درس ۲۹:

بهینه سازی استوار

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

در برنامه‌ریزی ریاضی معمولا مسائل با پیش فرض قطعی بودن داده ها مدل سازی و حل می شـوند. پـیش فرض اصلی برنامه‌ریزی ریاضی در شرایط اطمینان[۱]، توسعه مدل بر اساس داده های **معین** و برابر با مقـادیر اسمی[۲] است؛ در این گونه مدل ها اثر عدم اطمینان داده ها در کیفیت و امکـان پـذیری جـواب هـا تـأثیری **ندارد**، در نتیجه در مسائل دنیای واقعی ممکن است با تغییر یکی از داده ها، تعداد زیادی از محـدودیت هـا نقض و جواب به دست آمده **غیر بهینه**[۳] یا **حتی غیر ممکن**[۴] شود. از این رو، چالش اصـلی در ایـن گونـه مسائل، رسیدن به پاسخ مسئله است که در مقابل عدم اطمینان داده ها **اسـتوار**[۵] باشـد؛ بـه اصـطلاح ایـن جواب ها را جواب های استوار و این دسته از مسائل بهینه سازی ها را مسائل **بهینه سـازی اسـتوار**[۶] مـی نامند. نظریه برنامه‌ریزی یا بهینه سازی استوار روش ریسک گریزی را برای مواجهه با عدم اطمینـان فـراهم می سازد.

استواری به این مفهوم است که خروجی مدل نباید **حساسیت** زیادی به مقـادیر دقیـق پارامترهـای ورودی داشته باشد. اهمیت این ویژگی در مدل ها باعث شده است که کاربرد بحث استواری در سال های اخیـر در حوزه های مختلف با رشد فزاینده ای همراه شود. برنامـه‌ریـزی اسـتوار در مباحـث زمـان بنـدی، مـدیریت کیفیت، تخصیص منابع، طراحی سیستم های تولیدی، مدیریت زنجیره تأمین، تدوین استراتژی، حمل و نقل و مسائل مالی چشمگیر شده است. به طور کلی می توان مدل های معرفی شده در زمینه برنامه‌ریزی استوار را به **دو فهرست** کلی تقسیم بندی کرد.

دسته اول مدل هایی است که مبتنی بر سناریوهای **گسسته** تعریف می شود. در این مدل ها مقـدار تـابع هدف در هر یک از سناریوها باید اختلاف کمی با یکدیگر داشته باشند.

---

[۱] Certain
[۲] Nominal
[۳] Non-optimal
[۴] Infeasible
[۵] Robust
[۶] Robust optimization

دسته دوم نیز بر اساس مفهوم مجموعه های عدم اطمینان و مبتنی بر نوسان پارامترها در **یک بازه** است. در این مدل ها، عدم اطمینان در شکل مجموعه های عدم اطمینان کران دار مدل سازی می شود و هدف به دست آوردن جواب است که نسبت به تقریبا تمام پارامترهای عدم اطمینان حساسیت نداشته باشد. در واقع، پارامترهای پیوسته را می توان با رویکرد برنامه‌ریزی استوار در فواصل مشخصی محدود کرد و عدم اطمینان را در یک مجموعه مناسب جای داد.

جواب حاصل از این مدل جوابی است که نسبت به تغییرات داده های ورودی کمتر حساس است. در این نظریه یک راه حل برای یک مسئله بهینه سازی در صورتی استوار است که هم استوار موجه (استواری مدل) و هم استوار بهینه (استواری جواب) باشد.

استواری موجه به این معنی است که راه حل باید در محدودیت های مسئله برای تقریبا تمامی سناریوها **موجه** باقی بماند؛ برای این منظور در روش مطالعه مالوی[۷] و همکاران، ناموجه بودن جواب با یک تابع جریمه اندازه گیری می شود. موجه بودن جواب مستلزم این است که تابع جریمه دارای مقدار پایینی باشد.

استواری بهینگی نیز به این معنی است که مقدار تابع هدف برای جواب مسئله باید نزدیک به مقدار بهینه باقی بماند یا دارای حداقل انحرافات نامطلوب از مقدار بهینه برای هر یک از مقادیر سناریوها باشد.

در تابع هدف مدل مالوی و همکاران برای استواری مدل و استواری جواب دارای جریمه هستیم که با توجه به ترجیح مدل ساز به هر یک از این **جریمه ها** وزن اختصاص می دهیم. روشن است که در این مدل، با توجه به ترجیحات تصمیم گیرنده، بین استواری جواب و استواری مدل باید تبادل صورت گیرد. نحوه فرموله سازی مدل بهینه سازی استوار مالوی و همکاران در ادامه آورده شده است.ت

---

[۷] Mulvey

مدل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min}\; c^T x + d^T y \\ &\text{s.t.}\quad Ax = b, \\ &\qquad Bx + Cy = e \\ &\qquad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

متغیر x برداری از متغیرهای طراحی و متغیر y نیز برداری از متغیرهای کنترل است. پارامترهـای A، B و C ماتریس پارامترها و b و e نیز بردار پارامترهـا هسـتند. همچنـین A و b مشـخص و B, C و e نـادقیق هستند.

تحقق هر مقدار برای پارامتر نادقیق یک سناریو نامیده می شود، که با s نشان داده و احتمال آن با p_s آورده می شود ($\sum_{s=1}^{s} p_s = 1$). برای نمایش مجموعه سناریوها از $\Omega = \{1, 2, \dots, S\}$ استفاده می کنیم. ضرایب نادقیق B، C و e را نیز به صورت B_s، C_s و e_s برای هر سناریو $s \in \Omega$ نشان می دهیم. همچنین، متغیر کنتـرل y نیز که در زمان تحقق یک سناریو در معرض تعدیل قرار می گیرد، به صورت y_s بـرای سـناریو s نشـان داده می شود. مدل بهینه سازی استوار تصادفی به صورت زیر فرموله می شود:

$$\text{Min}\; \gamma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) + \omega p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) \tag{۱}$$

$$\text{s.t.}\quad Ax = b, \tag{۲}$$

$$B_s x + C_S y_s + \eta_s = e_s, \quad \forall s \in \Omega, \tag{۳}$$

$$x \ge 0, y_s \ge 0, \eta_s \ge 0, \forall s \in \Omega, \tag{۴}$$

به دلیل نادقیق بودن پارامترها، مدل ممکن است برای برخی سناریوها ناموجـه باشـد. مجموعـه $(\eta_1, \dots \eta_s)$ شامل بردار های خطا است که اندازه ناموجه بودن در محدودیت های کنتـرل (۳) بـرای سـناریو s را انـدازه گیری می کند. در صورت موجه بودن مدل برای سناریو s , η_s برابر با صفر خواهد بود؛ در غیر این صـورت، η_s در محدودیت (۳) مقدار مثبتی خواهد بود. در مدل بالا، تابع هدف مدل اول $(\xi = c^T x + d^T y)$ که مـی

تواند تابع سود یا هزینه باشد، تبدیل به متغیر تصادفی به صورت $\xi_s = c^T x + d_s^T y_s$ می شود که متوسط آن به ازای سناریوها، سود یا هزینه مورد انتظار نامیده می شود.

در مدل بالا، تابع هدف دارای دو قسمت شامل استواری جواب و استواری مدل است که وزن قسمت اول با γ (گاما) و وزن قسمت دوم با ω (امگا) مشخص می شود.

در **قسمت اول** که استواری جواب را در نظر می گیرد، از ξ_s برای نمایش تابع هزینه یا سود $f(x, y_s)$ استفاده می کنیم. از این رو، $\xi_s = f(x, y_s)$ را برای سناریو s داریم. واریانس یا $\sigma(\bullet)$ بزرگ برای متغیر تصادفی $\xi_s = f(x, y_s)$ به معنی بالا بودن ریسک این جواب خواهد بود. در این صورت، یک تغییر کوچک در مقدار پارامترهای نادقیق مدل می تواند باعث یک تغییر بزرگ در مقدار تابع هدف شود. برای این قسمت، مالوی و همکاران از رابطه زیر استفاده کردند:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \gamma \sum_{s\in\Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2 \qquad (۵)$$

γ وزن تغییر پذیری جواب را نشان می دهد. در این عبارت، با عبارت درجه دوم $\sum_{s\in\Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2$ نیاز به عملیات محاسباتی زیادی داریم. برای حل این مشکل، از قدر مطلق انحرافات به جای عبارت بالا می توان استفاده کرد که به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \gamma \sum_{s\in\Omega} p_s \left| \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right| \qquad (۶)$$

با توجه به غیر خطی بودن فرم قدر مطلق انحرافات، می توان با معرفی دو متغیر انحرافی غیر منفی Q_s^+ و Q_s^-، فرم غیر خطی را به فرم خطی تبدیل کرد و به جای حداقل سازی قدر مطلق انحرافات، این دو متغیر را با در نظر گرفتن محدودیت های اصلی و محدودیت های اضافی، حداقل ساخت. این محدودیت اضافی باعث می شود اختلاف درون قدر مطلق مقدار مثبتی بگیرد. بر این اساس، مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی بالا به صورت خطی بازنویسی می شود:

$$\text{Min} \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \gamma \sum_{s\in\Omega} ps \left(Q_s^+ + Q_s^- \right) \qquad (۷)$$

$$\text{s.t.}\quad \xi_s - \sum_{s\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'} = Q_s^+ - Q_s^- \quad s\in\Omega \tag{8}$$

$$Q_s^+, Q_s^- \geq 0,\ s\in\Omega \tag{9}$$

روشن است که برای $\gamma > 0$، حداقل یکی از Q_s^+ و Q_s^- صفر خواهد شد. به عبارت دیگر، در صورت بزرگ بودن ξ_s از $\sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}$، Q_s^+ مقداری مثبت و Q_s^- برابر با صفر و در صورت کوچک تر بودن ζ_s از $\sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}$، Q_s^- مقداری مثبت و Q_s^+ و مقداری برابر با صفر خواهد بود. دقت کنید که $|\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}| = Q_s^+ + Q_s^-$ است.

به زعم یو و لی[8] (۲۰۰۰)، در روش خطی سازی بالا، با معرفی متغیرهای انحرافی غیر منفی، محدودیت های زیادی به مدل تحمیل می شود. برای این منظور، یو و لی از یک روش کارا برای خطی سازی فرم قدر مطلق انحرافات به صورت زیر استفاده کرده اند:

$$\text{Min}\ \sum_{s\in\Omega} p_s\xi_s + \gamma\sum_{s\in\Omega} p_s\left[\left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}\right) + 2\theta_s\right] \tag{10}$$

$$\text{s.t.}\quad \xi_s - \sum_{s\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'} + \theta_s \geq 0 \tag{11}$$

$$\theta_s \geq 0 \tag{12}$$

در **قسمت دوم**، از تابع جریمه $\left(\omega p\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s\right)\right)$، برای دادن جریمه به ناموجه بودن مدل استفاده می شود که استواری مدل را اندازه گیری می کند. ω وزن غیر موجه بودن مدل را نشان می دهد و با پارامتر γ تبادل بین استواری جواب و مدل را کنترل می کند. در مسئله ای که در ادامه آورده خواهد شد، η_s که ناموجه بودن مدل را نشان می دهد، تقاضای برآورده نشده در سناریو s خواهد بود. تابع جریمه، مقدار مورد انتظار بردار خطا η_s خواهد بود که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\rho(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s\eta_s \tag{13}$$

در نهایت، مدل برنامه‌ریزی استوار تصادفی به صورت زیر فرموله می شود:

---

[8] Yu and Lee

$$\text{Min} \;\; \sum_{s\in\Omega} p_s\xi_s + \gamma\sum_{s\in\Omega} p_s\left[\left(\xi_s - \sum_{s\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'}\right) + 2\theta_s\right] + \omega\sum_{s\in\Omega} p_s\eta_s \tag{۱۴}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \tag{۱۵}$$

$$B_s x + C_s y_s + \eta_s = e_s, \quad \forall s \in \Omega \tag{۱۶}$$

$$\xi_s - \sum_{s\in\Omega} p_{s'}\xi_{s'} + \theta_s \geq 0 \quad s \in \Omega \tag{۱۷}$$

$$\theta_s \geq 0, x \geq 0, y_s \geq 0, \eta_s \geq 0, \forall s \in \Omega,$$

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

نظریه بهینه سازی استوار چهارچوبی را برای مواجهه با عدم اطمینان پارامترها در مسائل بهینه سازی فراهم می سازد، به طوری که می توان جواب بهینه را برای وقوع عدم اطمینـان در یـک مجموعـه عـدم اطمینـان **کران دار** معین ایمن نگاه داشت. اولین گام در راستای توسعه نظریـه بهینـه سـازی اسـتوار را **سویسـتر**[۹] (۱۹۷۳) برداشته است. رویکرد سویستر برای مواجهه با عدم اطمینان ستون محور در فواصل پیشنهاد شـده است؛ این رویکرد بهترین نتایج ممکن را برای هر یـک از پارامترهـای نـادقیق در نظـر مـی گیـرد و جـواب استواری را ارائه می کند که برای همه داده های نادقیق موجه است؛ با این حال این جـواب **خیلی محافظه کارانه** است و مقدار تابع هدف را **خیلی بدتر** از تابع هدف با داده های اسمی ارائه می دهد.

بعد از دو دهه، بن تال و نمیروفسکی[۱۰] (۱۹۹۸) و ال قاوی[۱۱] و همکاران (۱۹۹۸) با معرفی مدل هایی بـرای مسائل خطی نادقیق با عدم اطمینان های بیضی و حال همتای مسـائل اسـمی در فـرم مسـائل درجـه دوم مخروطی، گامی موثر در این مسیر بر داشتند. بن تال و نمیروفسکی عدم اطمینان سطر محور با ساختار عدم اطمینان بیضی را برای اجتناب از سناریوی بد ترین مورد (که خیلی غیـر محتمـل اسـت) بررسـی کردنـد و

---

[۹] Soyster
[۱۰] Ben-tal and Nemirovski
[۱۱] El Ghaoui

همتای[۱۲] استواری جدیدی را برای مسئله برنامه‌ریزی خطی توسعه دادند که در آن یک حد بالایی برای تخطی از محدودیت در نظر گرفته می شود. رویکرد پیشنهادی نسبت به رویکرد سویستر **کمتر** محافظه کارانه، اما مدل حاصله **غیر خطی** بوده است و در نتیجه برای حل مدل های بهینه سازی **گسسته** استوار مستقیما کاربردی نیست.

برتسیماس و سیم[۱۳] (۲۰۰۴) رویکرد دیگری برای نمایش عدم اطمینان پارامترها توسعه داده اند. آن ها کران هایی را برای پارامترهای عدم اطمینان در نظر گرفتند که از مقدار اسمی خود متفاوت اند. این رویکرد خانواده ای از همتای استوار را ارائه می کند که ویژگی انعطاف پذیری دارد. رویکرد پیشنهادی این نویسندگان دارای ویژگی های زیر است:

۱. امکان تنظیم سطح حفاظت برای تبادل بین عملکرد و استواری وجود دارد.
۲. امکان محاسبه تضمین احتمال برای ارضای محدودیت ها وجود دارد، به طوری که این ضمانت احتمال به جواب مدل استوار وابسته نیست.
۳. این رویکرد برای مسائل بهینه سازی گسسته قابل استفاده است.

در بهینه سازی استوار مبتنی بر مجموعه های کراندار، فرض می شود داده های عدم اطمینان در یک مجموعه عدم اطمینان معین توزیع شده اند و هدف انتخاب بهترین جواب از بین جواب هایی است که در برابر عدم اطمینان داده ها مصون یا موجه هستند. توزیع های عدم اطمینان داده ها می تواند یکی از توزیع های پیوسته مانند توزیع یکنواخت، نرمال و گسسته مانند دوجمله ای و پواسن را به خود بگیرد.

مسئله بهینه سازی خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\sum_m c_m x_m + \sum_k d_k y_k \tag{۱۷}$$

$$\text{s.t.}\sum_m \tilde{a}_{im} x_m + \sum_k \tilde{b}_{ik} y_k \le \tilde{p}_i \qquad \forall i \tag{۱۸}$$

---

[۱۲] Counterpart
[۱۳] Bertsimas and Sim

$$\tilde{a}_{im} = a_{im} + \xi_{im}\hat{a}_{im}, \quad \forall m \in M_i \qquad (۱۹)$$

$$\tilde{b}_{ik} = b_{ik} + \xi_{ik}\hat{b}_{ik}, \quad \forall k \in K_i \qquad (۲۰)$$

$$\tilde{p}_i = p_i + \xi_{i0}p_i \qquad (۲۱)$$

متغیرهای x و y به ترتیب متغیرهای پیوسته و عدد صحیح هستند. M_i و K_i زیرمجموعه هایی هستند که به ترتیب متغیرهای پیوسته و گسسته را در بر دارند. ضرایب متغیرهای x و y در معرض عدم اطمینان قرار دارد. ξ پارامترهای نادقیق مستقلی هستند که در بازه [-۱, ۱] توزیع می شوند، iامین محدودیت مسئله اولیه بالا، محدودیت (۱۸)، به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sum_{m \notin M_i} a_{im}x_m + \sum_{k \notin K_i} b_{ik}y_k + \sum_{m \in M_i} \tilde{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} \tilde{b}_{ik}y_k \le \tilde{p}_i \qquad (۲۲)$$

بعد از این گروه بندی، قسمت عدم اطمینان به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \left\{ -\xi_{i0}\hat{p}_i + \sum_{m \in M_i} \xi_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} \xi_{ik}\hat{b}_{ik}y_k \right\} \le p_i \qquad (۲۳)$$

با یک مجموعه عدم اطمینان از پیش تعریف شده U برای متغیرهای تصادفی $\xi = \{\xi_{i0}, \xi_{im}, \xi_{ik}\}$، به دنبال جوابی هستیم که برای هر ξ در این مجموع موجه باقی بماند تا جواب را در برابر ناموجه بودن ایمن سازیم. یعنی داشته باشیم:

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \max_{\xi \in U} \left\{ -\xi_{i0}\hat{p}_i + \sum_{m \in M_i} \xi_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} \xi_{ik}\hat{b}_{ik}y_k \right\} \le p_i \qquad (۲۴)$$

در نهایت با جایگزین کردن محدودیت اولیه iام با محدودیت همتای استوار بالا، همتای استوار مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط اولیه به دست می آید:

$$\text{Max}\sum_m c_m x_m + \sum_k d_k y_k \qquad (۲۵)$$

$$\text{s.t.}\sum_m a_{im} x_m + \sum_k b_{ik} y_k + \qquad (۲۶)$$

$$\underset{\xi \in U}{\text{Max}}\left\{-\xi_{i0}\hat{p}_i + \sum_{m \in M_i} \xi_{im}\hat{a}_{im} x_m + \sum_{k \in K_i} \xi_{ik}\hat{b}_{ik} y_k\right\} \le p_i \forall i \qquad (۲۷)$$

مثال ۱: مسئله بهینه سازی خطی عدد صحیح مختلط زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } 3x_1 + 2x_2 - 10y_1 - 5y_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 20$$

$$x_1 + 2x_2 \le 12$$

$$a_{31}x_1 - b_{31}y_1 \le 0$$

$$a_{42}x_2 - b_{42}y_2 \le 0$$

$$x_1 - x_2 \le -4$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \le 10, y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

فرض کنید ضرایب سمت چپ محدودیت های سوم و چهارم در معرض عدم اطمینان قرار داشته باشند:

$$a_{31} = 1 + 0.1\xi_{31}, \qquad b_{31} = -20 + 2\xi_{33}$$

$$a_{41} = 1 + 0.1\xi_{41}, \qquad b_{41} = -20 + 2\xi_{44}$$

همتای استوار مسئله بالا را فرموله کنید.

حل:

با استفاده از فرموله سازی همتای استوار رابطه (۲۵) و با توجه به نبود نادقیقی در سمت راست محدودیت ها (یعنی $\hat{p}_i$)، همتای استوار محدودیت های سوم و چهارم به صورت زیر نوشته می شود:

$$x_1 - 20y_1 + \underset{\xi_{31},\xi_{33} \in U_1}{\text{Max}}\{0.1\xi_{31}x_1 + 2\xi_{33}y_1\} \le 0$$

$$x_2 - 20y_2 + \underset{\xi_{41},\xi_{44} \in U_2}{\text{Max}}\{0.1\xi_{42}x_2 + 2\xi_{44}y_2\} \le 0$$

U_1 و U_2 مجموعه های عدم اطمینان از پیش تعریف شده به ترتیب برای (ξ_{31}، ξ_{33}) و (ξ_{41}، ξ_{44}) هستند. فرموله سازی همتای استوار بالا مبتنی بر انتخاب مجموعه های عدم اطمینان U هستند. در ادامه، چندین مجموعه عدم اطمینان مختلف بررسی، سپس فرموله سازی همتای استوار آن ها توضیح داده می شود.

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای

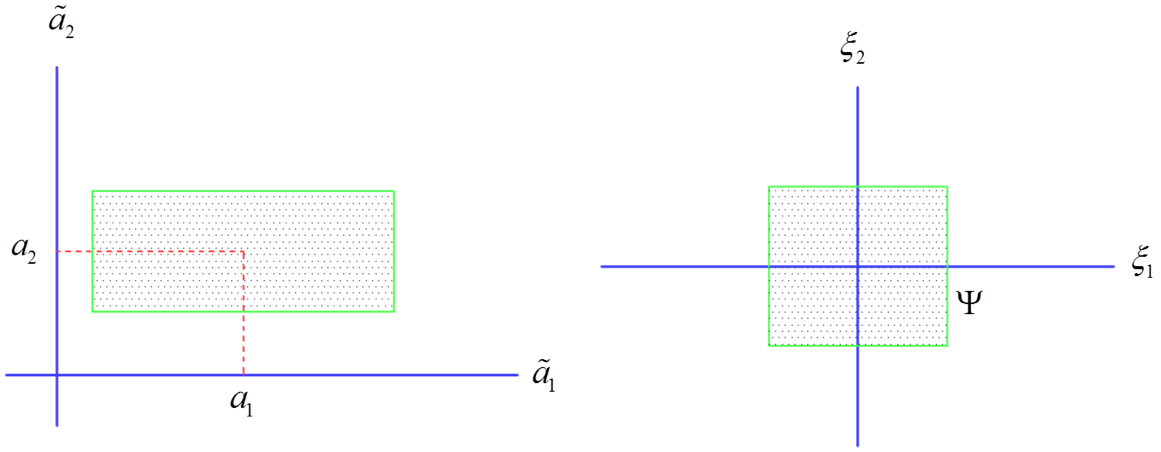
مجموعه عدم اطمینان جعبه ای با استفاده از نرم[۱۴] بی نهایت بردار داده عدم اطمینان به صورت زیر بیان می شود:

$$U_\infty = \left\{\xi \,|\, \|\xi\|_\infty \le \Psi\right\} = \left\{\xi \,|\, |\xi_j| \le \Psi, \forall j \in J_i\right\} \qquad (۲۸)$$

Ψ پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند.

اگر پارامترهای عدم اطمینان در فواصل معین $\tilde{a}_{ij} \in \left[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}\right] \forall j \in J_i$ محدود شده باشد، سپس عدم اطمینان به صورت $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij}\hat{a}_{ij}$ نشان داده می شود، به طوری که ξ_{ij} در بازه [۱- ,۱] توزیع می شود. وقتی $\Psi = 1$ (یعنی $U_\infty = \left\{\xi \,|\, |\xi_j| \le 1, \forall j \in J_i\right\}$) باشد، مجموعه عدم اطمینان فاصله ای را خواهیم داشت که یک مورد خاص از مجموعه عدم اطمینان جعبه ای است. شکل زیر این نوع مجموعه عدم اطمینان را نشان می دهد.

[۱۴] Norm



شکل ۱ - نمایش عدم اطمینان جعبه ای

توجه: برای مطالعه ادامه این درس شامل انواع مجموعه های غیرقطعی، مدلسازی همتای اســتوار مجموعه های غیرقطعی، رویکردهای استوار سویستر، بن تال و نیمروفسکی، و برتسیماس و سیم، و حل مثال های عددی با توضیح کامل، جزوه آموزشی این درس را از وب سایت گروه بهینه یـاب به نشانی www.behinehyab.com تهیه نمایید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**