

درس ۲۴:

تئوری صف

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

شبیه‌سازی غالباً در تحلیل مدل‌های صف به کار می‌رود. در یک مدل ساده ولی رایج صف (مشابه شکل ۱)، متقاضیان از زمانی به زمان دیگر وارد سیستم می‌شوند، به صف انتظار می‌پیوندند، سپس خدمت دریافت می‌کنند و سرانجام سیستم را ترک می‌کنند. واژه "متقاضی" اشاره به هر نوع نهادی دارد که خواهان دریافت "خدمت" از سیستم باشد. بنابراین، تشکیلات خدماتی، سیستم‌های تولید، تشکیلات نگهداری و تعمیر سیستم‌های ارتباطات و کامپیوتر و سیستم‌های حمل و نقل مواد را می‌توان به منزله سیستم‌های صف نگریست.

مدل‌های صف صرفنظر از این که از طریق ریاضی حل یا از طریق شبیه‌سازی تحلیل شوند، ابزاری نیرومند را برای طراحی و ارزیابی عملکرد سیستم‌های صف در اختیار تحلیل‌گر قرار می‌دهند. از معیارهای رایج عملکرد سیستم می‌توان به ضریب بهره‌برداری خدمت دهنده که همان درصدی از زمان که خدمت دهنده مشغول است، طول صف‌های انتظار و مدت انتظار متقاضیان در صف را در بر می‌گیرد.



شکل ۱: مدل ساده صف

در بسیاری از موارد، به هنگام طراحی یا در تلاش برای اصلاح سیستم صف، تحلیل‌گر یا تصمیم‌گیرنده با ایجاد توازن بین ضریب اشتغال خدمت دهنده و میزان جلب رضایت متقاضی که رابطه مستقیم با طول صف و مدت انتظار در صف دارد، به اصلاح سیستم می‌پردازد. به منظور پیش‌بینی معیارهای عملکرد سیستم بر حسب تابعی از پارامترهای ورودی، از نظریه صف و یا شبیه‌سازی استفاده می‌کنند. از جمله پارامترهای ورودی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

✓ آهنگ ورود متقاضی به سیستم

✓ نوع خدمت دهی به متقاضی

✓ سرعت خدمت دهی

✓ تعداد خدمت دهنده‌ها

✓ نظام خدمت دهنده‌ها

برخی از پارامترهای ورودی تا حدی توسط مدیریت به طور **مستقیم** قابل کنترل و مهار است. اگر رابطه بین معیارهای عملکرد و پارامترهای ورودی در مورد سیستم در دست بررسی به طرز مناسبی شناسایی شده باشد، معیارهای عملکرد به طور **غیرمستقیم** توسط مدیریت پارامترهای ورودی قابل کنترل خواهد بود.

در مورد سیستم‌های نسبتاً ساده، می‌توان معیارهای عملکرد را از طریق **معادلات تحلیلی** به **فرم بسته** برآورد کرد که در مقایسه با کاربرد مدل شبیه‌سازی متضمن صرفه جویی قابل توجهی در وقت و هزینه است. اما برای ایجاد مدل‌های **واقع بینانه** و سیستم‌های **پیچیده** معمولاً نیاز به شبیه‌سازی وجود دارد. با وجود این، مدل‌های تحلیلی علی‌رغم نیاز به فرض‌های ساده‌کننده فراوان، در **ارایه سریع** برآوردهای غیردقیق در مورد عملکرد سیستم ارزشمند است. سپس، می‌توان با استفاده از مدل تفضیلی و واقع بینانه شبیه‌سازی، برآوردهای فوق را بهبود بخشید.

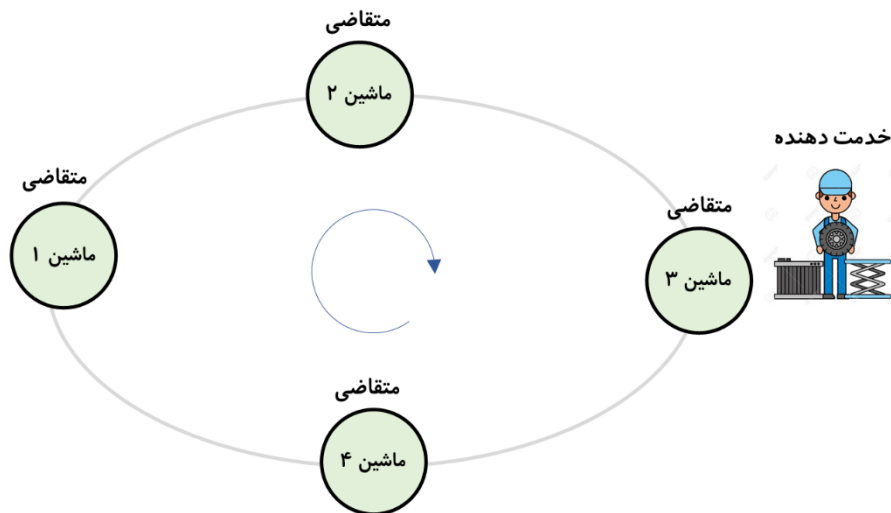
ویژگی‌های سیستم صف

عناصر عمده سیستم عبارتند از: **متقاضیان** و **خدمت دهنده‌ها**. واژه **"متقاضی"** را می‌توان به مردم، خودروها، کامیون‌ها، کارگران ساختمان، بیماران، پالت‌ها، هواپیما، جعبه‌ها، سفارش‌ها، یا البسه چرک و به طور کلی هر آنچه به منظور **دریافت خدمت** به امکاناتی نیاز دارد تعبیر کرد. واژه **"خدمت دهنده"** را می‌توان به راهنما، تعمیرکار، مکانیک خودرو، پزشک، ماشین خودکار انبارکردن و دریافت از انبار، باند

فرودگاه، دستگاه خودکار بسته بندی، ماشین لباس شویی و به طور کلی هر کس یا دستگاهی که خدمت مورد نیاز را **ارایه** می کند، تعبیر کرد.

جمعیت متقاضی

جمعیت متقاضیان بالقوه که به آن جمعیت متقاضی اطلاق می شود ممکن است **متناهی** یا **نامتناهی** باشد. برای جمعیت متقاضی متناهی این مثال را در نظر بگیرید. مثلاً مجموعه ای متشکل از ۴ ماشین را در نظر بگیرید که عمل آوری لاستیک خودرو را انجام می دهند. با گذشت یک فاصله زمانی، هر ماشین به طور خودکار باز می شود و کارگری لاستیک موجود در آن را بیرون می آورد و یک حلقه لاستیک پخته نشده در داخل آن قرار می دهد. ماشین ها همان متقاضیان هستند که در لحظه باز شدن دستگاه، عمل وارد شدن به سیستم انجام می شود. کارگر همان خدمت دهنده است که به ماشین های باز شده خدمت می دهد. جمعیت متقاضی متناهی و متشکل از ۴ ماشین است که در شکل ۲ نمایش شماتیک آن آورده شده است.



شکل ۲: نمایش شماتیک سیستم صف با تعداد متقاضی متناهی

در بسیاری از سیستم ها با جمعیت بزرگ، معمولاً جمعیت متقاضی **نامتناهی** فرض می شود. این فرض در مورد چنین سیستم هایی معمولاً ضرر ندارد و باعث می شود که سیستم را ساده کند. مثال های از جمعیت های نامتناهی شامل متقاضیان بالقوه یک رستوران، بانک، و خدمت دهنده ها می تواند مانند بانه های سفارش غذا و بانه های بانک اشاره کرد.

نکته: اگر چه جمعیت واقعی ممکن است متناهی ولی بزرگ باشد، به طور کلی استفاده از مدل‌های مرتبط به جمعیت نامتناهی بدون ایراد است مشروط بر این که تعداد متقاضیان در حال دریافت خدمت یا منتظر در صف برای خدمت‌گیری در هر لحظه نسبت به جمعیت متقاضیان بالقوه کوچک باشد.

تفاوت اصلی بین مدل‌های جمعیت متناهی و نامتناهی در این است که آهنگ ورود چگونه تعریف شود. در مدل جمعیت نامتناهی، **آهنگ ورود** (یعنی متوسط ورود در واحد زمان) تحت تاثیر تعداد متقاضیانی که جمعیت متقاضی را ترک می‌کنند و به سیستم صف می‌پیوندند قرار نمی‌گیرد.

نکته: اگر دوره هجوم بر متقاضیان وجود نداشته باشد، آهنگ ورود را ثابت در نظر می‌گیریم.

آهنگ ورود به سیستم صف در مدل‌های جمعیت متناهی متقاضیان قطعا به تعداد متقاضیان در حال خدمت‌گیری یا منتظر در صف بستگی دارد. جمعیت متقاضی می‌تواند شامل یک عضو باشد. مثلا هواپیمای شخصی ریس جمهور را در نظر بگیرید. وقتی گروه تعمیرکارانی که ۲۴ ساعته آماده آرایه خدمت هستند در حال خدمت دهی به این هواپیما هستند، آهنگ ورود صفر است زیرا هیچ متقاضی بالقوه دیگر وجود ندارد تا به تشکیلات نگهداری مراجعه کند.

ظرفیت سیستم

در بسیاری از سیستم‌های صف، حدی برای تعداد متقاضیانی که می‌توانند در صف انتظار یا در سیستم قرار گیرند وجود دارد. مثلا، یک کارواش خودکار ممکن است تنها دارای فضا برای ده خودرو در صف انتظار باشد. ممکن است توقف خودروها در خیابان بسیار خطرناک یا خلاف مقررات است. یک متقاضی تازه وارد که سیستم را پر بیابد، وارد آن نمی‌شود و فوراً به جمعیت متقاضی برمی‌گردد. برخی از سیستم‌ها مانند سیستم ثبت نام دانشجویان را می‌توان دارای ظرفیت نامحدود به شمار آورد. محدودیت‌هایی در مورد تعداد دانشجویانی که مجاز به قرار گرفتن در صف انتظار هستند وجود ندارد. چنانکه بعداً خواهیم دید، هر گاه ظرفیت سیستم محدود باشد تمیز بین **آهنگ ورود** (همان تعداد مراجعه به سیستم در واحد زمان) و **آهنگ موثر ورود** (همان تعداد موارد مراجعه به سیستم و ورود آنی در واحد زمان) **ضروری** است.

فرآیند ورود

فرآیند ورود برای مدل‌ها با جمعیت نامتناهی، معمولاً بر حسب مدت‌های بین ورود متقاضیان متوالی مشخص می‌شود. ورودها ممکن است در لحظات از قبل تعیین شده (همان قطعی) یا در لحظات تصادفی روی دهند. اگر ورود در لحظات تصادفی صورت گیرد، معمولاً مدت‌ها بین ورود با توزیع آماری مشخص می‌شوند. علاوه بر این، متقاضیان می‌توانند یک به یک یا به صورت گروهی وارد شوند. اندازه یک گره ممکن است ثابت یا متغیر و تصادفی باشد.

مهمترین مدل مربوط به ورود تصادفی فرایند ورود **پواسون** است. اگر مدت بین ورود متقاضی $n-1$ و متقاضی n با An معرفی شود (لحظه واقعی ورود اولین متقاضی است)، در مورد فرایند ورود پواسون، An توزیع آماری نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ واحد زمان دارد. آهنگ ورود λ متقاضی در واحد زمان است. تعداد ورود در فاصله زمانی به طول t یعنی $N(t)$ ، توزیع پواسون با میانگین λ متقاضی دارد.

فرایند ورود پواسون به عنوان مدل ورود مردم به رستوران‌ها، اتوبانک‌ها و سایر تشکیلات خدماتی، ورود تقاضاهای تلفنی به مرکز هدایت مشتری، ورود تقاضا یا سفارش برای یک خدمت یا کالا و ورود قطعات یا ماشین‌آلات از کار افتاده به تعمیرگاه مورد استفاده قرار گرفته است.

رفتار صف و قانون

منظور از **رفتار صف**، کنش‌های متقاضی تا زمان شروع خدمت‌گیری در صف انتظار است. در برخی موارد این امکان وجود دارد که متقاضی تازه از راه رسیده بلافاصله (با مشاهده صفی بسیار طولانی) یا با تاخیر (پس از مشاهده حرکت بسیار کند صف) از پیوستن به سیستم یا ماندن در آن منصرف شود و یا (پس از مشاهده این که در صفی است که آرام حرکت می‌کند) تغییر صف بدهد.

منظور از **قانون صف**، ترتیب منطقی متقاضیان در صف است و تعیین می‌کند که با **آزاد شدن** یک خدمت‌دهنده کدام متقاضی باید برای خدمت‌گیری انتخاب شود. قوانین رایج صف مشتمل بر خدمت‌گیری به ترتیب ورود (**FIFO** یا **First In First Out**)، به عکس ترتیب ورود (**LIFO** یا **Last In First Out**)، به ترتیب

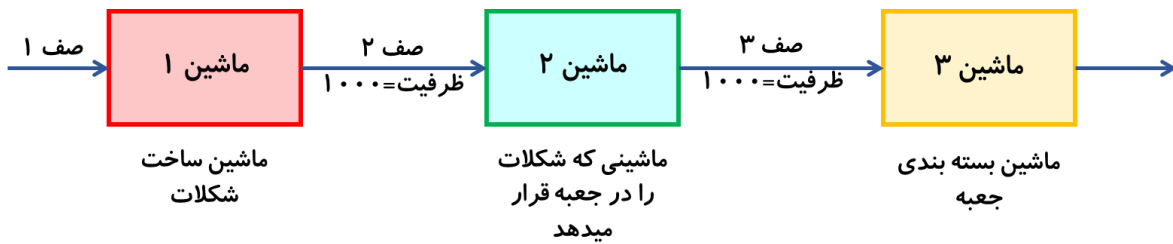
تصادفی (SIRO یا Served In Random Order)، براساس کوتاهترین مدت مورد نیاز (SPT یا Shortest Processing Time First)، و براساس اولویت (PR یا Priority) است.

مدت‌های خدمت‌دهی و مکانیزم آن

مدت‌های خدمت دهی به ورود کنندگان با نمادهای k_1, k_2, k_3, \dots ... نشان داده می‌شود. این مدت‌ها می‌تواند ثابت یا تصادفی باشند. در حالت تصادفی، معمولاً دنباله $\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ ، دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع هستند. توابع توزیع نمایی، ویبول، گاما، و نرمال همگی می‌توانند به عنوان توابع توزیع برای مدت خدمت‌گیری مورد استفاده قرار گیرد.

هر سیستم صف از تعدادی مرکز خدمت‌دهی و صف‌های مرتبط کننده آن‌ها تشکیل می‌شود. هر مرکز خدمت دهی مشتمل است بر تعدادی خدمت دهنده به تعداد c که به صورت موازی فعالیت دارند. موازی بودن به این معنا است که متقاضی با رسیدن به سر صف، هر متقاضی اولین خدمت دهنده بیکار را انتخاب می‌کند. تعداد خدمت دهنده می‌تواند از یک تا نامحدود تغییر کند.

مثال ۱: خط تولید یک واحد ساخت شکلات سه دستگاه ماشین را در بر می‌گیرد. ماشین اول قطعات شکلات را تولید و در بسته خود قرار می‌دهد. ماشین دوم هر ۵۰ قطعه شکلات را در یک جعبه می‌گذارد و ماشین سوم جعبه را کاملاً می‌بندد و آن را در سلفون قرار می‌دهد. هر یک از دو انبار میان خدمت دهنده‌ها ظرفیت ۱۰۰۰ جعبه را دارد. در شکل ۳ این سیستم نمایش داده شده است. سیستم سه مرکز خدمت‌دهی و هر مرکز یک خدمت دهنده همان $c=1$ دارد و ظرفیت صف‌های بین ماشین‌ها نیز دارای محدودیت است. چنین فرض می‌شود که در صف اول همواره موجودی کافی ماده خام در دست است. به سبب محدودیت ظرفیت صف، هر گاه که موجودی ماشین ۲ پر شود، ماشین ۱ متوقف می‌شود و حال آنکه با خالی شدن همین صف، ماشین ۲ متوقف می‌شود. به طور خلاصه، سیستم سه صف تک مجرای زنجیره ای با محدودیت‌های ظرفیت صف و جریان پیوسته ورود به اولین صف را در بر می‌گیرد.



شکل ۳: نمایش شماتیک خط تولید شکلات

نمادگذاری سیستم‌های صف

با توجه به تنوع سیستم‌های صف، در ادبیات نظریه صف روالی برای معرفی سیستم‌های موازی صف پیشنهاد کرده که به طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرد. نسخه اختصاری چنین عرفی مبتنی بر شکل $A/B/C/N/K$ است. این حروف معرف مشخصه‌های زیر برای سیستم صف است که در ادامه تعریف می‌شود.

A : نشان دهنده توزیع فواصل بین ورود است.

B : معرف توزیع مدت خدمت‌دهی است.

C : نشان دهنده تعداد خدمت دهنده‌های موازی است.

N : معرف ظرفیت سیستم است.

K : نشان دهنده اندازه جمعیت است.

نکته: علائم مرسوم برای A و B عبارت اند از M (نمایی)، D (ثابت یا قطعی)، Ek (ارلنگ مرتبه k) و G

(عمومی یا دلخواه).

مثلا $M / M / 1 / \infty / \infty$ معرف سیستمی با یک خدمت دهنده است که ظرفیت صف آن نامحدود و

جمعیت متقاضیان بالقوه آن نیز نامتناهی باشد. مدت‌های بین ورود و مدت‌های خدمت دهی نیز توزیع

نمایی دارند. هر گاه N و K نامتناهی باشند می‌توان آن‌ها را از انتهای علامت فوق حذف کرد. مثلا

$M / M / 1 / \infty / \infty$ را اغلب به صورت کوتاه $M / M / 1$ می‌نویسند.

برای آرایه نظریه صف نیاز به معرفی علائم خاصی است که در جدول زیر آرایه می‌شود.

تعریف	علامت
احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در حالت پایا	P_n
احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در لحظه t	$P_n(t)$
آهنگ ورود	λ
آهنگ ورود موثر	λ_e
آهنگ خدمت دهی یک خدمت دهنده	μ
آهنگ خدمت دهی موثر یک خدمت دهنده	μ_e
ضریب بهره برداری از خدمت دهنده	ρ
مدت بین ورود متقاضی $n-1$ ام و متقاضی n ام	A_n
مدت خدمت دهی به n امین متقاضی	S_n
مجموع مدتی که متقاضی n ام در سیستم می ماند	W_n
مجموع مدتی که متقاضی n ام در صف انتظار می ماند	W_n^q
تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در لحظه t	$L(t)$
تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در لحظه t	$L_q(t)$
میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم در بلند مدت	L
میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در صف انتظار در بلند مدت	L_q
میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلند مدت	w
میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلند مدت	w_q

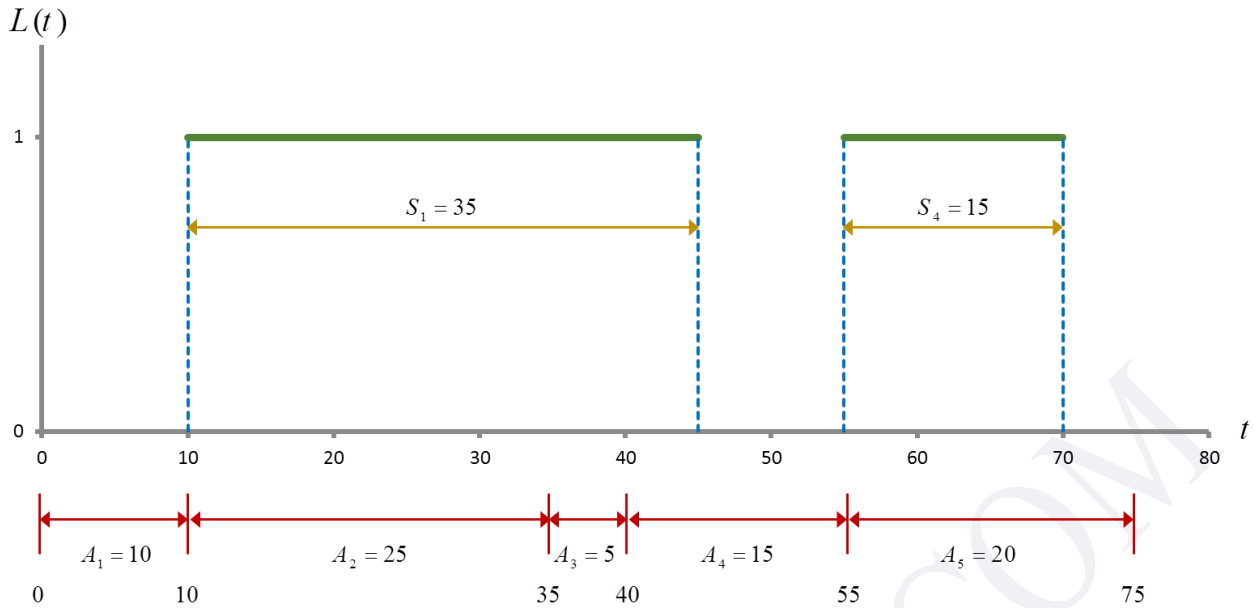
رفتار گذرا و پایای سیستم‌های صف

سیستم $M/M/1/1/\infty$ را در نظر بگیرید که در لحظه صفر خالی و بدون فعالیت است. به عبارت دیگر، یک صف تک مجرایی با ورودهای پواسون با میانگین λ ورود در واحد زمان و مدت‌های خدمت دهی نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ واحد زمان در نظر بگیرید. ظرفیت سیستم برابر با یک است به طوری که هرگز صف انتظار تشکیل نمی‌شود و متقاضیان از جمعیت نامتناهی که خدمت دهنده را مشغول بیابند برمی‌گردند.

مثال ۲: یک سکوی بارگیری را در نظر بگیرید که فضایی برای یک کامیون دارد و فاقد جا برای تشکیل صف انتظار است. اگر کامیونی در سکوی بارگیری باشد، تمام کامیون هایی که وارد می شوند باید به سکوهای دیگر بروند. هر گاه کامیونی وارد شود یا از سکو دور می شود و به محل دیگری برای تخلیه می رود و یا تخلیه آن سریعاً شروع می شود.

کامیون ها طبق توزیع پواسون با میانگین $\lambda = 2$ در ساعت وارد می شوند، در حالی که بارگیری و یا تخلیه در قالب متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\mu^{-1} = 120$ دقیقه است، به طوری که آهنگ خدمت دهی معادل $\mu = 0.5$ در ساعت است. چون جمعیتی بسیار بزرگ از کامیون ها متقاضی به صورت بالقوه وجود دارد، مدلی برای سیستم صف $M / M / 1 / 1 / \infty$ تهیه می شود. در ادامه از طریق شبیه سازی این سیستم مورد بررسی قرار می گیرد.

فرض کنید سکو در لحظه صفر خالی است. به علاوه فرض کنید که مدت های بین ورود تولید شده و برحسب دقیقه عبارت از $A_1 = 10$ ، $A_2 = 25$ ، $A_3 = 5$ ، $A_4 = 15$ ، $A_5 = 20$ و مدت های خدمت دهی نیز تولید شده و برحسب دقیقه عبارت از $S_1 = 35$ ، $S_2 = 20$ ، $S_3 = 60$ ، $S_4 = 15$ ، $S_5 = 134$ است. نمایشی از تغییرات $L(t)$ که همان تعداد کامیون های حاضر در لحظه t است در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴: نمایش تغییرات $L(t)$ در بازه زمانی صفر تا ۷۰

شکل فوق را می‌توان به عنوان شبیه‌سازی سکوی بارگیری و تخلیه کامیون‌ها از لحظه صفر تا لحظه ۷۵ به شمار آورد. باید توجه داشت که کامیون‌های دوم و سوم در لحظات ۳۵ و ۴۰ امکان ورود به سیستم را نمی‌یابند زیرا در این مدت کامیون اول هنوز در سیستم حاضر است و از این جهت S_2 و S_3 هیچ نقشی در شبیه‌سازی بازی نمی‌کنند.

توجه: برای مطالعه ادامه آموزش نظریه صف، حالت‌های مختلف آن و حل تمرین‌های متنوع، جزوه این درس را از طریق وب سایت **بهینه یاب** به نشانی www.behinehyab.com تهیه فرمایید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**