درس ۲۹:

بهینه سازی استوار

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

در برنامه‌ریزی ریاضی معمولا مسائل با پیش فرض قطعی بودن داده ها مدل سازی و حل می شوند. پیش فرض اصلی برنامه‌ریزی ریاضی در شرایط اطمینان[1]، توسعه مدل بر اساس داده های **معین** و برابر با مقادیر اسمی[2] است؛ در این گونه مدل ها اثر عدم اطمینان داده ها در کیفیت و امکان پذیری جواب ها تأثیری **ندارد**، در نتیجه در مسائل دنیای واقعی ممکن است با تغییر یکی از داده ها، تعداد زیادی از محدودیت ها نقض و جواب به دست آمده **غیر بهینه**[3] یا **حتی غیر ممکن**[4] شود. از این رو، چالش اصلی در این گونه مسائل، رسیدن به پاسخ مسئله است که در مقابل عدم اطمینان داده ها **استوار**[5] باشد؛ به اصطلاح این جواب ها را جواب های استوار و این دسته از مسائل بهینه سازی ها را مسائل **بهینه سازی استوار**[6] می نامند. نظریه برنامه‌ریزی یا بهینه سازی استوار روش ریسک گریزی را برای مواجهه با عدم اطمینان فراهم می سازد.

استواری به این مفهوم است که خروجی مدل نباید **حساسیت** زیادی به مقادیر دقیق پارامترهای ورودی داشته باشد. اهمیت این ویژگی در مدل ها باعث شده است که کاربرد بحث استواری در سال های اخیر در حوزه های مختلف با رشد فزاینده ای همراه شود. برنامه‌ریزی استوار در مباحث زمان بندی، مدیریت کیفیت، تخصیص منابع، طراحی سیستم های تولیدی، مدیریت زنجیره تأمین، تدوین استراتژی، حمل و نقل و مسائل مالی چشمگیر شده است. به طور کلی می توان مدل های معرفی شده در زمینه برنامه‌ریزی استوار را به **دو فهرست** کلی تقسیم بندی کرد.

دسته اول مدل هایی است که مبتنی بر سناریوهای **گسسته** تعریف می شود. در این مدل ها مقدار تابع هدف در هر یک از سناریوها باید اختلاف کمی با یکدیگر داشته باشند.

---

[1] Certain
[2] Nominal
[3] Non-optimal
[4] Infeasible
[5] Robust
[6] Robust optimization

دسته دوم نیز بر اساس مفهوم مجموعه های عدم اطمینان و مبتنی بر نوسان پارامترها در **یک بازه** است. در این مدل ها، عدم اطمینان در شکل مجموعه های عدم اطمینان کران دار مدل سازی می شود و هدف به دست آوردن جواب است که نسبت به تقریبا تمام پارامترهای عدم اطمینان حساسیت نداشته باشد. در واقع، پارامترهای پیوسته را می توان با رویکرد برنامه‌ریزی استوار در فواصل مشخصی محدود کرد و عدم اطمینان را در یک مجموعه مناسب جای داد.

جواب حاصل از این مدل جوابی است که نسبت به تغییرات داده های ورودی کمتر حساس است. در این نظریه یک راه حل برای یک مسئله بهینه سازی در صورتی استوار است که هم استوار موجه (استواری مدل) و هم استوار بهینه (استواری جواب) باشد.

استواری موجه به این معنی است که راه حل باید در محدودیت های مسئله برای تقریبا تمامی سناریوها **موجه** باقی بماند؛ برای این منظور در روش مطالعه مالوی[۷] و همکاران، ناموجه بودن جواب با یک تابع جریمه اندازه گیری می شود. موجه بودن جواب مستلزم این است که تابع جریمه دارای مقدار پایینی باشد.

استواری بهینگی نیز به این معنی است که مقدار تابع هدف برای جواب مسئله باید نزدیک به مقدار بهینه باقی بماند یا دارای حداقل انحرافات نامطلوب از مقدار بهینه برای هر یک از مقادیر سناریوها باشد.

در تابع هدف مدل مالوی و همکاران برای استواری مدل و استواری جواب دارای جریمه هستیم که با توجه به ترجیح مدل ساز به هر یک از این **جریمه ها** وزن اختصاص می دهیم. روشن است که در این مدل، با توجه به ترجیحات تصمیم گیرنده، بین استواری جواب و استواری مدل باید تبادل صورت گیرد.

---

[۷] Mulvey

مدل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } c^T x + d^T y \\
&\text{s.t.} \quad Ax = b, \\
&\qquad Bx + Cy = e \\
&\qquad x \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}$$

متغیر x و متغیر y بردارهای تصمیم گیری هستند. پارامترهای A، B و C ماتریس پارامترها و b و e نیز بردار پارامترها هستند. همچنین A و b مشخص و B، C و e نادقیق هستند.

تحقق هر مقدار برای پارامتر نادقیق یک سناریو نامیده می شود، که با s نشان داده و احتمال آن با p_s آورده می شود ($\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$). برای نمایش مجموعه سناریوها از $\Omega = \{1, 2, \dots, S\}$ استفاده می کنیم. ضرایب نادقیق B، C و e را نیز به صورت B_s، C_s و e_s برای هر سناریو $s \in \Omega$ نشان می دهیم. همچنین، متغیر y نیز که در زمان تحقق یک سناریو در معرض تعدیل قرار می گیرد، به صورت y_s برای سناریو s نشان داده می شود. مدل بهینه سازی استوار تصادفی به صورت زیر فرموله می شود:

$$\text{Min } \gamma\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) + \omega p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) \qquad (۱)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \qquad (۲)$$

$$B_s x + C_S y_s + \eta_s = e_s, \quad \forall s \in \Omega, \qquad (۳)$$

$$x \geq 0, y_s \geq 0, \eta_s \text{ is free}, \forall s \in \Omega, \qquad (۴)$$

به دلیل نادقیق بودن پارامترها، مدل ممکن است برای برخی سناریوها ناموجه باشد. مجموعه $(\eta_1, \dots \eta_s)$ شامل بردار های خطا است که اندازه ناموجه بودن در محدودیت های (۳) برای سناریو s را اندازه گیری می کند. در صورت موجه بودن مدل برای سناریو s، η_s برابر با صفر خواهد بود؛ در غیر این صورت، η_s در محدودیت (۳) مقدار غیرصفر خواهد بود. در مدل بالا، تابع هدف مدل اول $(\xi = c^T x + d^T y)$ که می تواند

تابع سود یا هزینه باشد، تبدیل به متغیر تصادفی به صورت $\xi_s = c^T x + d_s^T y_s$ می شود که متوسط آن به ازای سناریوها، سود یا هزینه مورد انتظار نامیده می شود.

در مدل بالا، تابع هدف دارای دو قسمت شامل استواری جواب و استواری مدل است که وزن قسمت اول با γ (گاما) و وزن قسمت دوم با ω (امگا) مشخص می شود.

در **قسمت اول** که استواری جواب را در نظر می گیرد، از ξ_s برای نمایش تابع هزینه یا سود برای سناریو s بهره می بریم. انحراف معیار یا $\sigma(\bullet)$ بزرگ برای متغیر تصادفی ξ_s به معنی بالا بودن ریسک این جواب خواهد بود. در این صورت، یک تغییر کوچک در مقدار پارامترهای نادقیق مدل می تواند باعث یک تغییر بزرگ در مقدار تابع هدف شود. برای این قسمت، مالوی و همکاران از رابطه زیر استفاده کردند:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \alpha \sum_{s\in\Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2 \qquad (۵)$$

α وزن تغییر پذیری جواب را نشان می دهد. در این عبارت، با عبارت درجه دوم $\sum_{s\in\Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2$ نیاز به عملیات محاسباتی زیادی داریم. برای حل این مشکل، از قدر مطلق انحرافات به جای عبارت بالا می توان استفاده کرد که به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \alpha \sum_{s\in\Omega} p_s \left| \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right| \qquad (۶)$$

با توجه به غیر خطی بودن فرم قدر مطلق انحرافات، می توان با معرفی دو متغیر غیر منفی Q_s^+ و Q_s^- ، فرم غیر خطی را به فرم خطی تبدیل کرد و به جای حداقل سازی قدر مطلق انحرافات، مجموع این دو متغیر حداقل ساخت. بر این اساس، مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی بالا به صورت خطی بازنویسی می شود:

$$\text{Min} \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \alpha \sum_{s\in\Omega} p_s \left(Q_s^+ + Q_s^- \right) \qquad (۷)$$

$$\text{s.t.} \quad \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} = Q_s^+ - Q_s^- \quad s\in\Omega \qquad (۸)$$

$$Q_s^+, Q_s^- \geq 0, \; s\in\Omega \qquad (۹)$$

روشن است که برای $\alpha > 0$، حداقل یکی از Q_s^+ و Q_s^- صفر خواهد شد. به عبارت دیگر، در صورت بزرگ بودن ξ_s از $\sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}$، Q_s^+ مقداری مثبت و Q_s^- برابر با صفر و در صورت کوچک تر بودن ζ_s از $\sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}$ ، Q_s^- مقداری مثبت و Q_s^+ و مقداری برابر با صفر خواهد بود. دقت کنید که $|\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}| = Q_s^+ + Q_s^-$ است.

در **قسمت دوم**، از تابع جریمه $(\omega p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s))$، برای دادن جریمه به ناموجه بودن مدل استفاده می شود که استواری مدل را اندازه گیری می کند. ω وزن غیر موجه بودن مدل را نشان می دهد و با پارامتر γ تبادل بین استواری جواب و مدل را کنترل می کند. تابع جریمه، مقدار مورد انتظار بردار خطا η_s خواهد بود که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$p(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \eta_s \qquad (۱۰)$$

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

نظریه بهینه سازی استوار چهارچوبی را برای مواجهه با عدم اطمینان پارامترها در مسائل بهینه سازی فراهم می سازد، به طوری که می توان جواب بهینه را برای وقوع عدم اطمینان در یک مجموعه عدم اطمینان **کران دار** معین ایمن نگاه داشت. اولین گام در راستای توسعه نظریه بهینه سازی استوار را **سویستر**[۸] (۱۹۷۳) برداشته است. رویکرد سویستر برای مواجهه با عدم اطمینان ستون محور در فواصل پیشنهاد شده است؛ این رویکرد بهترین نتایج ممکن را برای هر یک از پارامترهای نادقیق در نظر می گیرد و جواب استواری را ارائه می کند که برای همه داده های نادقیق موجه است؛ با این حال این جواب **خیلی محافظه کارانه** است و مقدار تابع هدف را **خیلی بدتر** از تابع هدف با داده های اسمی ارائه می دهد.

---

[۸] Soyster

بعد از دو دهه، بن تال و نمیروفسکی[۹] (۱۹۹۸) و ال قاوی[۱۰] و همکاران (۱۹۹۸) با معرفی مدل هـایی بـرای مسائل خطی نادقیق یا تصادفی و حل همتای مسائل اسمی در فرم مسائل درجه دوم مخروطی، گامی مـوثر در این مسیر بر داشتند. بن تال و نمیروفسکی عدم اطمینان سطر محور را برای اجتناب از سناریوی بد ترین مورد (که خیلی غیر محتمل است) بررسی کردند و **همتای**[۱۱] استواری جدیدی را برای مسـئله برنامـه‌ریـزی خطی توسعه دادند که در آن یک حد بالایی برای تخطی از محـدودیت در نظـر گرفتـه مـی شـود. رویکـرد پیشنهادی نسبت به رویکرد سویستر **کمتر** محافظه کارانه، اما مدل حاصله **غیر خطی** بوده است و در نتیجه برای حل مدل های بهینه سازی **گسسته** استوار مستقیما کاربردی نیست.

برتسیماس و سیم[۱۲] (۲۰۰۴) رویکرد دیگری برای نمایش عدم اطمینان پارامترهـا توسـعه داده انـد. آن هـا کران هایی را برای پارامترهای عدم اطمینان در نظر گرفتند که از مقدار اسمی خود متفاوت اند. این رویکرد خانواده ای از همتای استوار را ارائه مـی کنـد کـه ویژگـی انعطـاف پـذیری دارد. رویکـرد پیشـنهادی ایـن نویسندگان دارای ویژگی های زیر است:

۱. امکان تنظیم سطح حفاظت برای تبادل بین عملکرد و استواری وجود دارد.
۲. امکان محاسبه تضمین احتمال برای ارضای محدودیت ها وجود دارد.
۳. این رویکرد برای مسائل بهینه سازی گسسته قابل استفاده است.

در بهینه سازی استوار مبتنی بر مجموعه های کراندار، فرض مـی شـود داده هـای عـدم اطمینـان در یـک مجموعه عدم اطمینان معین توزیع شده اند و هدف انتخاب بهترین جواب از بین جواب هـایی اسـت کـه در برابر عدم اطمینان داده ها مصون یا موجه هستند. توزیع های عدم اطمینان داده ها می تواند یکی از توزیـع های پیوسته مانند توزیع یکنواخت، نرمال و گسسته مانند دوجمله ای و پواسن را به خود بگیرد.

---

۹ Ben-tal and Nemirovski
۱۰ El Ghaoui
۱۱ Counterpart
۱۲ Bertsimas and Sim

مجموعه های عدم اطمینان

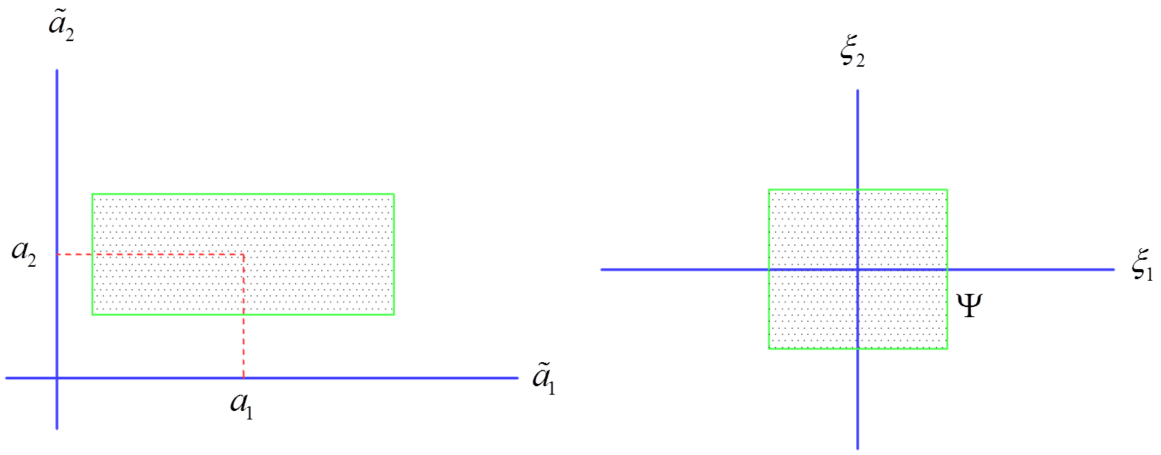
مجموعه عدم اطمینان جعبه ای

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای با استفاده از نرم[۱۳] بی نهایت بردار داده عدم اطمینان به صورت زیر بیان می شود:

$$U_{\infty}=\{\xi \mid \|\xi\|_{\infty}\leq \Psi\}=\{\xi \mid |\xi_j|\leq \Psi, \forall j\in J_i\} \qquad (۱۱)$$

Ψ پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند.

اگر پارامترهای عدم اطمینان در فواصل معین $\tilde{a}_{ij}\in[a_{ij}-\hat{a}_{ij}, a_{ij}+\hat{a}_{ij}]\, \forall j\in J_i$ محدود شده باشد، سپس عدم اطمینان به صورت $\tilde{a}_{ij}=a_{ij}+\xi_{ij}\hat{a}_{ij}$ نشان داده می شود، به طوری که ξ_{ij} در بازه [۱, ۱-] توزیع می شود. وقتی $\Psi=1$ (یعنی $U_{\infty}=\{\xi \mid |\xi_j|\leq 1, \forall j\in J_i\}$) باشد، مجموعه عدم اطمینان فاصله ای را خواهیم داشت که یک مورد خاص از مجموعه عدم اطمینان جعبه ای است. شکل زیر این نوع مجموعه عدم اطمینان را نشان می دهد.



شکل ۱ - نمایش عدم اطمینان جعبه ای

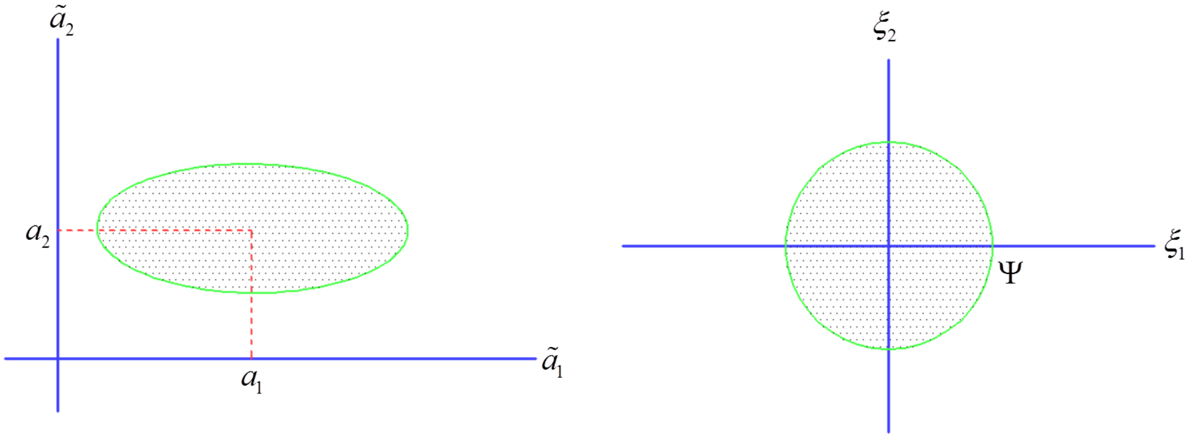
[۱۳] Norm

مجموعه عدم اطمینان بیضی

مجموعه عدم اطمینان بیضی با استفاده از نرم دوم بردار داده عدم اطمینان بیان می شود که رابطه ریاضی آن به صورت زیر است:

$$U_2 = \{\xi \mid \|\xi\|_2 \le \Omega\} = \left\{\xi \mid \sqrt{\sum_{j\in J_1} \xi_j^2} \le \Omega\right\} \qquad (۱۲)$$

Ω پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند. توجه داشته باشد که نرم $\|\ \|_2$ همان نرم استاندارد اقلیدسی است به طوریکه $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1} x_j^2}$ است.



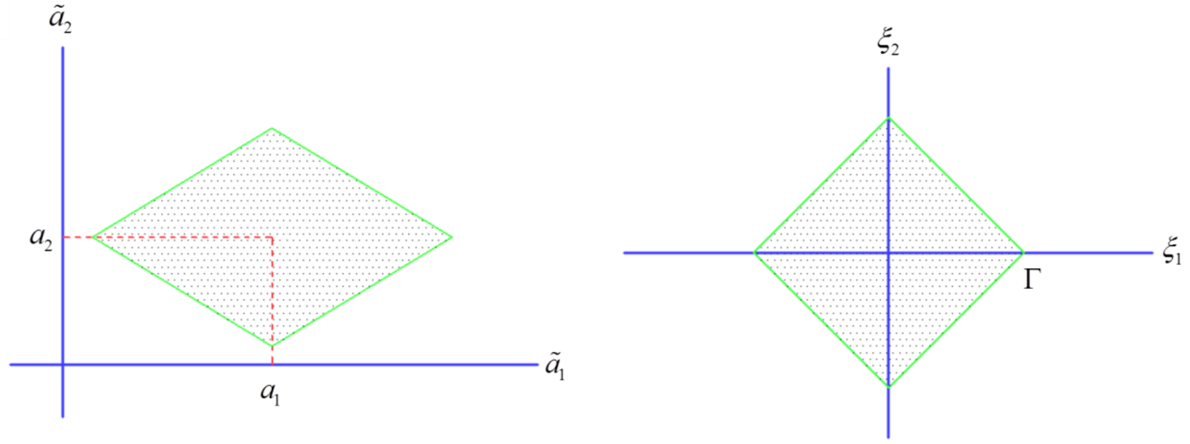
شکل ۲- نمایش عدم قطعیت بیضوی

مجموعه عدم اطمینان چند وجهی

مجموعه عدم اطمینان چندوجهی با استفاده از نرم یک بردار داده عدم اطمینان نشان داده می شود.

$$U_1 = \{\xi \mid \|\xi\|_1 \le \Gamma\} = \left\{\xi \mid \sum_{j\in J_i} |\xi_j| \le \Gamma\right\} \qquad (۱۳)$$

Γ پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند. نمایش این مجموعه عدم اطمینان به صورت زیر می شود.



شکل ۳ – نمایش عدم اطمینان چندوجهی

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی

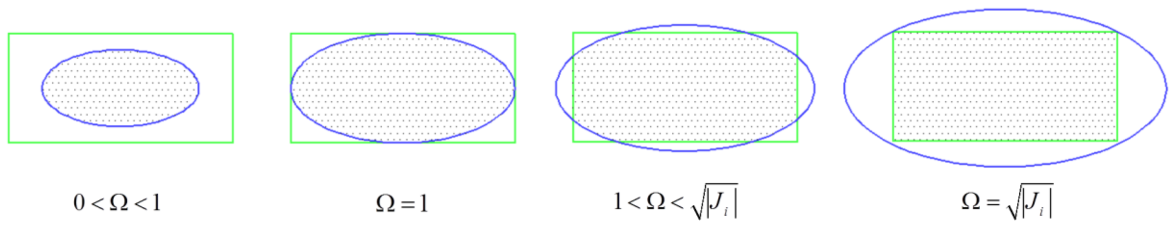
این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین یک بیضی و جعبه است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$U_{2\cap\infty} = \left\{ \xi \mid \sum_{j\in J_i} \xi_j^2 \le \Omega^2, |\xi_j| \le \psi, \forall j \in J_i \right\} \qquad (۱۴)$$

برای اطمینان از وجود اشتراک این دو مجموعه (جعبه ای و بیضی) به هر یک از آن ها محـدود نمـی شـود، پارامترها باید رابطه زیر را اقناع کنند:

$$\psi \le \Omega \le \psi\sqrt{|J_i|} \qquad (۱۵)$$

نکته: وقتی $\psi = 1$ باشد، مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضوی به صورت زیر می شود.



شکل ۴ – نمایش عدم اطمینان جعبه ای + بیضوی

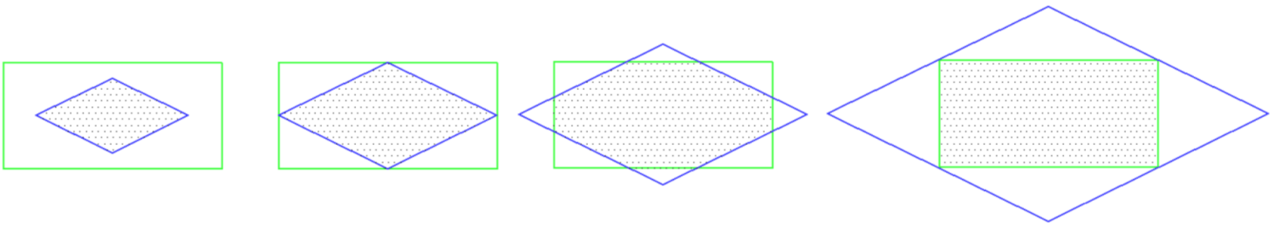
مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چند وجهی

این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین مجموعه چند وجهی و فاصله ای است که با اشتراک نرم یک و نرم بی نهایت به صورت زیر تعریف شده است:

$$U_{1\cap\infty}=\left\{\xi \mid \sum_{j\in J_i}|\xi_j|\le\Gamma, |\xi_j|\le\psi, \forall j\in J_i\right\} \quad (۱۶)$$

واضح است که برای یک جعبه و یک چند وجهی ای که قابل تنظیم هستند، اشتراک بین آن ها به هیچ یک از آن ها کاهش نمی یابد، اگر پارامترها رابطه زیر اقناع کنند:

$$\psi\le\Gamma\le\psi|J_i| \quad (۱۷)$$



$0<\Gamma<1$ $\quad$ $\Gamma=1$ $\quad$ $1<\Gamma<|J_i|$ $\quad$ $\Gamma=|J_i|$

شکل ۵ – مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چندوجهی

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی + چندوجهی

این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین مجموعه بیضی، چند وجهی و جعبه ای است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$U_{1\cap2\cap\infty}=\left\{\xi \mid \sum_{j\in J_1}|\xi_j|\le\Gamma, \sum_{j\in J_1}\xi_j^2\le\Omega^2, |\xi_j|\le\psi, \forall j\in J_i\right\} \quad (۱۸)$$

مشخص است که اشتراک بین جعبه و یک چند وجهی و بیضی به هیچ یک از آن ها کاهش نمی یابد، اگر پارامترهای قابل تنظیم رابطه زیر را اقناع کنند:

$$\Psi\le\Omega\le\psi|J_i| \quad (۱۹)$$

(۲۰)

$\Omega \le \Gamma \le \Omega |J_i|$

انواع مختلف عدم اطمینان در جدول ۱ خلاصه شده اند. با توجه به ویژگی بسته و باز بـودن مجموعـه هـای عدم اطمینان، در جدول ۱ دامنه پیشنهادی برای پارامترهای قابـل تعـدیل مجموعـه هـای عـدم اطمینـان مختلف آورده شده است.

جدول ۱ - خلاصه ای از مجموعه های عدم اطمینان

محدوده پیشنهادی برای عدم اطمینان بی کران	محدوده پیشنهادی برای عدم اطمینان کران دار	پارامتر	نوع
$\Psi \le \infty$	$\Psi \le 1$	Ψ	جعبه ای
$\Omega \le \infty$	$\Omega \le \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	Ω	بیضی
$\Gamma \le \infty$	$\Gamma \le \lvert J_i \rvert$	Γ	چندوجهی
ندارد	$\Omega \le \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	Ω	فاصله ای + بیضی
$\Psi \le \Omega\Psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\Psi \le 1, \Psi \le \Omega \le \Psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	Ψ, Ω	جعبه + بیضی
ندارد	$\Gamma \le \lvert J_i \rvert$	Γ	فاصله ای + چند وجهی
$\Psi \le \Gamma \le \Psi \lvert J_i \rvert$	$\Psi \le 1, \Psi \le \Gamma \le \Psi \lvert J_i \rvert$	Ψ, Γ	جعبه +چند وجهی
ندارد	$\Omega \le \sqrt{\lvert J_i \rvert},$ $\Omega \le \Gamma \le \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\Omega \le \Gamma$	فاصله ای + بیضی + چندوجهی
$\Psi \le \Omega \le \Psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$ $\Omega \le \Gamma \le \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\Psi \le 1, \Psi \le \Omega \le \Psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$ $\Omega \le \Gamma \le \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	Ψ, Ω, Γ	جعبه + بیضی + چند وجهی

بر اساس تعاریفی که از مجموعه های عدم اطمینان ارائه شد، فرموله بندی بهینه سازی همتای استوار برای مسائل بهینه سازی خطی را استخراج می کنیم. ابتدا همتای استوار مسئله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای نادقیق سمت چپ (LHS) را استخراج می کنیم، سپس به فرموله سازی استوار مسائلی با پارامترهای نادقیق سمت چپ (LHS) و راست (RHS) به طور همزمان می پردازیم:

هر گاه فقط مقادیر سمت چپ در محدودیت i نادقیق باشند، محدودیت های استوار به فرم زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \underset{\xi \in U}{\mathrm{Max}}\left\{\sum_{j \in J_i} \xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\right\} \le p_i \qquad (۲۱)$$

همتای استوار این محدودیت برای انواع مختلف عدم اطمینان به صورت زیر معرفی شده است:

۱. اگر مجموعه U **مجموعه عدم اطمینان جعبه ای** باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با رابطه بالا معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|x_j| \le p_i \qquad (۲۲)$$

۲. اگر مجموعه U **مجموعه عدم اطمینان بیضی** باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Omega\sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \le p_i \qquad (۲۳)$$

نکته: روشن است که با افزایش مقدار پارامتر عدم اطمینان Ψ و Ω، یعنی افزایش اندازه مجموعه عدم اطمینان، مجموعه موجه مسئله بهینه سازی همتای استوار حاصله کوچک می شود.

۳. اگر مجموعه U **مجموعه عدم اطمینان چندوجهی** باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma z_i \le p_i \qquad (۲۴)$$

$$z_i \ge \hat{a}_{ij}|x_j|, \forall j \in J_i \qquad (۲۵)$$

۴. اگر مجموعه U **مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی** باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} | x_j - z_{ij} | + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \le p_i \qquad (۲۶)$$

۵. اگر مجموعه U **مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چندوجهی** باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \le p_i \qquad (۲۷)$$

$$z_i + w_{ij} \ge \hat{a}_{ij} | x_j |, \quad \forall j \in J_i \qquad (۲۸)$$

$$z_i \ge 0, w_{ij} \ge 0 \qquad (۲۹)$$

برای اثبات موارد بالا می توانید به منبع لی[۱۴] و همکاران (۲۰۱۱) رجوع کنید.

[۱۴] Lee

جدول ۷-۱ فرموله سازی همتای استوار برای iامین محدودیت خطی با عدم اطمینان LHS و RHS

مجموعه عدم اطمینان	فرمول بندی همتای استوار
جعبه ای	$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi\left[\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij} \lvert x_{ij} \rvert + \hat{b}_i\right] \le b_i$
بیضی	$\sum_j a_{ij}x_j + \left[\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 x_j^2 + \hat{b}_i^2}\right] \le b_i$
چند وجهی	$\begin{cases}\sum_j a_{ij}x_j + z_i\Gamma \le b_i \\ z_i \ge \hat{a}_{ij} \lvert x_j \rvert, \forall j\in J_i, z_i \ge \hat{b}_i\end{cases}$
جعبه ای + بیضی	$\sum_j a_{ij}x_j + \begin{bmatrix}\Psi\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij} \lvert x_j - z_{ij} \rvert + \hat{b}_i \lvert 1 - z_{i0} \rvert + \\ \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2 + \hat{b}_i^2 z_{i0}^2}\end{bmatrix} \le b_i$
جعبه ای + چند وجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \left[z_i\Gamma + \sum_{j\in J_i} p_{ij} + p_{i0}\right] \le b_i$ $z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij} \lvert x_j \rvert,\ \forall j\in J_i, z_i + p_{i0} \ge \hat{b}_i$ $z_i \ge 0, p_{ij} \ge 0, p_{i0} \ge 0$
جعبه ای + بیضی + چند وجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \left[z_i\Gamma + \sum_{j\in J_i} p_{ij} \lvert + \rvert p_{i0} \lvert + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} w_{ij}^2 + w_{i0}^2}\right] \le b_i$ $z_i \ge \lvert \hat{a}_{ij}x_j - p_{ij} - w_{ij} \rvert,\ \forall j\in J_i,\ z_i \ge \lvert \hat{b}_i + p_{i0} + w_{i0} \rvert$

مثال ۱: مسئله بهینه سازی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

برای مقدار اسمی پارامتر های مدل داریم:

$$[c_1\ c_2] = [8\ 12], \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 72 \end{bmatrix}$$

نسخه نادقیق مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا به صورت زیر است:

$$\text{Max } \tilde{c}_1x_1 + \tilde{c}_2x_2$$

$$\text{s.t. } \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \le \tilde{b}_1$$

$$\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \le \tilde{b}_2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

عدم اطمینان پارامترهای مسئله بالا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{c}_j = c_j + \hat{c}_j\xi_{i0}, j = 1,2$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \tilde{a}_{ij}\xi_{ij}, i = 1,2\ j = 1,2$$

$$\tilde{b}_i = b_i + \hat{b}_i\xi_i, i = 1,2$$

که $\hat{c}_j = 0.1c_j$ ،$\hat{b}_j = 0.1b_j$ ،$\hat{a}_{ij} = 0.1a_{ij}$ انحراف از مقدار اسمی خود را نشان می دهند و $\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_1, \xi_2$ متغیر های تصادفی مستقل هستند.

وقتی هم زمان مقادیر سمت چپ (LHS)، سمت راست (RHS) و مقادیر تابع هدف (OBJ) را نادقیق در نظر بگیریم، ابتدا عدم اطمینان تابع هدف را به عدم اطمینان محدودیت تبدیل می کنیم و سپس همتای

استوار مبتنی بر مجموعه عدم اطمینان های مختلف را فرموله می کنیم؛ همتای استوار مبتنی بـر مجموعـه عدم اطمینان جعبه ای، بیضی و چندوجهی به صورت زیر فرموله شده است. برای مجموعه های دیگر نیز به همین ترتیب می توان همتای استوار آن ها را فرموله کرد.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z\\
&\text{s.t. } z-8x_1-12x_2+\Psi\left(0.8x_1+1.2x_2\right)\le 0\\
&\qquad 10x_1+20x_2+\Psi\left(x_1+2x_2+14\right)\le 140\\
&\qquad 10x_1+20x_2+\Psi\left(0.6x_1+0.8x_2+7.2\right)\le 72\\
&\qquad x_1, x_2\ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z\\
&\text{s.t } z-8x_1-12x_2+\Omega\sqrt{0.64x_1^2+1.44x_2^2}\le 0\\
&\quad 10x_1+20x_2+\Omega\sqrt{x_1^2+4x_2^2+196}\le 140\\
&\quad 10x_1+20x_2+\Omega\sqrt{0.36x_1^2+0.64x_2^2+51.81}\le 172\\
&\quad x_1, x_2\ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z\\
&\text{s.t. } z-8x_1-12x_2+\Gamma z_1\le 0\\
&\quad z_1\ge 0.8x_1, z_1\ge 1.2x_2\\
&\quad 10x_1+20x_2+\Gamma z_2\le 140\\
&\quad z_2\ge x_1, z_2\ge 2x_2, z_2\ge 14\\
&\quad 10x_1+20x_2+\Gamma z_3\le 72\\
&\quad z_3\ge 0.6x_1 z_3\ge 0.8x_2, z_3\ge 7.2\\
&\quad x_1, x_2\ge 0
\end{aligned}$$

مدل های استوار مبتنی بر مجموعه های عدم اطمینان

پارادایم کلاسیک در برنامه‌ریزی ریاضی، توسعه مدل با فرض شناخته بودن داده ها و برابر با داده های اسمی است. با این حال این رویکرد تأثیر عدم اطمینان داده ها را روی کیفیت و موجه بودن مدل در نظر نمی گیرد. روشن است که در صورت متفاوت بودن این مقدار داده ها از داده های اسمی، ممکن است از چندین محدودیت تخطی کنیم و جواب بهینه که با این داده ها یافت شد، دیگر بهینه یا حتی موجه نباشد. در این بخش، سه رویکرد بهینه سازی **سویستر**، **بن تال و نیمروفسکی**، و **سیم و برتیسماس** بررسی می شود.

در اینجا باید بتوان رویکردهایی که جواب آن ها مصون از عدم اطمینان داده ها است، طراحی کرد که به مفهوم استواری این رویکردها است. برای این منظور لازم است مدل هایی طراحی کرد که تا جای ممکن، در برابر عدم اطمینان داده ها ایمن باشند. اولین گام در این مسیر را **سویستر** برداشت. سویستر یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای تشکیل جوابی که برای کلیه داده های متعلق به یک مجموعه محدب موجه است، پیشنهاد کرد.

مسئله برنامه‌ریزی خطی اسمی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max\ c^T x \qquad (۳۰)$$

$$\text{s.t. } Ax \le b$$

$$l \le x \le u$$

در رابطه بالا، فرض کنید عدم اطمینان داده ها فقط عناصر ماتریس A را متاثر می سازد. همچنین فرض کنید تابع هدف در معرض عدم اطمینان قرار نداشته باشد. اگر وجود داشت، با توجه به حداکثر سازی تابع هدف z، محدودیت $z-c^T x \le 0$ را به محدودیت های مدل $Ax \le b$ می توان اضافه کرد.

برای سطر i از ماتریس A، J_i را مجموعه عدم اطمینان در سطر i در نظر بگیرید که در معرض عدم اطمینان قرار دارد. در سطر i، هر درایه $\tilde{a}_{ij}$ $(j \in J_i)$ را می توان به صورت یک پارامتر مستقل، متقارن و کران دار مدل سازی کرد، به طوری که مقداری در بازه $\left[a_{ij}-\hat{a}_{ij}, a_{ij}+\hat{a}_{ij}\right]$ بگیرد. a_{ij} و $\hat{a}_{ij}$ به ترتیب مقدار

اسمی و حداکثر انحراف از مقدار اسمی را نشان می دهند.

فرض قطعی بودن c و b هیچ خللی به کلیت مسئله وارد نمی کند؛ چرا که اگر در تابع هدف، پارامترهای نادقیق داشته باشیم، تابع هدف نیز به راحتی قابل تبدیل شدن به یک محدودیت است. همچنین در صورتی که بردار b غیر قطعی باشد، همانند پارامترهای سمت چپ با آن رفتار می شود، به نحوی که می توان فرض کرد در یک متغیر با مقدار ثابت یک ضرب شده باشد

مدال سویستر (۱۹۷۸)

سویستر یک مدل بهینه سازی خطی ارائه کرد که در آن جواب مدل برای کلیه داده های ورودی موجه بودند، به طوری که هر داده عدم اطمینان به صورت مستقل موجه است. که مدل استوار (۳۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} c^T x \\ &\text{s.t.} \sum_{j=1} a_{ij} x_j + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} y_i \leq b_i \quad \forall i \\ &\quad -y_i \leq x_j \leq y_j \quad \forall i \\ &\quad \int \leq x \leq u \\ &\quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

x^* را جواب بهینه مدل بالا در نظر بگیرید. روشن است که در حالت بهینه، $y_j = |x_j^*|$ است؛ از این رو خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leq b_i \quad \forall i \tag{۳۲}$$

سویستر نشان داد که به ازای هر مقدار ممکن برای داده عدم اطمینان $\tilde{a}_{ij}$، جواب به دست آمده موجه باقی می ماند؛ از این رو این جواب، جوابی استوار است و داریم:

$$\sum_{j=1} \tilde{a}_{ij} x_j^* = \sum_{j=1} a_{ij} x_j^* + \sum_{j=1} \eta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j^* \leq \sum_{j=1} a_{ij} x_j^* + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leq b_i \quad \forall i \tag{۳۳}$$

برای هر محدودیت i، عبارت $\sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*|$ با حفظ یک شکاف بین $\sum_{j=1} a_{ij}x_j^*$ و b_i یـک حفاظـت لازم بـرای این محدودیت ایجاد می کند.

مثال ۲: مسئله برنامه‌ریزی خطی با داده های اسمی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 \le 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 \le 240,$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

کلیه ضرایب متغیرها در محدودیت ها نادقیق هستند. حداکثر انحراف از مقدار اسمی در محدودیت اول (۱ و ۰/۵) برای متغیرهای x_1 و x_2 و در محدودیت دوم (۰/۵ و ۱) برای متغیرهـای x_1 و x_2 اسـت. بـا کمـک رویکرد سویستر مسئله را مدل سازی و حل کنید.

حل:

مسئله بالا به صورت زیر فرموله بندی می شود:

$$\text{Max } 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 + y_1 + 0.5y_2 \le 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 + 0.5y_1 + y_2 \le 240,$$

$$-y_1 \le x_1 \le y_1$$

$$-y_2 \le x_2 \le y_2$$

$$x, y \ge 0$$

جواب بهینه و مقدار آن در جدول زیر آمده است:

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$y_۱$	$y_۲$
مدل اسمی	۱۱۱۳/۰۴	۲۹/۵۶	۱۷/۳۹	-	-
مدل سویستر	۹۷۳/۶۴	۲۳/۵۶	۱۶/۷۴	۲۳/۵۶	۱۶/۷۴

همان طور که مشاهده می شود جواب مسئله با در نظر گرفتن عدم اطمینان در مدل سویستر نسبت به جواب مدل اسمی متفاوت و مقدار تابع هدف به دلیل محافظه کاری در حل مدل به اندازه قابل توجهی کاهش یافته است.

مدل بن تال و نمیروفسکی (۲۰۰۱)

در رویکرد سویستر علاوه بر سطح محافظه کاری بالا، در جواب به دست آمده از این رویکرد، مقدار تابع هدف خیلی **بدتری** را در مقایسه با تابع هدف جواب مسئله بهینه سازی **اسمی** به دست می دهد. برای این منظور، الگوریتم های کارایی از جمله روش بن تال و نمیروفسکی برای حل مسائل بهینه سازی **محدب** با داده های عدم اطمینان پیشنهاد شده است. با این حال، فرموله سازی استوار حاصله شامل مسائل درجه دوم مخروطی[۱۵] است، در نتیجه برای بهینه سازی گسسته قابل استفاده نیست.

بن تال و نمیروفسکی مسئله استوار زیر را پیشنهاد کردند:

$$\operatorname{Max} c^{T}x \qquad (۳۴)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j} a_{ij}x_j + \sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}y_j + \Omega_i \sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \le b_i \quad \forall i \qquad (۳۵)$$

$$-y_{ij} \le x_j - z_{ij} \le y_{ij} \quad \forall i, j \in J_i \qquad (۳۶)$$

[۱۵] Conic quadratic optimization

$l \le x \le u$ (۳۷)

$y \ge 0$ (۳۸)

آن ها نشان دادند که احتمال نقض محدودیت i، حداکثر $\exp\left(-\frac{\Omega_i^2}{2}\right)$ است. مدل استوار بالا نسبت به مدل سویستر کمتر محافظه کارانه است.

فرض کنید ماتریس اسمی $A_{m\times n}$ دارای k ضریب باشد که دارای عدم اطمینان است. با توجه به اینکه مسئله اسمی اولیه، دارای n متغیر و m محدودیت است، مدل سویستر یک مسئله بهینه سازی خطی با ۲ n متغیر و m+۲n محدودیت است. در مقابل مدل (۳۸-۳۴) یک مسئله مخروطی درجه دو با n+۲k متغیر و m+۲k محدودیت است. با توجه به غیر خطی بودن مدل، این مدل برای حل مدل های بهینه سازی گسسته استوار قابل استفاده نیست.

مثال ۳: یک کارخانه تولید فولاد می تواند سه نوع فولاد تولید کند. زمان مورد نیاز، هزینه تولید و سود هر تن از محصولات در جدول زیر آمده است:

	A	B	C
هزینه تولید هر تن	۸	۱۰	۵
زمان مورد نیاز برای تولید هر تن	۴	۶	۸
سود هر تن	۱۵	۲۰	۱۰

بودجه این کارخانه ۲۰۰ واحد و کل زمان در دسترس ۱۲۰ واحد است. مسئله را به گونه ای مدل سازی کنید که با توجه به بودجه و زمان در دسترس سود کل حاصل از تولید محصولات حداکثر شود.

اگر متغیرهای آن x_1، x_2 و x_3 به ترتیب میزان تولید فولاد از نوع A، B و C باشد، مدل قطعی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } 15x_1+20x_2+10x_3$$

$$\text{s.t. } 8x_1+10x_2+5x_3 \le 200,$$

$$4x_1+6x_2+8x_3 \le 120,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

بررسی های مدیریت نشان می دهد حداکثر انحراف از مقدار اسمی هزینه تولید برای محصولات A، B و C به ترتیب ۱، ۲ و ۰/۵ و حداکثر انحراف از مقدار اسمی زمان تولید برای هر یک از این محصولات به ترتیب ۰/۵، ۱و ۲ است. با فرض اینکه احتمال نقض محدودیت های بالا به ترتیب ۰/۲۵ و ۰/۱۵ باشد، مدل همتای استوار این مسئله را با روش بن تال و نمیروفسکی بنویسید و آن را حل کنید.

حل:

اگر حداکثر احتمال نقض هر محدودیت برابر با $\exp\left(-\frac{\Omega_i^2}{2}\right)$ باشد. از این رو داریم:

$$\exp\left(-\frac{\Omega_1^2}{2}\right)=0.25 \Rightarrow \Omega_1 = 1.36$$

$$\exp\left(-\frac{\Omega_2^2}{2}\right)=0.15 \Rightarrow \Omega_2 = 1.9$$

با توجه به اینکه همه ضرایب فنی غیر قطعی و به صورت بازهای تعریف شده اند، بنابراین مدل بن تال و نمیروفسکی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Max } 15x_1+20x_2+10x_3$$

$$\text{s.t. } 8x_1+10x_2+5x_3+y_{11}+2y_{12}+0.5y_{13}+1.26\left[z_{11}^2+4z_{12}^2+0.25z_{13}^2\right]^{\frac{1}{2}} \le 200$$

$$4x_1+6x_2+8x_3+0.5y_{21}+y_{22}+2y_{23}+1.9\left[0.25z_{21}^2+z_{22}^2+4z_{23}^2\right]^{\frac{1}{2}} \le 120$$

$$-y_{11} \le x_1 - z_{11} \le y_{11}$$

$$-y_{12} \le x_2 - z_{12} \le y_{12}$$

$$-y_{13} \le x_3 - z_{13} \le y_{13}$$

$$-y_{21} \le x_1 - z_{21} \le y_{21}$$

$$-y_{22} \le x_2 - z_{22} \le y_{22}$$

$$-y_{23} \le x_3 - z_{23} \le y_{23}$$

$$x_i, y_{ij} \ge 0$$

جواب بهینه حاصل از حل مدل به صورت جدول زیر خواهد بود:

مقدار جواب بهینه	متغیر تصمیم	مقدار جواب بهینه	متغیر تصمیم
۵/۵	y_{22}	۳۴۰/۲	مقدار تابع هدف
۱/۷	y_{23}	۱۱۴/۲	x_1
۰	z_{11}	۵/۵	x_2
۰	z_{12}	۱/۷	x_3
۰	z_{13}	۲/۷	y_{11}
۱۴/۲	z_{21}	۰	y_{12}
۵/۴	z_{22}	۰	y_{13}
۱/۷	z_{23}	۱۱/۵	y_{21}

مدل برتسیماس و سیم (۲۰۰۴)

l،c و u را بردارهایی n تای، A را ماتریس $m \times n$ و b را یک برداری m تایی در نظر بگیرید. مساله برنامه ریزی ریاضی اسمی زیر را با مجموعه n متغیر در نظر بگیرید:

$$\text{Min}\ c^T x \quad (۳۹)$$

$$\text{s.t.}\ Ax \leq b \quad (۴۰)$$

$$l \leq x \leq u \quad (۴۱)$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می شود که تنها ماتریس A و بردار c شامل داده هـای غیرقطعـی هستند و بردار b از اعداد قطعی تشکیل یافته است. هر چند در این مورد نیز می توان متغیر جدید x_{n+1} را معرفی کرد و نوشت $Ax - bx_{n+1} \leq 0, l \leq x \leq u, 1 \leq x_{n+1} \leq 1$ و در نتیجه A را طوری نوشت که b را نیـز شامل شود.

در کاربردهای معمول، برای مقدار میانگین ضرایب a_{ij} و دامنه آن ها $\hat{a}_{ij}$ تخمین های معقـولی وجـود دارد. احساس می شود شناخت توزیع دقیق این ضرایب در اکثر مواقع بعید باشد. به طریق مشـابه تخمـین هـایی برای ضرایب تابع هدف c_j و دامنه آن ها d_j موجود است. مدل عدم قطعیت داده هایی که در ایـن بخـش بررسی می شود، به طور خاص به صورت زیر می باشد.

الف) عدم قطعیت برای ماتریس A

فرض کنید $N = \{1, 2, ..., n\}$. هر کدام از ضرایب $j \in N$ ، a_{ij} به صورت یک متغیر تصـادفی مسـتقل، بـا توزیع متقارن و کران دار مدل می شود و $\tilde{a}_{ij}$ که $j \in N$ در بازه $\left[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}\right]$ مقدار می گیرد.

ب) عدم قطعیت برای بردار هزینه c

هر کدام از $j \in N$ و c_j در بازه $\left[c_j, c_j + d_j\right]$ مقدار می گیرد که d_j بیـانگر انحـراف از ضـریب هزینـه اسمی c_j است.

باید توجه داشته باشید که امکان $\hat{a}_{ij} = 0$ یا $d_j = 0$ مجاز اسـت. همچنـین تنهـا فرضـی کـه بـرای توزیـع

ضرایب a_{ij} در نظر گرفته شده، متقارن بودن آن می باشد.

در ادامه به فرمول بندی برنامه ریزی استوار مدل معرفی شده می پردازیم.

به منظور استوار بودن جواب، اعداد $\Gamma_i, i=0,1,\ldots,m$ تعریف می شود که در بازه $\left[0,|J_i|\right]$ مقدار می گیرند که در آن $J_i=\{j \mid \hat{a}_{ij}>0\}$ به عبارت دیگر $|J_i|$ برابر با تعداد داده های غیرقطعی در محدودیت i ام است.

نقش پارامتر Γ_i در محدودیت ها، تنظیم نمودن میزان استواری در مقابل سطح محافظه کاری جواب است. محدودیت i ام مسئله اسمی، یعنی $a_i x \le b_i$ ، را در نظر بگیرید. فرض کنید J_i مجموعه ضرایب $j \in J_i$، a_{ij} هایی باشد که دارای عدم قطعیت هستند. به عبارت دیگر، $\tilde{a}_{ij}$ برای $j \in J_i$ مقادیری تصادفی از یک توزیع متقارت با میانگین a_{ij} در بازه $\left[a_{ij}-\hat{a}_{ij}, a_{ij}+\hat{a}_{ij}\right]$ می گیرند. به نظر می رسد کمتر احتمال دارد که همه $\tilde{a}_{ij}$ برای $j \in J_i$ همزمان تغییر کنند. در اینجا هدف آن است که در همه حالاتی که حداکثر $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تا از این ضرایب مجاز به تغییر باشند، و یک ضریب a_{it} نیز حداکثر به اندازه $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{it}$ تغییر می کند، موجه بودن جواب تضمین شود. مقدار Γ_i سطح حفاظت برای محدودیت i ام نامیده می شود.

پارامتر Γ_0 سطح استوار بودن را برای تابع هدف کنترل می کند. علاقه مند به یافتن جواب بهینه ای هستیم که تابع هدف را تحت همه سناریوهایی که Γ_0 تا از ضرایب هزینه تغییر می کنند و بیشترین تاثیر را روی جواب می گذارند، بهینه کند. فرض کنید $J_0=\{j \mid d_j>0\}$. اگر $\Gamma_0=0$ باشد، اثر تغییرات در ضرایب هزینه به طور کامل نادیده گرفته می شود. اما اگر $\Gamma_0=|J_0|$ باشد، همه تغییرات ممکن در ضرایب هزینه در نظر گرفته می شود که محافظه کارانه ترین حالت می باشد.

همتای استوار پیشنهادی برتیسمس و سیم برای مسئله (۳۹-۴۱) به طور خاص به شکل زیر است.

$$Min \quad c^T x + \max_{\{S_0 | S_0 \subseteq J_0, |S_0| \le \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} d_j |x_j| \right\}$$

$$s.t. \quad \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| \le \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{it_i}| \right\} \le b_i$$

$$l \le x \le u$$

سیم و برتسیمس نشان دادند که مدل ساده شده زیر معادل مدل فوق است:

$$\text{Max } c^T x + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j \in J_0} p_{0j} \tag{۴۲}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \le b_i, \quad \forall i \tag{۴۳}$$

$$z_0 + p_{0j} \ge d_j y_j, \quad \forall j \in J_0 \tag{۴۴}$$

$$z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij} y_j, \quad \forall i \ne 0, j \in J_i \tag{۴۵}$$

$$-y_j \le x_j \le y_j, \quad \forall j \tag{۴۶}$$

$$p_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j \in J_i \tag{۴۷}$$

$$y_j \ge 0, \ \forall j \tag{۴۸}$$

$$z_i \ge 0, \ \forall i \tag{۴۹}$$

$$l_j \le x_j \le u_j, \ \forall j \tag{۵۰}$$

مثال ۴: مثال ۲ را با رویکرد برتسیماس و سیم مدل سازی و حل کنید.

حل:

مسئله به صورت زیر فرموله سازی می شود:

$$\text{Max} \;\; 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t.} \;\; 5x_1 + 3x_2 + z_1\Gamma_1 + p_{11} + p_{12} \le 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 + z_2\Gamma_2 + p_{21} + p_{22} \le 240,$$

$$z_1 + p_{11} \ge y_1$$

$$z_1 + p_{12} \ge 0.5y_2$$

$$z_1 + p_{21} \ge 0.5y_1$$

$$z_2 + p_{22} \ge y_2$$

$$-y_1 \le x_1 \le y_1$$

$$-y_2 \le x_2 \le y_2$$

$$x, y, p, z \ge 0$$

روشن است که برای حل مدل بالا ابتدا باید بودجه عدم اطمینان Γ_i دو محدودیت مسئله را مشخص کرد. جواب بهینه و مقدار آن به ازای مقادیر مختلف Γ_1 و Γ_2 در جدول زیر به دست آمده است. همان طور که مشاهده می شود، مقدار جواب بهینه با افزایش بودجه عدم اطمینان کاهش و سطح استواری جواب بهبود می یابد. برای $\Gamma_1, \Gamma_2 = 0$ جواب و مقدار بهینه **برابر** با جواب به دست آمده از مدل **اسمی** بوده و برای $\Gamma_1, \Gamma_2 = 2$ نیز که **حداکثر** محافظه کاری را با توجه به دو پارامتره بودن محدودیت ها در نظر گرفته است، جواب و مقدار بهینه برابر با جواب به دست آمده از رویکرد سویستر است. $\Gamma_1, \Gamma_2 = 1$ نیز برای بودجه عدم اطمینان بین دو مقدار بالا است.

بودجه عدم اطمینان	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	z_1	z_2
$\Gamma_1,\Gamma_2=0$	۱۱۰۴	۲/۵۶	۱۷/۳۹	۲۹/۵۶	۱۷/۳۹	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۲۹/۵۶	۱۷/۳۹
$\Gamma_1,\Gamma_2=1$	۱۰۲۲	۲/۴۴	۱۷/۷۷	۲۴/۴۴	۱۷/۷۷	۱۵/۵۵	۰/۰	۰/۰	۵/۵۶	۸/۸۸	۱۲//۲۲
$\Gamma_1,\Gamma_2=2$	۹۷۳/۶۴	۲/۵۶	۱۶/۷۴	۲۳/۵۶	۱۶/۷۴	۱۵/۱۹	۰/۰	۰/۰	۴/۹۶	۸/۳۷	۱۱/۷۶

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**