دهنده برابر با $\mu_e = \mu(1 - P_0)$ است.

معیارهای عملکرد سیستم‌های صف در بلند مدت

معمولا کلمه **سیستم** به صف انتظار به همراه مکانیزم خدمت دهی اشاره دارد. منظور از **صف** تنها صف

انتظار است. معیارهای اصلی عملکرد سیستم‌های صف در **بلند مدت** عبارت اند از:

- ✓ میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلند مدت یا L
- ✓ میانگین تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در بلند مدت یا L_Q
- ✓ میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلند مدت یا w
- ✓ میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلند مدت یا w_Q
- ✓ ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده یا ρ

از دیگر معیارهای عملکرد مورد توجه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ✓ درصد متقاضیانی که در بلند مدت بیشتر از t_0 واحد زمان در صف می‌مانند.
- ✓ درصد متقاضیانی که در بلند مدت به سبب وجود محدودیت در ظرفیت سیستم امکان راه یافتن به آن را نمی‌یابند
- ✓ درصد مدتی که در بلند مدت طول صف انتظار از k_0 متقاضی بیشتر است.

در ادامه این بخش به تشریح معیارهای اصلی عملکرد برای سیستم کلی صف $G / G / c / N / K$

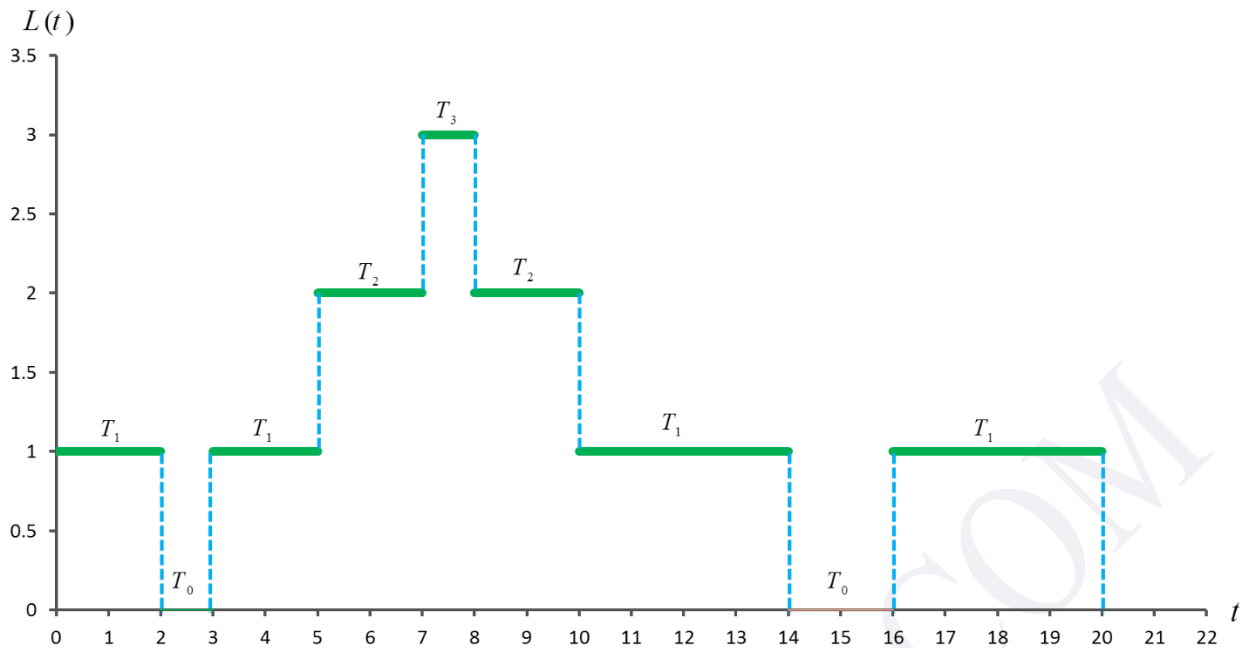
می‌پردازیم.

میانگین زمانی تعداد در سیستم یا L

یک سیستم صف را طی دوره زمانی T مورد بررسی قرار می‌دهیم و فرض کنید که $L(t)$ معرف تعداد

متقاضیان حاضر در سیستم در لحظه t باشد. برای نمونه، یک شبیه‌سازی ساده در شکل زیر نمایش داده

شده است.



شکل ۶: تعداد متقاضی در سیستم در بازه زمانی صفر تا ۲۰

در شکل فوق، T_i مجموع مدتی در بازه $[0, T]$ که دقیقاً i متقاضی در سیستم حاضر باشد. در شکل فوق، مقادیر به صورت زیر بدست می‌آید.

$$T_0 = 1 + 2 = 3$$

$$T_1 = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$$

$$T_2 = 2 + 2 = 4$$

$$T_3 = 1$$

نکته: به طور کلی رابطه $\sum_{i=0}^{\infty} T_i = T$ برقرار است. میانگین تعداد متقاضیان در سیستم به صورت زیر

محاسبه می‌شود.

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{T_i}{T} \right)$$

نکته: علامت کلاه $\hat{L}$ در این معنا است که مقدار محاسبه شده، برآوردی از مقدار واقعی L

است و برای محاسبه مقدار واقعی طول مدت شبیه‌سازی را باید افزایش داد.

در مورد شکل بالا، میانگین تعداد متقاضی به صورت زیر می‌شود.

$$\hat{L} = \frac{[0(3) + 1(12) + 2(4) + 3(1)]}{20} = \frac{23}{20} = 1.15$$

عبارت T_i/T معرف درصد مدتی است که سیستم دقیقاً i متقاضی را در بر دارد.

نکته: معنا عبارت $\sum_{i=0}^{\infty} iT_i$ همان سطح زیر منحنی $L(t)$ است که می‌توان به صورت ریاضی به صورت

$$\int_0^T L(t) dt \text{ نمایش داد. لذا } \hat{L} \text{ به صورت زیر هم می‌توان محاسبه کرد.}$$

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt$$

بسیاری از سیستم‌های صف که در بلند مدت از خود پایداری نشان می‌دهند ($\rho < 1$)، با بزرگ شدن زمان شبیه‌سازی، مقدار $\hat{L}$ به مقدار حدی L که میانگین زمانی تعداد متقاضی در سیستم در بلند مدت است میل می‌کند. به بیان ریاضی داریم:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} L$$

مشابه معیار $\hat{\rho}$ ، مقدار $\hat{L}$ به شرایط شروع شبیه‌سازی ارتباط دارد.

اگر $L_Q(t)$ معرف تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار و T_i^Q معرف مجموع مدت حضور دقیقاً i متقاضی در فاصله زمان $[0, T]$ در صف انتظار باشد، آنگاه داریم:

$$\hat{L}_Q = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} iT_i^Q = \frac{1}{T} \int_0^T L_Q(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} L_Q$$

که در رابطه بالا، $\hat{L}_Q$ میانگین زمانی تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار از زمان صفر تا زمان T و L_Q میانگین زمانی تعداد در صف انتظار در بلند مدت است.

میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم، $\bar{w}$

سیستم صفی را برای دوره زمانی T را در نظر بگیرید که مدتی را که هر متقاضی در محدود $[0, T]$ در سیستم به سر می برد را $W_1, W_2, W_3, \dots, W_N$ بنامید. N را تعداد موارد ورود بین $[0, T]$ بنامید. در این صورت میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم (یا به اختصار مدت سیستم) از طریق رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\hat{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i$$

در مورد سیستم های پایدار در طول زمان، با میل N به سمت بی نهایت خواهیم داشت.

$$\hat{w} \rightarrow w$$

که در آن میانگین مدت سیستم در **بلند مدت** است.

اگر سیستم در دست بررسی فقط یک صف داشته باشد و W_i^Q مجموع مدت به سر بردن متقاضی i در صف انتظار، $\hat{w}^Q$ میانگین **مشاهده شده** مدت به سر بردن در صف و w^Q میانگین **بلند مدت** مدت بودن در صف برای هر متقاضی باشد، آنگاه داریم:

$$\hat{w}^Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i^Q \xrightarrow{N \rightarrow \infty} w^Q$$

مانند $\hat{L}$ و $\hat{\rho}$ ، برآوردکننده های $\hat{w}$ و $\hat{w}^Q$ تحت تاثیر شرایط شروع و طول مدل شبیه سازی قرار دارند.

معادله پایستگی یا $L = \lambda w$

در مورد همه سیستم های صف صرف نظر از تعداد خدمت دهنده ها، قانون صف، یا هر گونه شرایط خاص دیگر رابطه زیر برقرار است:

$$L = \lambda w$$

به معادله فوق، **معادله پایداری یا قانون لیتل** اتلاق می‌شود. این معادله بیان می‌کند که میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم برابر است با **حاصلضرب** میانگین تعداد ورودها در واحد زمان در میانگین مدت به سر بردن در سیستم. بنابر شکل ۶، در هر ۴ واحد زمان یک ورود به سیستم رخ می‌دهد و هر شخص وارد شده مدتی معادل ۴.۶ واحد زمان در سیستم می‌ماند. بنا بر قانون لیتل در هر لحظه اختیاری از زمان، به طور متوسط تعداد $1/4 \times 4.6 = 1.15$ متقاضی در سیستم حضور دارند.

ضریب بهره برداری خدمت دهنده

ضریب بهره برداری را نسبت مدتی که خدمت دهنده مشغول است تعریف می‌کنند. ضریب بهره برداری مشاهده شده که با $\hat{\rho}$ نشان داده می‌شود برای یک فاصله زمانی مشخص مانند $[0, T]$ تعریف و محاسبه می‌شود. ضریب بهره برداری خدمت دهنده در بلند مدت را با ρ نشان می‌دهند. در سیستم‌هایی که در **بلند مدت** به پایداری می‌رسند داریم:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \rho$$

مثال ۳: با توجه به شکل ۶ و با قبول این که یک خدمت دهنده وجود دارد، می‌توان ضریب بهره برداری خدمت دهنده را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{T} \times \sum_{i=1}^{\infty} T_i = \frac{T - T_0}{T} = \frac{20 - 3}{20} = \frac{17}{20}$$

در صف تک مجرای (یعنی متقاضیان در یک خط قرار می‌گیرند)، ضریب بهره برداری خدمت دهنده در بلند مدت برابر است با میانگین آهنگ ورود **تقسیم بر** میانگین آهنگ خدمت دهی. برای این که صف **تک مجرای پایدار** باشد، باید آهنگ ورود λ کوچکتر از آهنگ خدمت دهی μ باشد، یعنی $\lambda < \mu$ یا

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

اگر آهنگ ورود بزرگتر از آهنگ خدمت دهی باشد، $\lambda > \mu$ ، سرانجام خدمت دهنده به طور فزاینده ای از نظر خدمت دادن عقب می‌افتد. پس از مدتی خدمت دهنده همواره مشغول خواهد بود و طول صف انتظار

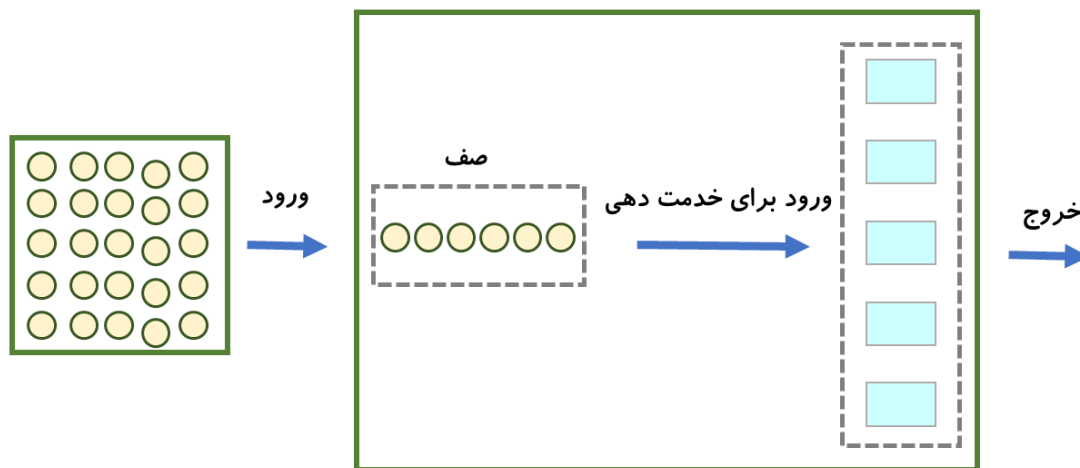
با آهنگ متوسط $\lambda - \mu$ متقاضی در واحد زمان رو به افزایش می‌گذارد. در مورد سیستم‌های صف تک مجرای پایدار ($\rho < 1, \lambda < \mu$)، معیارهای عملکرد در بلند مدت از قبیل طول صف L_Q (به طور مشابه L, W, W_Q) کاملاً تعریف شده است و در مورد سیستم‌های ناپایدار ($\lambda > \mu$)، ضریب بهره برداری خدمت دهنده در بلند مدت مساوی یک و میانگین طول صف در بلند مدت، **نامتناهی** می‌شود یعنی

$$\frac{1}{T} \int_0^T L_Q(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} L_Q = \infty$$

همچنین داریم $L = W = W_Q = \infty$ و در نتیجه این معیارهای عملکرد در بلند مدت برای صف‌های **ناپایدار** بی معنی است. به مقدار λ/μ **شدت آمد و شد** می‌گویند زیرا معیاری است که حجم کار عرضه شده به سیستم را می‌سنجد.

ضریب بهره برداری در صف‌های $G/G/c/\infty/\infty$

سیستم صفی با c خدمت دهنده یکسان و موازی را در نظر بگیرید. اگر یک متقاضی تازه وارد بیش از یک خدمت دهنده را بیکار بیاورد، بدون ترجیح دادن یک خدمت دهنده بر دیگران، یک خدمت دهنده را انتخاب می‌کند. در برخی از اوقات می‌توان خدمت دهنده ممکن است به طور تصادفی برگزیده شود. ورود با آهنگ λ و از یک جمعیت نامتناهی متقاضیان صورت می‌گیرد و هر خدمت دهنده با آهنگ μ متقاضی در واحد زمان کار می‌کند.



شکل ۷: نمایش شماتیک سیستم این صف

ضریب بهره برداری خدمت دهنده در بلند مدت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

که در رابطه فوق، $0 \leq \rho \leq 1$ است. ضریب بهره برداری ρ را می‌توان به عنوان درصد مدتی که **یک** خدمت دهنده دلخواه در بلند مدت مشغول است تعبیر کرد.

بالاترین آهنگ خدمت دهی برای سیستم $G/G/c/\infty/\infty$ معادل $c\mu$ است و این حالت وقتی رخ می‌دهد که **تمام** خدمت دهنده‌ها مشغول باشند. اگر بخواهیم سیستم پایدار باشد، میانگین آهنگ ورود λ باید از بالاترین آهنگ خدمت‌دهی $c\mu$ کوچکتر باشد. به عبارت دیگر **شرط لازم و کافی** برای پایدار بودن سیستم عبارت است از:

$$\lambda < c\mu$$

اگر $\lambda > c\mu$ باشد، به طور متوسط ورود به سیستم سریعتر از آن صورت می‌گیرد که سیستم بتواند پاسخگوی آن باشد و تمام خدمت دهنده‌ها همواره مشغول اند و طول صف انتظار با آهنگ متوسط $\lambda - c\mu$ متقاضی در واحد زمان افزایش می‌یابد. چنین سیستمی **ناپایدار** است و معیارهای عملکرد در بلند مدت (w_Q, w, L_Q, L) برای این سیستم **بی معنی** است.

مثال ۴: متقاضیان به طور تصادفی و با آهنگ $\lambda = 20$ متقاضی در واحد زمان به اداره شماره گذاری خودرو وارد می‌شوند. تعداد خدمت دهنده‌ها در حال حاضر معادل ۲۰ نفر است که به طور متوسط هر یک از خدمت دهنده‌ها به ۵ متقاضی در ساعت یا $\mu = 5$ خدمت می‌دهند. به این ترتیب، به موجب معادله $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ ، ضریب بهره برداری هر خدمت دهنده در بلند مدت عبارت است از:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{50}{20(5)} = 0.5$$

میانگین تعداد خدمت دهنده‌های مشغول عبارت است از: $c\rho = 20 \times 0.5 = 10$. به این معنا که در بلند مدت، تنها در ۵۰ درصد از زمان یک خدمت دهنده در حال خدمت دادن به متقاضیان است. رئیس اداره با این پرسش روبرو است که آیا می‌توان تعداد خدمت دهنده را کاهش داد. برای پایدار بودن سیستم لازم است که برای تعداد خدمت دهنده رابطه زیر برقرار باشد

$$c > \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow c > \frac{50}{5} = 10$$

پس رئیس اداره می‌تواند تعداد خدمت دهنده‌ها را تا حداقل ۱۱ نفر کاهش دهد. باید توجه داشت که شرط $c \geq 11$ تنها متضمن پایداری در بلند مدت است که به طور متوسط تمام خدمت دهنده‌ها در صورت بهره برداری می‌توانند حجم کار وارد شده را پاسخ گویند. اما رئیس اداره ممکن است به سبب عوامل دیگری از قبیل مدت‌های انتظار متقاضی و طول صف انتظار، مایل به در اختیار داشتن تعداد خدمت دهنده ای بیش از حداقل مورد نیاز یعنی ۱۱ خدمت دهنده باشد.

نکته: یک صف پایدار در عین حال ممکن است به طور متوسط صف‌های بسیار طولانی داشته باشد.

عامل هزینه در مسائل صف

در بسیاری از موارد تحلیل مسائل صف، هزینه‌هایی به جنبه‌های مختلف صف انتظار یا خدمت دهنده‌ها، تعلق می‌گیرد. فرض کنید که سیستم برای هر متقاضی حاضر در صف هزینه ای مثلاً از قرار ۱۰ واحد پول در ساعت می‌پردازد. اگر متقاضی i ام معادل W_i^Q ساعت در صف بماند، هزینه کل مربوط به N

متقاضی که در خلال شبیه‌سازی به سیستم وارد شده اند برابر با $\sum_{j=1}^N 10W_j^Q$ است. از این رو، هزینه متوسط

هر متقاضی براساس رابطه $\hat{w}_Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i^Q$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sum_{j=1}^N \frac{10W_j^Q}{N} = 10\hat{w}_Q$$

اگر به طور متوسط متقاضی در ساعت وارد شوند، در چارچوب **معادله لیتل** ($\hat{L} = \hat{\lambda} \hat{w}$) متوسط هزینه در ساعت عبارت است از:

$$\text{هزینه در ساعت} = \hat{\lambda} \frac{\text{متقاضی}}{\text{ساعت}} \times \frac{10\hat{w}_Q}{\text{متقاضی}} = 10\hat{\lambda}\hat{w}_Q = 10\hat{L}_Q$$

خدمت دهنده نیز ممکن از هزینه هایی به سیستم تحمیل کند. اگر ضریب بهره برداری c خدمت دهنده موازی معادل ρ باشد و هر خدمت دهنده به هنگام بهره برداری هزینه ای معادل 5 واحد پول در ساعت بر سیستم تحمیل کند، هزینه کل خدمت دهنده‌ها در ساعت معادل است با $5(c\rho)$ است. اگر هزینه صرفا وقتی تحمیل شود که خدمت دهنده‌ها بیکارند، هزینه خدمت دهنده‌ها در ساعت معادل است با $5(c(1-\rho))$ زیرا $c(1-\rho)$ معرف میانگین تعداد خدمت دهنده‌های بیکار است.

مدل‌های مارکوفی با جمعیت نامتناهی

پاسخ مربوط به حالت پایای برخی از مدل‌های صف که به طریق ریاضی قابل حل اند، در این قسمت ارائه می‌شود. در مورد مدل‌هایی با جمعیت **نامتناهی** چنین فرض می‌شود که فرایند **ورود پواسون** با میانگین λ ورود در واحد زمان است. به عبارت دیگر، فرض می‌شود که مدت‌های بین ورود توزیع نمایی با پارامتر آهنگ λ دارد. مدت خدمت دهی را می‌توان طبق **توزیع نمایی** یا M ، توزیع ارلنگ مرتبه k یا E_k ، یا توزیع کلی یا G تعریف کرد. قانون صف به ترتیب ورود یا **FIFO** خواهد بود. برای حالتی که تابع توزیع ورود و خدمت دهی به صورت نمایی باشد، این سیستم از نظر فنی موسوم به **مدل‌های مارکوف** است.

گفته می‌شود سیستم صف در حالت تعادل آماری در حالت پایاست اگر احتمال بودن سیستم در یک وضعیت مشخص به زمان بستگی نداشته باشد، یعنی اگر

$$P(L(t) = n) = P_n(t) = P_n$$

که این احتمال مستقل از زمان t است. اگر تحلیل گر به بررسی رفتار گذرای یک صف طی مدتی نسبتاً کوتاه و براساس شرایط شروع معینی (پر بودن یا وجود صف اولیه) علاقه مند باشد، نتایج ارایه شده در بخش‌های بعد مناسب خود را از دست می‌دهد. در این گونه موارد، ایجاد مدل شبیه‌سازی ابزار منتخب تحلیل خواهد بود.

از مدل‌های ریاضی که حل آن‌ها در بخش‌های بعد نشان داده شده می‌توان به منظور کسب نتایج تقریبی استفاده کرده حتی در شرایطی که فرض مدل‌های کاملاً صادق نباشد. چنین نتایجی را می‌توان **تقریبی** از رفتار سیستم به شمار آورد. سپس به منظور انجام تحلیل دقیق تر، می‌توان از بررسی شبیه‌سازی استفاده کرد.

باید به این نکته توجه داشت که تحلیل ریاضی (در صورت وجود) مقدار حقیقی پارامتر مدل (مثلاً L) را ارایه می‌کند، حال آن که تحلیل شبیه‌سازی **برآورد** آماری (مثلاً $\hat{L}$) از پارامتر ارایه می‌کند. از سوی دیگر، مدل شبیه‌سازی برای سیستم‌های پیچیده به طور کلی دقیقتر از مدل ریاضی است.

در مورد مدل‌های ساده مورد بررسی در اینجا، پارامتر حالت پایا L ، یعنی میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم به صورت زیر می‌شود.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

در رابطه بالا، $\{P_n\}$ احتمالات **حالت پایا** است. با مشخص شدن L ، با به کار گیری قانون لیتل در رابطه $L = \lambda w$ به سادگی می‌توان سایر پارامترها را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$w = L/\lambda$$

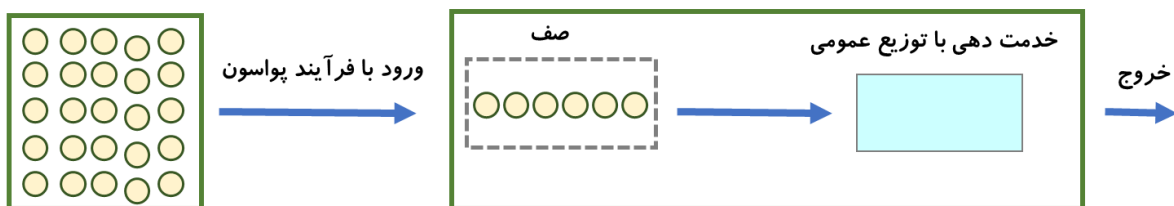
$$w_Q = w - 1/\mu$$

$$L_Q = \lambda w_Q$$

که در روابط بالا، λ معرف آهنگ ورود و μ معرف آهنگ خدمتدهی هر خدمت دهنده است. در ادامه برای حالت‌های خاص، معیارهای اصل سیستم صف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

صف تک مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M/G/1$

تصور کنید که مدت‌های خدمت دهی میانگین μ^{-1} و واریانس σ^2 دارند و تنها یک خدمت دهنده وجود دارد. نمایش شماتیک این سیستم صف به صورت شکل زیر هست.



شکل ۸: نمایش شماتیک سیستم این صف

اگر $\rho = \lambda/\mu < 1$ باشد، صف $M/G/1$ یک توزیع احتمال مربوط به حالت پایا دارد که ویژگی‌های حالت پایای آن به شرح شکل زیر است.

ρ	$\frac{\lambda}{\mu}$
L	$\rho + \frac{\lambda^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\rho^2 (1 + \sigma^2 \mu^2)}{2(1-\rho)}$
w	$\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)}$
w_Q	$\frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)}$
L_Q	$\frac{\lambda^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 (1 + \sigma^2 \mu^2)}{2(1-\rho)}$
P_0	$1 - \rho$

مثال ۵: ماشین‌های سازنده ابزار کوچک ظاهراً به طور تصادفی عملکردی نامناسب پیدا می‌کند و رسیدگی به آن توسط یک مکانیک ضرورت می‌یابد. فرض بر این است که نامناسب شدن عملکرد ماشین‌ها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda = 1.5$ در ساعت رخ می‌دهد. براساس مشاهدات چند ماهه چنین معلوم است که مدت‌های تعمیر توسط یک مکانیک میانگین ۳۰ دقیقه و انحراف معیار ۲۰ دقیقه را دارد. از این رو آهنگ خدمت دهی معادل $\mu = 2$ در ساعت و σ^2 نیز معادل (۲۰ دقیقه)^۲ یا $\frac{1}{9}$ دقیقه^۲ است. ماشین‌های سازنده ابزار همان متقاضیان را تشکیل می‌دهند و سیستم صف $M / G / 1$ است زیرا فقط میانگین و واریانس مدت‌های خدمت دهی معلوم است و نه تابع توزیع آن‌ها. درصد بهره‌برداری مکانیک $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.5}{2} = 0.75$ است و با توجه به جدول ارایه شده تعداد ماشین‌های خراب در بلند مدت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L = 0.75 + \frac{1.5^2 \left[0.5^2 + \frac{1}{9} \right]}{2(1-0.75)} = 2.375$$

بنابراین، کسی که در لحظات اختیاری از زمان به سیستم نگاه می‌کند در بلند مدت به طور متوسط ۲.۳۷۵ ماشین را خراب می‌یابد.

در مورد صف $M / G / 1$ وقتی مدت‌های خدمت دهی دارای توزیع نمایی و ارلنگ مرتبه K یا غیرتصادفی باشند در خور توجه ویژه‌اند.

صف تک مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M / M / 1$

فرض کنید مدت‌های خدمت‌دهی در یک صف $M / G / 1$ توزیع نمایی با میانگین μ^{-1} باشد. واریانس این توزیع برابر با μ^{-2} است. به دلیل این که در توزیع نمایی، میانگین و انحراف معیار برابر هستند، اگر در سیستمی این دو معیار برابر بودند، سیستم $M / M / 1$ یک **تقریب مناسب** از وضعیت صف است. با جانشینی σ^2 با μ^{-2} در معادلات جدول بخش قبل، می‌توان مقدار معیارهای حالت پایا را به صورت زیر بدست آورد.

L	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$
w	$\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$
w_Q	$\frac{1}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$
L_Q	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
P_n	$\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho) \rho^n$

مثال ۶: معلوم شده است که مدت‌های بین ورود و مدت‌های خدمت دهی در آرایشگاهی با یک خدمت دهنده توزیع نمایی دارد. در واقع، میانگین مدت‌های بین ورود بالغ بر $\frac{1}{2}$ ساعت و میانگین مدت خدمت دهی بالغ بر ۲۰ دقیقه است. تابع توزیع این دو مدت نمایی است. ضریب بهره برداری خدمت دهنده و

احتمالات مربوط به حضور صفر، یک، دو، سه و چهار متقاضی یا بیشتر در مغازه به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P_{\geq 4} = 1 - \sum_{n=0}^3 P_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \frac{8}{81} = \frac{16}{81}$$

براساس محاسبات بالا دیده می‌شود که احتمال بیکار بودن وی برابر با ۰.۳۳ است. میانگین تعداد

متقاضی حاضر در سیستم عبارت از

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم (بر حسب ساعت) عبارت از:

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1$$

میانگین مدت به سر بردن متقاضی در صف انتظار (بر حسب ساعت) را به صورت زیر بدست آورد.

$$w_Q = w - \mu^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

میانگین تعداد افراد در صف (بر حسب متقاضی) عبارت است از:

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{3(1)} = \frac{4}{3}$$

مثال ۷: در مورد صف $M / M / 1$ با آهنگ خدمت دهی ۱۰ متقاضی در ساعت، با افزایش آهنگ

ورود، λ ، از ۵ هر مرتبه یک ساعت افزایش، مقدار ρ ، L ، و w چگونه افزایش می‌یابد.

μ	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
λ	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
ρ	۰.۵	۰.۶	۰.۷	۰.۸	۰.۹	۱
L	۱	۱.۵	۲.۳۳	۴	۹	∞
w	۰.۲	۰.۲۵	۰.۳۳	۰.۵	۱	∞

نکته: باید توجه داشت که افزایش میانگین مدت سیستم، w ، و میانگین تعداد در سیستم، L ، بر

حسب تابعی از ρ به طور قابل توجهی **غیر خطی** افزایش می‌یابد.

صف تک مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M / E_k / 1$

تصور کنید که مدت‌های خدمت دهی توزیع آماری ارلنگ مرتبه k داشته باشد که دارای میانگین $\frac{1}{\mu}$ و

واریانس $\frac{1}{k\mu^2}$ هستند. میانگین هر توزیع ارلنگ مرتبه k ، $\sqrt{k}$ برابر انحراف معیار آن است و لذا این

توزیع برای مواردی که میانگین بزرگتر از انحراف معیار است مورد استفاده قرار گیرد. پارامترهای حالت پایا

برای صف $M / E_k / 1$ در جدول زیر آمده است.

L	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \rho + \frac{1+k}{2k} \frac{\rho^2}{1-\rho}$
w	$\frac{1}{\mu} + \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \mu^{-1} + \frac{1+k}{2k} \frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
w_Q	$\frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+k}{2k} \frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
L_Q	$\frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+k}{2k} \frac{\rho^2}{1-\rho}$

مثال ۸: بیماران طبق فرآیند پواسون با آهنگ یک بیمار در ساعت برای معاینه پزشکی وارد می‌شوند. معاینه پزشکی از سه مرحله تشکیل می‌شود که دارای توزیع یکسان و مستقل نمایی با میانگین مدت خدمت دهی ۱۵ دقیقه است. یک بیمار باید هر سه مرحله را طی کند پیش از آنکه معاینه بیمار بعدی شروع شود. میانگین طول صف انتظار، L_Q ، برای این سیستم را محاسبه کنید.

با توجه به نحوه خدمت‌گیری بالا، توزیع آماری مدت خدمت دهی ارلنگ مرتبه ۳ خواهد بود. پارامترهای لازم به منظور برآورد L_Q عبارت‌اند از $\lambda = \frac{1}{60}$ بر حسب دقیقه و $\mu = \frac{1}{45}$ بر حسب دقیقه باشد، آنگاه طول صف بر حسب بیمار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L_Q = \frac{1+3}{2(3)} \frac{\left(\frac{1}{60}\right)^2}{\left(\frac{1}{45}\right)\left(\frac{1}{45} - \frac{1}{60}\right)} = \frac{2}{3} \frac{135}{60} = \frac{3}{2}$$

صف تک مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M / D / 1$

در این سیستم صف، فرض می‌شود که مدت‌های خدمت دهی قطعی است یعنی داریم $\sigma^2 = 0$. به عبارت دیگر، تمام مدت‌های خدمت دهی معادل مقدار ثابت $\frac{1}{\mu}$ است. پارامترهای پایا به صورت جدول زیر

می‌شود. این پارامترهای را می‌توان با نوشتن صفر به جای $\sigma^2 = 0$ در جدول مربوط به $M/G/1$ می‌توان پارامترها را محاسبه کرد.

L	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \rho + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
w	$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \mu^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\rho \mu^{-1}}{1 - \rho}$
w_Q	$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{2} \frac{\rho \mu^{-1}}{1 - \rho}$
L_Q	$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho}$

مثال ۹: تمام جت‌هایی که به یک فرودگاه می‌آیند به باند واحدی هدایت می‌شوند. در زمان معینی از روز، این ورودها توزیع پواسون با آهنگ ۳۰ در ساعت دارند. مدت لازم برای هدایت هواپیما در امر نشست بر زمین معادل مقدار ثابت ۹۰ ثانیه است. پارامترهای L_Q ، w_Q ، L ، و w را برای این فرودگاه محاسبه کنید.

در این جا λ برابر با ۰.۵ و μ^{-1} برابر ۱.۵ یا $\mu = \frac{2}{3}$ در دقیقه است. ضریب بهره برداری برابر

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

است. پارامترهای حالت پایا به صورت زیر قابل تعیین است.

تعداد هواپیما در صف برای فرودگاه، L_Q ، به صورت زیر می‌شود.

$$L_Q = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left[2\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right]} = \frac{9}{8} = 1.125$$

زمان انتظار برای فرود آمدن، w_Q ، بر حسب دقیقه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$w_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \left(\frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{9}{4} = 2.25$$

زمان بودن در فرودگاه، w ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$w = w_Q + \frac{1}{\mu} = 2.25 + 1.5 = 3.75$$

تعداد هواپیماهای در فرودگاه، L ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.125 + 0.75 = 1.875$$

اگر هواپیمایی که منتظر خالی شدن باند برای فرودگاه آمدن است به طور متوسط در هر ساعت معادل ۵۰۰۰۰۰ واحد پول هزینه سوخت داشته باشد، متوسط هزینه سوخت ناشی از انتظار برای هر هواپیما

$$500000w_Q = 500000 \left(\frac{2.25}{60} \right) = 18750$$

واحد پول در دقیقه است.

صف تک مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M / M / 1 / N / \infty$

تصور کنید که مدت‌های خدمت دهی توزیع نمایی با آهنگ μ ، تعداد خدمت دهنده مساوی با یک و ظرفیت سیستم مساوی N متقاضی دارد. اگر به هنگام پر بودن سیستم یک ورود روی دهد چون امکان ورود به سیستم را ندارد باید از سیستم دور شود. مانند بخش‌های قبل، ورود به طور تصادفی و طبق فرایند پواسون با آهنگ λ در واحد زمان رخ می‌دهد. به ازای هر مقدار برای λ و μ ، صف $M / M / 1 / N$ پایا بوده و پارامترهای آن در بلند مدت به صورت جدول زیر است.

L	$\begin{cases} \frac{a[1-(N+1)a^N + Na^{N+1}]}{(1-a^{N+1})(1-a)} & \lambda \neq \mu \\ N/2 & \lambda = \mu \end{cases}$
$1-P_N$	$\begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a^{N+1}} & \lambda \neq \mu \\ \frac{N}{N+1} & \lambda = \mu \end{cases}$
ρ	$1-P_0$
w	$\frac{L}{\lambda(1-P_N)}$
w_Q	$w - \frac{1}{\mu}$
L_Q	$L - (1-P_0)$
P_n	$\begin{cases} \frac{(1-a)a^N}{1-a^{N+1}} & \lambda \neq \mu \\ \frac{1}{N+1} & \lambda = \mu \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N$

آهنگ موثر ورود، λ_e ، به صورت متوسط تعداد واردشوندگانی که در واحد زمان به سیستم راه می‌یابند اتلاق می‌شود. در مورد تمام سیستم‌ها رابطه $\lambda_e \leq \lambda$ و در مورد سیستم‌هایی با ظرفیت نامحدود رابطه $\lambda_e = \lambda$ برقرار است. در مورد سیستم‌هایی نظیر این سیستم که در صورت پر بودن، متقاضیان را از خود می‌رانند رابطه $\lambda_e < \lambda$ برقرار است. چون $1-P_N$ این احتمال را نشان می‌دهد که متقاضی در لحظه ورود امکان راهیابی به سیستم را داشته باشد، آهنگ ورود به صورت زیر است

$$\lambda_e = \lambda(1-P_N)$$

مثال ۱۰: معلوم شده است که مدت‌های بین ورود و مدت‌های خدمت دهی در آرایشگاهی با یک خدمت

دهنده توزیع نمایی دارد. در واقع، میانگین مدت‌های بین ورود بالغ بر $\frac{1}{2}$ ساعت و میانگین مدت خدمت

دهی بالغ بر ۲۰ دقیقه است. تابع توزیع این دو مدت نمایی است. این آرایشگاه گنجایش ۳ متقاضی را دارد: یکی در حال خدمت گرفتن و دو نفر نیز در صف انتظار. هر گاه سیستم پر باشد متقاضیان اضافی از سیستم دور می‌شوند. معیارهای کارایی برای این سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P_N = P_3 = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{8}{65} = 0.123$$

تعداد متقاضیان در آرایشگاه از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$L = \frac{\frac{2}{3} \left[1 - (3+1) \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right]}{\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right] \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{66}{65} = 1.015$$

متوسط زمان بودن در آرایشگاه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{L}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1.015}{2 \left(1 - \frac{8}{65}\right)} = 0.579$$

احتمال این که در آرایشگاه مشتری وجود نداشته باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^0}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{65}{81}} = \frac{27}{65} = 0.415$$

بنابراین، میانگین طول صف عبارت است از:

$$L_Q = L - (1 - P_0) = 1.015 - (1 - 0.415) = 0.43$$

ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد زمان بهره برداری خدمت دهنده در بلند مدت برابر است با:

$$\rho = 1 - P_0 = 0.585$$

و در انتها، میانگین مدت به سر بردن یک مشتری در صف انتظار بر حسب ساعت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$w_Q = w - \frac{1}{\mu} = 0.579 - \frac{1}{3} = 0.245$$

صف چند مجرای با ورود پواسون و ظرفیت نامحدود $M / M / c / \infty / \infty$

فرض کنید که c مجرا به طور موازی در حال کار است. مدت خدمت دهی تمام مجراها هم توزیع و مستقل، با توزیع نمایی و میانگین $\frac{1}{\mu}$ است. فرایند ورود پواسون با آهنگ λ است. متقاضیان وارد شده به سیستم به صف انتظار واحدی می‌پیوندند و به منظور دریافت خدمت به اولین مجرای آزاد می‌روند.

اگر تعداد متقاضی در این سیستم یعنی n از c کوچکتر باشد، متقاضی تازه وارد به یک مجرای آزاد وارد می‌شود و در غیر این صورت، با ورود متقاضی صف تشکیل می‌شود.

شدت آمد و شد به صورت $\frac{\lambda}{\mu}$ تعریف می‌شود. اگر $\lambda \geq c\mu$ باشد، آهنگ ورود بزرگتر یا مساوی با

بزرگترین آهنگ خدمت دهی سیستم است و در این صورت سیستم **یارای** پاسخگویی به حجم کار تحمیل شده **نیست** و سیستم **فاقد** حالت تعادل آماری است. اگر $\lambda > c\mu$ باشد، طول صف انتظار به طور متوسط با آهنگ $\lambda - c\mu$ متقاضی در واحد زمان افزایش می‌یابد. در جدول زیر پارامترهای حالت پایدار سیستم نشان داده شده است.

ρ	$\frac{\lambda}{c\mu}$
P_0	$\left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right) \right] \right\}^{-1} = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \left[(c\rho)^c \frac{1}{c!} \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \right] \right\}^{-1}$
$P(L(t) \geq c)$	$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c P_0}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)} = \frac{(c\rho)^c P_0}{c! (1-\rho)}$
L	$c\rho + \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}$
w	$\frac{L}{\lambda}$
w_Q	$w - \frac{1}{\mu}$
L_Q	$\frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}$
$L - L_Q$	$\frac{\lambda}{\mu} = c\rho$

مثال ۱۱: یک اتاق ابزار را در نظر بگیرید که یک جمعیت مکانیک نامتناهی برای دریافت خدمت به آن مراجعه می‌کنند. فرض کنید فرایند ورود طبق توزیع پواسون با آهنگ ۲ مکانیک در دقیقه و خدمت دهی طبق توزیع نمایی با میانگین ۴۰ ثانیه تعریف می‌شود.

با توجه به این اطلاعات، $\lambda = 2$ و $\mu = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ در دقیقه است. چون $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3} > 1$ است لذا

سیستم در حالت تعادل آماری نیست. لازمه حالت تعادل این است که $c > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3}$ که به این معنا است که

دستکم به ۲ خدمت دهنده نیاز است. با فرض ۲ خدمت دهنده، پارامترهای این سیستم به صورت زیر می‌شود.

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n!} \right] + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2!} \left(\frac{2 \times 1.5}{2 \times 1.5 - 2}\right) \right] \right\}^{-1} = \left\{ \frac{15}{3} \right\}^{-1} = 0.2$$

احتمال مشغول بودن تمام خدمت دهنده‌ها به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$P(L(t) \geq 2) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2! \left(1 - \frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

میانگین طول صف مکانیک‌ها بر حسب تعداد به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$L_Q = \frac{\left(2 \times \frac{2}{3}\right)^{2+1} \times 0.2}{2(2!) \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 1.07$$

میانگین تعداد مکانیک در سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.07 + \frac{4}{3} = \frac{12}{5} = 2.4$$

میانگین مدت زمانی بر حسب دقیقه که یک مکانیک در سیستم حضور دارد برابر است با:

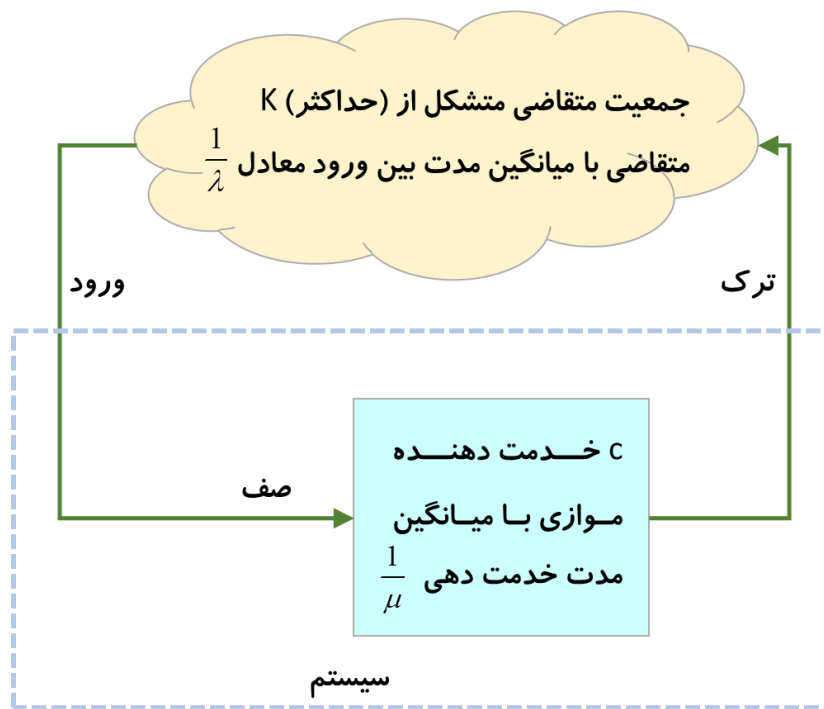
$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.4}{2} = 1.2$$

میانگین مدت انتظار در صف اتاق ابزار بر حسب دقیقه برابر است با:

$$w_Q = w - \frac{1}{\mu} = 1.2 - \frac{2}{3} = 0.533$$

صف چند مجرایی با ورود پواسون و ظرفیت محدود و جمعیت متناهی $M / M / c / K / K$

در بسیاری از مسائل کاربردی، فرض نامتناهی بودن جمعیت متقاضی به نتایج غیر معتبر می انجامد زیرا جمعیت متقاضی واقعا کوچک است. هر گاه جمعیت متقاضی متناهی باشد، حضور یک متقاضی یا بیشتر در سیستم تاثیر عمده ای بر توزیع ورودها آتی می گذارد و استفاده از یک مدل جمعیت نامتناهی ممکن است گمراه کننده باشد. مثال های عادی در این مورد شامل مثال تعداد محدودی ماشین است که گاهی خراب می شوند و نیاز به تعمیر دارند. نمایی شماتیک از این سیستم در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۹: نمایش شماتیک از این سیستم صف

مدل جمعیت متناهی با K متقاضی را در نظر بگیرید. فرض کنید که فاصله زمانی بین دو تقاضا خدمت برای هر عضو از جمعیت توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ داشته باشد و مدت خدمت دهی نیز توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ واحد زمان دارد، c خدمت دهنده موازی وجود دارد و ظرفیت سیستم معادل K است. تمامی معیارهای عملکرد به صورت جدول زیر قابل محاسبه است.

P_0	$\left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=c}^K \frac{K!}{(K-n)!c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$
P_n	$\begin{cases} \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & n = 0, 1, \dots, c-1 \\ \frac{K!}{(K-n)!c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & n = c, c+1, \dots, K \end{cases}$
L	$\sum_{n=0}^K n P_n$
L_Q	$\sum_{n=c+1}^K (n-c) P_n$
λ_e	$\sum_{n=0}^K (K-n) \lambda P_n$
w	$\frac{L}{\lambda_e}$
w_Q	$\frac{L_Q}{\lambda_e}$
ρ	$\frac{L - L_Q}{c} = \frac{\lambda_e}{c\mu}$

مثال ۱۲: دو کارگر اداره دو ماشین تراش را بر عهده گرفته اند. ماشین‌ها به طور متوسط ۲۰ دقیقه کار می‌کنند و به دنبال آن به یک دوره ۵ دقیقه ای دریافت خدمت نیاز دارند. مدت‌های کار ماشین‌ها و خدمت دادن به آن‌ها توزیع نمایی دارد. پارامترهای پایا این سیستم را محاسبه کنید.

احتمال این که در سیستم ماشینی نباشد به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2-1} \binom{10}{n} \left(\frac{5}{20} \right)^n + \sum_{n=2}^{10} \frac{10!}{(10-n)!2!2^{n-2}} \left(\frac{5}{20} \right)^n \right]^{-1} = 0.065$$

تعداد ماشین ها در صف خدمت دهی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$L_Q = \sum_{n=2+1}^{10} (n-2)P_n = 1.46 \quad \text{بر حسب ماشین}$$

آهنگ ورود موثر به سیستم به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{10} (10-n) \left(\frac{1}{20} \right) P_n = 0.342$$

متوسط زمانی که یک ماشین در صف قرار می گیرد به صورت زیر محاسبه می شود.

$$w_Q = \frac{L_Q}{\lambda_e} = 4.27$$

متوسط تعداد ماشین های در خدمت (در حال خدمت گیری یا در صف انتظار خدمت گیری) به صورت

زیر محاسبه می شود.

$$L = \sum_{n=0}^{10} nP_n = 3.17$$

تعداد ماشین هایی در حال دریافت خدمت (در دست سرویس) را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$L - L_Q = 3.17 - 1.46 = 1.71$$

چون ماشین ها باید در حال کار، در انتظار دریافت خدمت یا در حال دریافت خدمت هستند، میانگین

تعداد ماشین های در حال کار از رابطه زیر بدست می آید.

$$K - L = 10 - 3.17 = 6.83$$

اغلب این پرسش مطرح می شود که چه خواهد شد اگر تعداد خدمت دهنده ها افزایش یا کاهش یابد؟

در این مثال اگر تعداد کارکنان از دو به سه افزایش یابد، تعداد ماشین های در حال کار (خدمت یا در انتظار

خدمت) به صورت زیر محاسبه می شود.

$$K - L = 7.744$$

یعنی به طور متوسط این معیار به اندازه ۰.۹۱۲ ماشین افزایش می‌یابد.

حالا در جهت عکس، چه خواهد شد اگر تعداد خدمت دهنده به یک کاهش یابد؟ در این صورت تعداد ماشین‌های در خدمت به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$K - L = 3.98$$

مثال ۱۳: یک اتاق ابزار مدت‌های بین ورود و مدت‌های خدمت دهی نمایی دارد و به گروه کثیری از مکانیک‌ها خدمت می‌دهد. میانگین مدت زمان بین دو ورود متوالی ۴ دقیقه است. مسئول اتاق ابزار برای خدمت دادن به هر مکانیک، به طور متوسط مدتی معادل ۳ دقیقه وقت صرف می‌کند. به مسئول اتاق ابزار ۶ دلار در ساعت و به هر مکانیک ۱۰ دلار در ساعت بابت دستمزد پرداخت می‌شود. آیا افزایش تعداد مسئولان اتاق ابزار به دو نفر قابل توصیه است؟

حل:

اتاق ابزار را از سیستم $M / M / c$ در نظر گرفته می‌شود که در آن $\lambda = \frac{1}{4}$ ، $\mu = \frac{1}{3}$ و $c = 1, 2$ است. با فرض این که به مسئول اتاق ابزار ۶ دلار در ساعت و به مکانیک ۱۰ دلار در ساعت داده شود، میانگین هزینه به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Mean = \$10c + \$15L$$

فرض کنید که وقتی مکانیک در صف و در حال خدمت‌گیری است، هزینه ۱۰ دلار بر ساعت وارد می‌شود.

حالت ۱: یک مسئول ابزار یا $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.75$ ، $c = 1$:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$$

در این حالت متوسط هزینه (دلار بر ساعت) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Mean = \$10(1) + \$15(3) = \$55$$

حالت دوم: دو مسئول ابزار و $M / M / 2$ و $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 0.375$ و $c = 2$

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right] + \left[(c\rho)^c \frac{1}{c!} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) \right] \right\}^{-1} = 0.4545$$

و خواهیم داشت:

$$L = c\rho + \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2} = 0.875$$

در این حالت متوسط هزینه (دلار بر ساعت) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Mean = \$10(2) + \$15(0.8727) = \$33.09$$

بنابر محاسبات بالا، توصیه می‌شود که یک مسئول ابزار دیگر برای بهبود ۲۱.۹۱ دلاری در هر ساعت به

سیستم اضافه شود.

مثال ۱۴: یک فرودگاه دو باند دارد (یکی برای فرود آمدن و یکی برای بلند شدن) برای هواپیماهای

ملخ دار طراحی شده است. می‌دانیم که مدت به زمین نشستن هر هواپیما توزیع نمایی با میانگین ۱.۵

دقیقه دارد. اگر فرض شود که هواپیما به طور تصادفی از راه می‌رسند، برای این که متوسط مدت انتظار در

آسمان از ۳ دقیقه بیشتر نشود، چه آهنگ ورودی قابل تحمل است؟

حل:

فرودگاه به صورت یک صف $M / M / 1$ با $\mu = \frac{2}{3}$ در نظر می گیریم. حداکثر نرخ ورود به گونه ای که

متوسط زمان انتظار از ۳ دقیقه بیشتر نشود از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$w_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \leq 3 \rightarrow \lambda = \frac{\mu}{\left[\frac{1}{\mu w_Q} + 1 \right]} \leq 0.444$$

بنابراین حداکثر آهنگ ورود، ۰.۴۴۴ هواپیما در دقیقه است.

مثال ۱۵: دو نفر در شهرداری یک شهر هر روزه به راه اندازی متقاضیان "سفرشی" اشتغال دارند. این نوع متقاضیان به طور متوسط هر ده دقیقه یک بار در روز از راه می رسند. هر یک از دو نفر به طور متوسط مدتی معادل ۱۰ دقیقه برای خدمت دادن به یک متقاضی صرف می کند. مدت های بین ورود و مدت های خدمتدهی هر دو دارای توزیع نمایی است.

(الف) احتمالی خالی از متقاضی بودن سیستم در هر لحظه تصادفی از زمان چقدر است؟

(ب) امید ریاضی تعداد متقاضیان حاضر در صف چقدر است؟

(ج) احتمال مشغول بودن هر دو خدمت دهنده چقدر است؟

(د) اگر به دو خدمت دهنده، خدمت دهنده سومی با همان سرعت خدمت دهی اضافه شود، چه تاثیر بر

عملکرد می گذارد؟

حل:

سیستم شهرداری برای خدمت دهی به صورت یک صف $M / M / 2$ که در آن

$$\lambda = \frac{1}{10}, \mu = \frac{1}{15}, \rho = 0.75 \text{ برقرار است.}$$

(الف)

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right] + \left[(c\rho)^c \frac{1}{c!} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) \right] \right\}^{-1} = 0.1429$$

(ب)

$$L_Q = \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2} = 1.929$$

(ج)

$$P(L(t) \geq c) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c P_0}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)} = \frac{(c\rho)^c P_0}{c!(1-\rho)} = 0.643$$

(د)

اگر خدمتده سومی اضافه شود در این صورت سیستم صف به صورت $M/M/3, c=3, \rho=0.5$ می‌شود. در این صورت معیارهای بدست آمده در سه قسمت قبل به صورت زیر می‌شوند.

$$P_0 = 0.2105, L_Q = 0.2368, P(L(t) \geq 3) = 0.2368$$

مثال ۱۶: در یک قنادی یک تولد برای فروش عرضه می‌شود. تزیین این نوع کیک دقیقاً ۱۵ دقیقه طول می‌کشد. اگر قرار باشد میانگین طول صف تزیین از ۵ کیک بیشتر نشود، چه مقداری برای میانگین مدت بین دو ورود با توزیع نمایی قابل قبول است.

حل:

این قنادی را می‌توان به صورت یک صف $M/G/1$ که $\mu=4, \sigma^2=0$ می‌توان در نظر گرفت. حداکثر نرخ ورود به نحوی طول صف از ۵ کیک بیشتر نشود به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L_Q = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \leq 5 \rightarrow \lambda^2 + 40\lambda - 160 \leq 5 \rightarrow \lambda \leq 3.66$$

در صورتیکه در هر ساعت کمتر از ۳ سفارش بیاید، طول صف از ۵ کیک کمتر خواهد شد.

مثال ۱۷: در بخش بافندگی یک کارخانه ده ماشین بافت پارچه های نخی وجود دارد. هر گاه این ماشین ها تنظیم شده و مشغول کار شوند، بدون نیاز به کارگر به کار ادامه می دهند. مدت لازم برای تنظیم، توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه دارد. بعد از هر تنظیم، هر ماشین به طور متوسط به مدت ۴۰ دقیقه طبق توزیع نمایی کار می کند. دستمزد هر کارگر ۱۰ واحد پول در ساعت و هزینه کارنکردن هر ماشین ۴۰ واحد پول در ساعت است.

الف) به منظور کمینه کردن هزینه بخش بافندگی به چند کارگر نیاز داریم؟

ب) اگر هدف این باشد که هیچ ماشینی بیش از یک دقیقه در انتظار کارگر نماند، چند کارگر باید استخدام شود؟

ج) برای این که به طور متوسط در هر لحظه دستکم ۷.۵ ماشین مشغول کار باشند، چند کارگر باید استخدام کرد؟

حل:

این کارخانه نخ ریزی به صورت یک صف $M/M/c/10/10$ با $\lambda = \frac{1}{40}$, $\mu = \frac{1}{10}$, $N = K = 10$ مدل می شود. با توجه به پرداخت ۱۰ دلار در هر ساعت برای کارگر و پرداخت ۴۰ دلار در هر ساعت برای هر ماشین، متوسط هزینه به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\text{هزینه متوسط در هر ساعت} = \$10c + \$40L$$

برای مقادیر مختلف c می توان میانگین هزینه را بدست آورد.

c	L_Q	L	w_Q (min)	$K - L$	Cost
1	5.03	6.02	50.60	3.98	\$250.80
2	1.46	3.17	8.55	6.83	\$146.80
3	0.32	2.26	1.65	7.74	\$120.40
4	0.06	2.05	0.3	7.95	\$122.00
5	0.01	2.01	0.05	7.99	\$130.40

الف) تعداد کارگرانی که باعث حداقل شدن هزینه می‌شوند برابر ۳ است که منجر به هزینه ۱۲۰.۴۰ دلار می‌شود.

ب) چهار کارگر باید در کارخانه کار کنند تا هیچ ماشینی برای یک دقیقه بیشتر معطل نشود یا $w_Q \leq 1\text{min}$. در این حالت، هر ماشین به طور متوسط ۰.۳ دقیقه یا ۱۸ ثانیه معطل می‌شود که منجر به هزینه ۱۲۲ دلار می‌شود.

ج) سه کارگر برای تضمین ۷.۵ دستگاه در حال کار باشند، باید کنند که از $K - L \geq 7.5$ بدست می‌آید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی **behinehyab@gmail.com** و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**