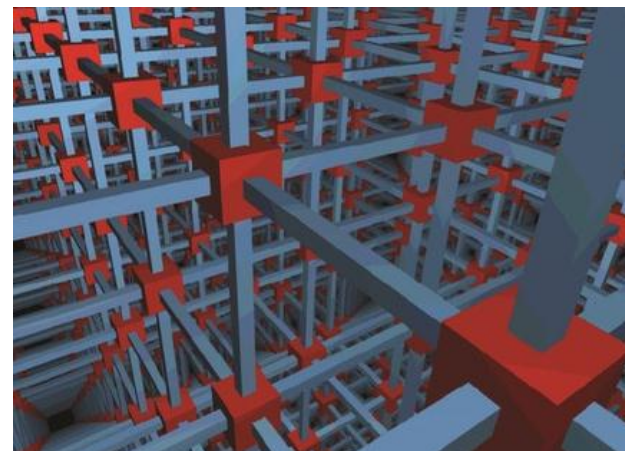
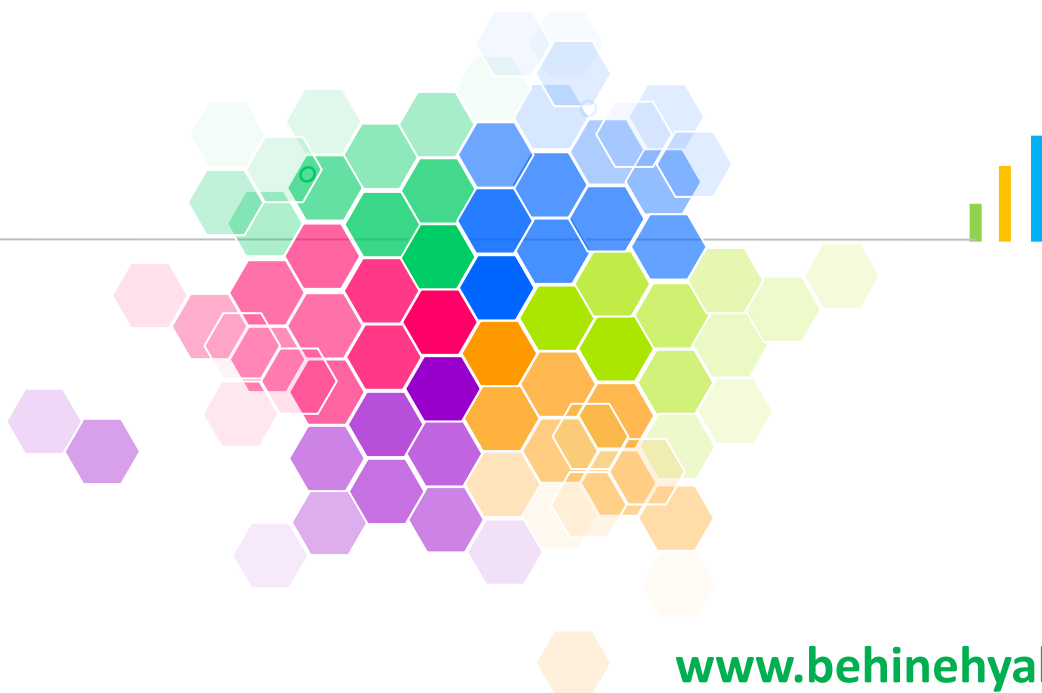


به نام خدا



درس ۲۹: بهینه سازی استوار



فهرست مطالب



مقدمه

۱

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

۲

مجموعه های عدم اطمینان

۳

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم اطمینان

۴

انواع رویکردهای بهینه سازی استوار

۵



مقدمه

در برنامه‌ریزی ریاضی معمولاً مسائل با پیش فرض قطعی بودن داده‌ها مدل‌سازی و حل می‌شوند. در این گونه مدل‌ها اثر عدم اطمینان داده‌ها در کیفیت و امکان‌پذیری جواب‌ها تأثیری **ندارد**، در نتیجه در مسائل دنیای واقعی ممکن است با تغییر یکی از داده‌ها، تعداد زیادی از محدودیت‌ها نقض و جواب به دست آمده **غیر بهینه** یا **حتی غیر ممکن** شود. از این رو، چالش اصلی در این گونه مسائل، رسیدن به پاسخ مسئله است که در مقابل عدم اطمینان داده‌ها **استوار** باشد. این دسته از مسائل بهینه‌سازی‌ها را مسائل بهینه‌سازی استوار یا **Robust Optimization** می‌نامند. به طور کلی می‌توان مدل‌های معرفی شده در زمینه برنامه‌ریزی استوار را به **دو فهرست** کلی تقسیم‌بندی کرد.

مقدمه

دسته اول مدل‌هایی است که مبتنی بر سناریوهای **گسسته** تعریف می‌شود. در این مدل‌ها مقدار تابع هدف در هر یک از سناریوها باید اختلاف کمی با یکدیگر داشته باشند.

دسته دوم نیز بر اساس مفهوم مجموعه‌های عدم اطمینان و مبتنی بر نوسان پارامترها در **یک بازه بسته** است. در این مدل‌ها، عدم اطمینان در شکل مجموعه‌های عدم اطمینان کران دار مدل‌سازی می‌شود و هدف به دست آوردن جواب است که نسبت به تقریباً تمام پارامترهای عدم اطمینان حساسیت نداشته باشد.

مقدمه

نکته: در این نظریه یک راه حل برای یک مسئله بهینه سازی در صورتی استوار است که هم استوار موجه (استواری مدل) و هم استوار بهینه (استواری جواب) باشد.

استواری موجه به این معنی است که راه حل باید در محدودیت های مسئله برای تقریباً تمامی سناریوها موجه باقی بماند.

استواری بهینگی نیز به این معنی است که مقدار تابع هدف برای جواب مسئله باید نزدیک به مقدار بهینه باقی بماند یا دارای حداقل انحرافات نامطلوب از مقدار بهینه برای هر یک از مقادیر سناریوها باشد.

مقدمه

در تابع هدف مدل مالوی و همکاران برای استواری مدل و استواری جواب دارای جریمه هستیم که با توجه به ترجیح مدل ساز به هر یک از این **جریمه ها** وزن اختصاص می دهیم. روشن است که در این مدل، با توجه به ترجیحات تصمیم گیرنده، بین **استواری جواب** و **استواری مدل** باید تبادل صورت گیرد.

مقدمه

مدل برنامه ریزی خطی با پارامترهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } c^T x + d^T y$$

$$\text{s.t. } Ax = b,$$

$$Bx + Cy = e$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

متغیر x و متغیر y بردارهای تصمیم گیری هستند. پارامترهای

A ، B و C ماتریس پارامترها و b و e نیز بردار پارامترها هستند. همچنین A و b مشخص و B ، C و

e نادقیق هستند.

مقدمه

تحقق هر مقدار برای پارامتر نادقیق یک سناریو نامیده می شود، که با s نشان داده و احتمال آن با p_s آورده می شود ($\sum_{s=1}^S p_s = 1$). برای نمایش مجموعه سناریوها از $\Omega = \{1, 2, \dots, S\}$ استفاده می کنیم.

ضرایب نادقیق B, C و e را نیز به صورت B_s, C_s و e_s برای هر سناریو $s \in \Omega$ نشان می دهیم.

مقدمه

همچنین، متغیر y نیز که در زمان تحقق یک سناریو در معرض تعدیل قرار می‌گیرد، به صورت y_s برای سناریو s نشان داده می‌شود. مدل بهینه سازی استوار تصادفی به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Min } \gamma \sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) + \omega p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) \quad (۱)$$

$$\text{s.t. } Ax = b, \quad (۲)$$

$$B_s x + C_s y_s + \eta_s = e_s, \quad \forall s \in \Omega, \quad (۳)$$

$$x \geq 0, y_s \geq 0, \eta_s, \quad \forall s \in \Omega, \quad (۴)$$

مقدمه

به دلیل نادقیق بودن پارامترها، مدل ممکن است برای برخی سناریوها ناموجه باشد. مجموعه $(\eta_1, \dots, \eta_s)$ شامل بردارهای خطا است که اندازه ناموجه بودن در محدودیت‌های کنترل (۳) برای سناریو s را اندازه‌گیری می‌کند. در صورت موجه بودن مدل برای سناریو s ، η_s برابر با صفر خواهد بود؛ در غیر این صورت، η_s در محدودیت (۳) مقدار غیرصفر خواهد بود.

مقدمه

در مدل قبلی تابع هدف دارای دو قسمت شامل استواری جواب و استواری مدل است که وزن **قسمت**

اول با γ (گاما) و وزن **قسمت دوم** با ω (امگا) مشخص می شود.

در **قسمت اول** که استواری جواب را در نظر می گیرد، از ξ_s برای نمایش تابع هزینه یا سود برای سناریو s بهره می بریم. انحراف معیار یا $\sigma(\bullet)$ بزرگ برای متغیر تصادفی ξ_s به معنی بالا بودن ریسک این جواب خواهد بود. در این صورت، یک تغییر کوچک در مقدار پارامترهای نادقیق مدل می تواند باعث یک تغییر بزرگ در مقدار تابع هدف شود.

مقدمه

برای این قسمت، مالوی و همکاران از رابطه زیر استفاده کردند:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s \in \Omega} p_s \xi_s + \alpha \sum_{s \in \Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2 \quad (5)$$

α وزن تغییر پذیری جواب را نشان می دهد. در این عبارت، با عبارت **درجه دوم**

$\sum_{s \in \Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2$ نیاز به عملیات محاسباتی زیادی داریم. برای حل این مشکل، از **قدر مطلق**

انحرافات به جای عبارت بالا می توان استفاده کرد که به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s \in \Omega} p_s \xi_s + \alpha \sum_{s \in \Omega} p_s \left| \xi_s - \sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right| \quad (6)$$

مقدمه

با توجه به غیر خطی بودن فرم قدر مطلق انحرافات، می توان با معرفی دو متغیر غیر منفی Q_s^+ و Q_s^- ، فرم غیر خطی را به فرم خطی تبدیل کرد و به جای حداقل سازی قدر مطلق انحرافات، مجموع این دو متغیر حداقل ساخت. بر این اساس، مسئله برنامه ریزی **غیر خطی** بالا به صورت **خطی** بازنویسی می شود:

$$\text{Min } \sum_{s \in \Omega} p_s \xi_s + \gamma \sum_{s \in \Omega} p_s (Q_s^+ + Q_s^-) \quad (7)$$

$$\text{s.t. } \xi_s - \sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'} = Q_s^+ - Q_s^- \quad s \in \Omega \quad (8)$$

$$Q_s^+, Q_s^- \geq 0, s \in \Omega \quad (9)$$

مقدمه

روشن است که برای $\alpha > 0$ حداقل یکی از Q_s^- و Q_s^+ صفر خواهد شد. به عبارت دیگر، در صورت

بزرگ بودن ξ_s از $\sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'}$ ، Q_s^+ مقداری مثبت و Q_s^- برابر با صفر و در صورت کوچک تر بودن ξ_s

از $\sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'}$ ، Q_s^- مقداری مثبت و Q_s^+ و مقداری برابر با صفر خواهد بود. دقت کنید که

$$|\xi_s - \sum_{s' \in \Omega} p_{s'} \xi_{s'}| = Q_s^+ + Q_s^- \text{ است.}$$

مقدمه

در **قسمت دوم**، از تابع جریمه $(\omega p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s))$ ، برای دادن جریمه به ناموجه بودن مدل استفاده می شود که استواری مدل را اندازه گیری می کند. ω وزن غیر موجه بودن مدل را نشان می دهد و با پارامتر γ تبادل بین استواری جواب و مدل را کنترل می کند. تابع جریمه، مقدار مورد انتظار بردار خطا η_s خواهد بود که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\rho(\bullet) = \sum_{s \in \Omega} p_s \eta_s$$

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

نظریه بهینه سازی استوار چهارچوبی را برای مواجهه با عدم اطمینان پارامترها در مسائل بهینه سازی فراهم می سازد، به طوری که می توان جواب بهینه را برای وقوع عدم اطمینان در یک مجموعه عدم اطمینان **کران دار** معین ایمن نگاه داشت. اولین گام در راستای توسعه نظریه بهینه سازی استوار را **سویستر**^۲ (۱۹۷۳) برداشته است. رویکرد سویستر برای مواجهه با عدم اطمینان ستون محور در فواصل پیشنهاد شده است؛ این رویکرد بهترین نتایج ممکن را برای هر یک از پارامترهای نادقیق در نظر می گیرد و جواب استواری را ارائه می کند که برای همه داده های نادقیق موجه است؛ با این حال این جواب خیلی محافظه کارانه است

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

بعد از دو دهه، بن تال و نمیروفسکی (۱۹۹۸) و ال قاوی و همکاران (۱۹۹۸) با معرفی مدل هایی برای مسائل خطی نادقیق یا تصادفی و حل همتای مسائل اسمی در فرم مسائل درجه دوم مخروطی، گامی موثر در این مسیر برداشتند. بن تال و نمیروفسکی عدم اطمینان سطر محور را برای اجتناب از سناریوی بدترین مورد (که خیلی غیر محتمل است) بررسی کردند و **همتای** استواری جدیدی را برای مسئله برنامه ریزی خطی توسعه دادند که در آن یک حد بالایی برای تخطی از محدودیت در نظر گرفته می شود. رویکرد پیشنهادی نسبت به رویکرد سویستر **کمتر** محافظه کارانه، اما مدل حاصله **غیر خطی** بوده است و در نتیجه برای حل مدل های بهینه سازی **گسسته** استوار مستقیماً کاربردی نیست.

مبانی مدل سازی بهینه سازی استوار

برتسیماس و سیم^۶ (۲۰۰۴) رویکرد دیگری برای نمایش عدم اطمینان پارامترها توسعه داده اند. آن ها کران هایی را برای پارامترهای عدم اطمینان در نظر گرفتند که از مقدار اسمی خود متفاوت اند. این رویکرد خانواده ای از همتای استوار را ارائه می کند که ویژگی انعطاف پذیری دارد. رویکرد پیشنهادی این نویسندگان دارای ویژگی های زیر است:

۱. امکان تنظیم سطح حفاظت برای تبادل بین عملکرد و استواری وجود دارد.
۲. امکان محاسبه تضمین احتمال برای ارضای محدودیت ها وجود دارد،
۳. این رویکرد برای مسائل بهینه سازی گسسته قابل استفاده است.

مجموعه های عدم اطمینان

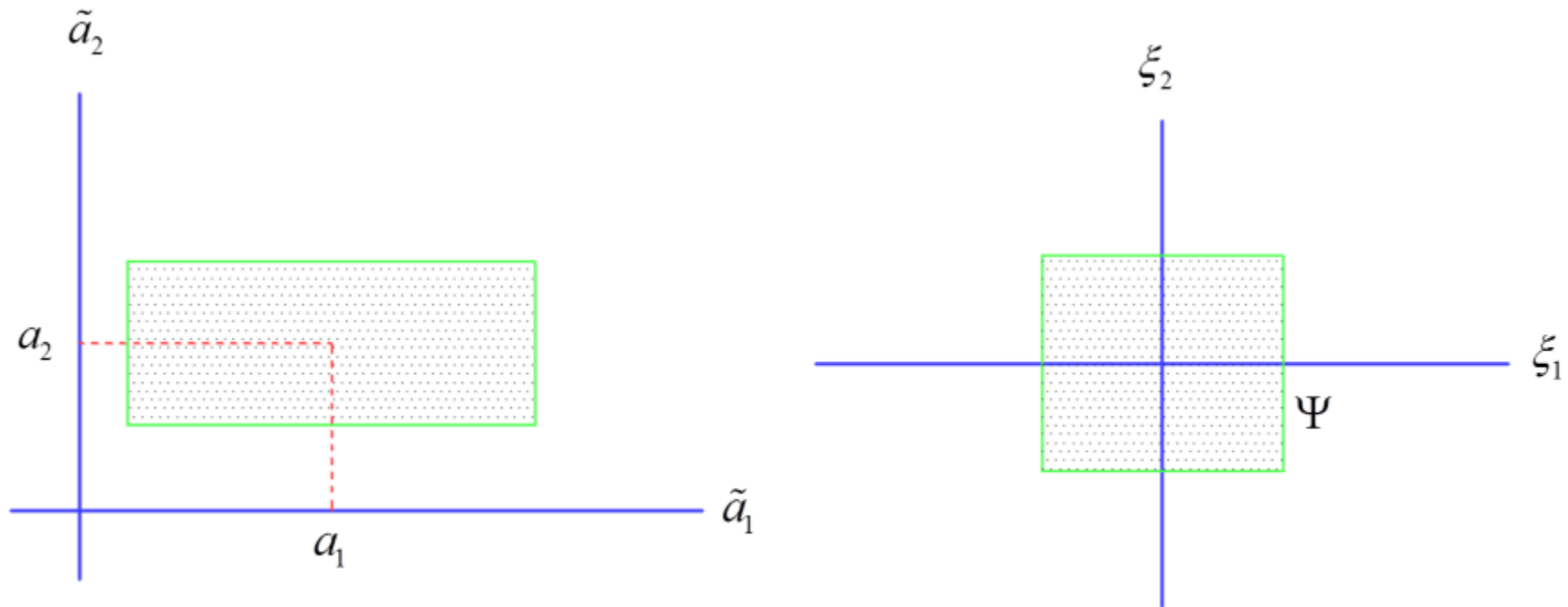
مجموعه عدم اطمینان جعبه ای

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای با استفاده از نرم بی نهایت بردار عدم اطمینان به صورت زیر بیان می شود:

$$U_{\infty} = \{\xi \mid \|\xi\|_{\infty} \leq \Psi\} = \{\xi \mid \xi_j \leq \Psi, \forall j \in J_i\} \quad (28)$$

Ψ پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند.

مجموعه های عدم اطمینان



شکل ۱ - نمایش عدم اطمینان جعبه ای

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان بیضی

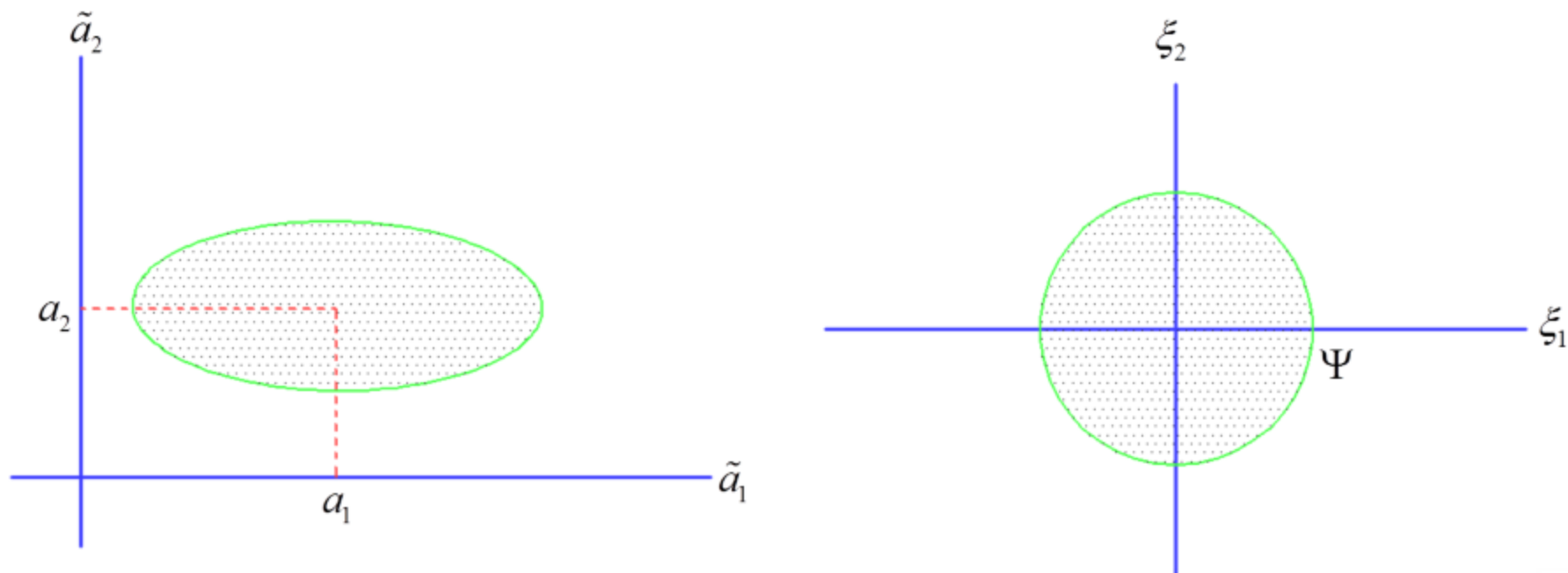
مجموعه عدم اطمینان بیضی با استفاده از نرم دوم بردار داده عدم اطمینان بیان می شود که رابطه ریاضی آن به صورت زیر است:

$$U_2 = \{\xi \mid \|\xi\|_2 \leq \Omega\} = \left\{ \xi \mid \sqrt{\sum_{j \in J_1} \xi_j^2} \leq \Omega \right\} \quad (29)$$

Ω پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند. توجه داشته

باشد که نرم $\|\cdot\|_2$ همان نرم استاندارد اقلیدسی است به طوریکه $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ است.

مجموعه های عدم اطمینان



شکل ۲- نمایش عدم قطعیت بیضوی

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان چند وجهی

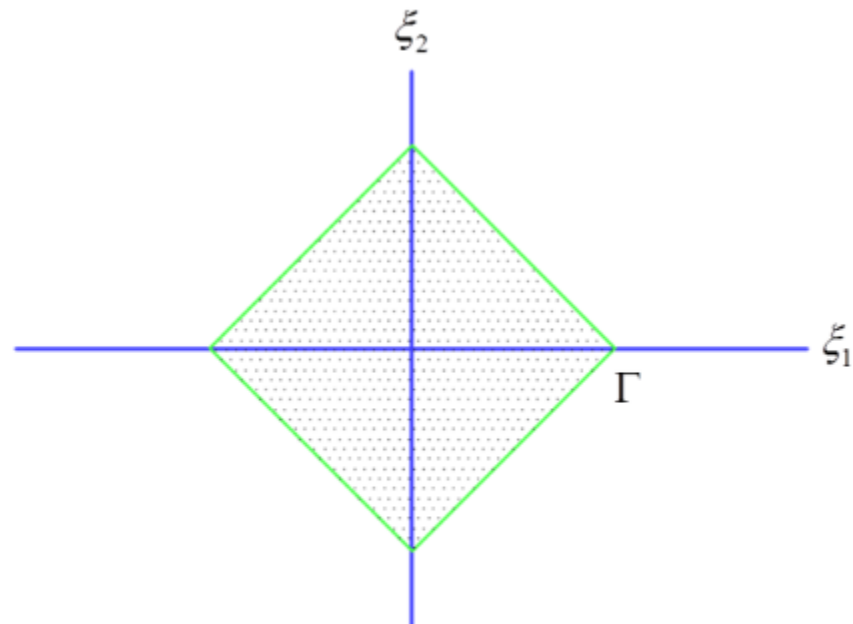
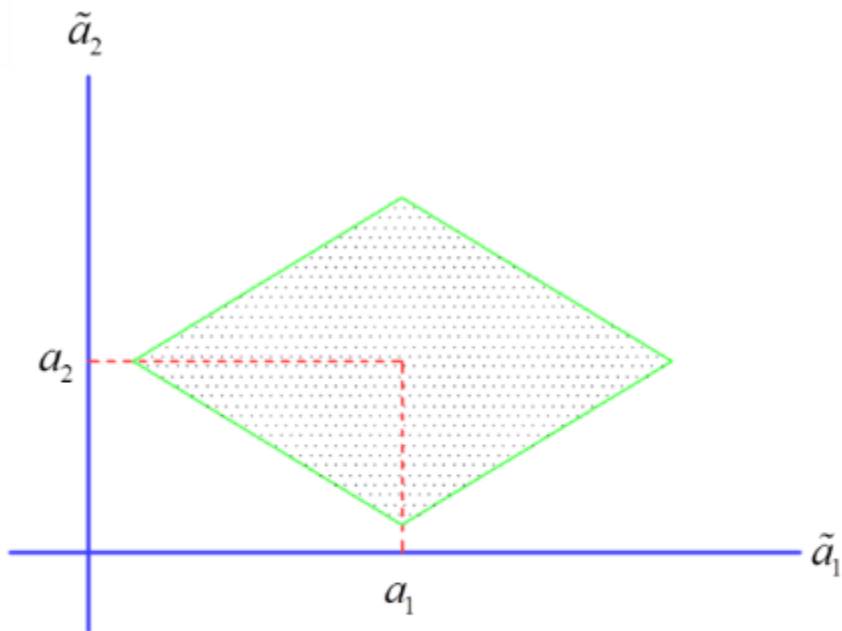
مجموعه عدم اطمینان چندوجهی با استفاده از نرم یک بردار داده عدم اطمینان نشان داده می شود.

$$U_1 = \{ \xi \mid \|\xi\|_1 \leq \Gamma \} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_1} |\xi_j| \leq \Gamma \right\} \quad (30)$$

Γ پارامتر قابل تنظیم است که اندازه مجموعه عدم اطمینان را کنترل می کند.

. نمایش این مجموعه عدم اطمینان به صورت شکل زیر می شود.

مجموعه های عدم اطمینان



شکل ۳ - نمایش عدم اطمینان چندوجهی

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی

این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین یک بیضی و جعبه است که به صورت زیر تعریف می شود:

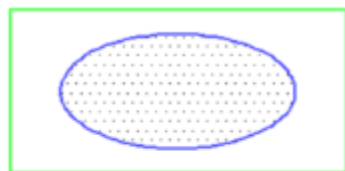
$$U_{2 \cap \infty} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2, |\xi_j| \leq \psi, \forall j \in J_i \right\} \quad (31)$$

برای اطمینان از وجود اشتراک این دو مجموعه (جعبه ای و بیضی) به هر یک از آن ها محدود نمی شود، پارامترها باید رابطه زیر را اقناع کنند:

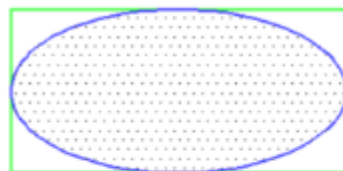
$$\psi \leq \Omega \leq \psi \sqrt{|J_i|} \quad (32)$$

مجموعه های عدم اطمینان

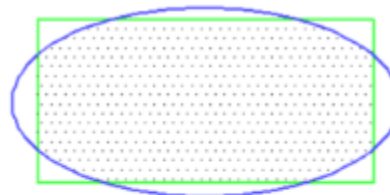
نکته: وقتی $\psi = 1$ باشد، مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضوی به صورت زیر می شود.



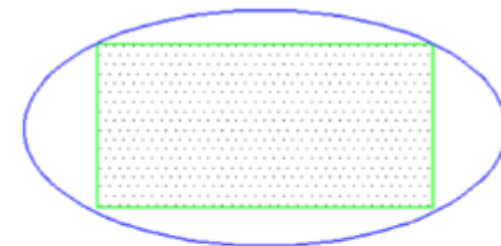
$$0 < \Omega < 1$$



$$\Omega = 1$$



$$1 < \Omega < \sqrt{|J_i|}$$



$$\Omega = \sqrt{|J_i|}$$

شکل ۴ - نمایش عدم اطمینان جعبه ای + بیضوی

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چند وجهی

این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین مجموعه چند وجهی و فاصله ای است

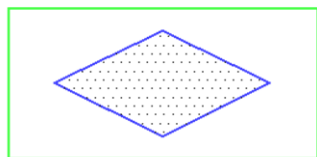
$$U_{I \cap \infty} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma, |\xi_j| \leq \psi, \forall j \in J_i \right\} \quad (33)$$

واضح است که برای یک جعبه و یک چند وجهی ای که قابل تنظیم هستند، اشتراک بین آن ها به

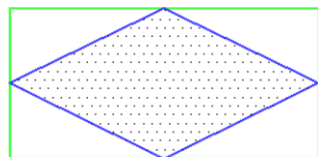
هیچ یک از آن ها کاهش نمی یابد، اگر پارامترها رابطه زیر اقناع کنند:

$$\psi \leq \Gamma \leq \psi |J_i| \quad (34)$$

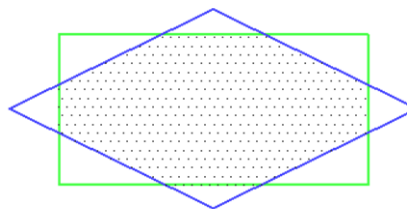
مجموعه های عدم اطمینان



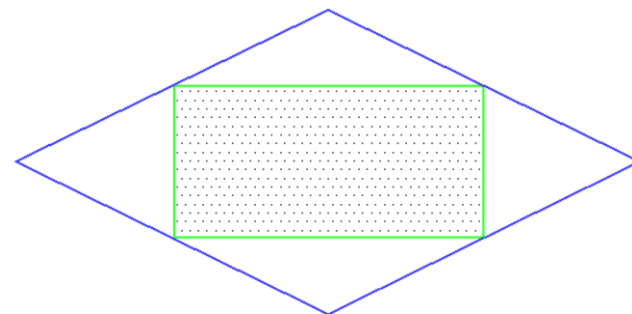
$$0 < \Gamma < 1$$



$$\Gamma = 1$$



$$1 < \Gamma < |J_i|$$



$$\Gamma = |J_i|$$

شکل ۵ - مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چندوجهی

مجموعه های عدم اطمینان

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی + چندوجهی

این نوع از مجموعه عدم اطمینان اشتراک بین مجموعه بیضی، چند وجهی و جعبه ای است که به

صورت زیر تعریف شده است:

$$U_{1 \cap 2 \cap \infty} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_1} |\xi_j| \leq \Gamma, \sum_{j \in J_1} \xi_j^2 \leq \Omega^2, |\xi_j| \leq \psi, \forall j \in J_1 \right\} \quad (35)$$

مشخص است که اشتراک بین جعبه و یک چند وجهی و بیضی به هیچ یک از آن ها کاهش نمی یابد،

اگر پارامترهای قابل تنظیم رابطه زیر را اقناع کنند:

$$\Psi \leq \Omega \leq \psi |J_1|$$

$$\Omega \leq \Gamma \leq \Omega |J_1|$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت

هر گاه فقط مقادیر سمت چپ در محدودیت i نادقیق باشند، محدودیت های استوار به فرم زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij}x_j \right\} \leq p_i \quad (38)$$

همتای استوار این محدودیت برای انواع مختلف عدم اطمینان به صورت زیر معرفی شده است:

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت

۱. اگر مجموعه U مجموعه عدم اطمینان جعبه ای باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با رابطه بالا معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \leq p_i \quad (39)$$

۲. اگر مجموعه U مجموعه عدم اطمینان بیضی باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \leq p_i \quad (40)$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت

نکته: روشن است که با افزایش مقدار پارامتر عدم اطمینان Ψ و Ω ، یعنی افزایش اندازه مجموعه

عدم اطمینان، مجموعه موجه مسئله بهینه سازی همتای استوار حاصله کوچک می شود.

۳. اگر مجموعه U مجموعه عدم اطمینان چندوجهی باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن

معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma z_i \leq p_i \quad (41)$$

$$z_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i \quad (42)$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت

۴. اگر مجموعه U مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + بیضی باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j - z_{ij}| + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \leq p_i \quad (43)$$

۵. اگر مجموعه U مجموعه عدم اطمینان جعبه ای + چندوجهی باشد، سپس محدودیت استوار متناظر با آن معادل محدودیت زیر خواهد بود:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \leq p_i \quad (44)$$

$$z_i + w_{ij} \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \quad \forall j \in J_i \quad (45)$$

$$z_i \geq 0, w_{ij} \geq 0 \quad (46)$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت



مثال ۲: مسئله بهینه سازی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

برای مقدار اسمی پارامترهای مدل داریم:

$$[c_1 \ c_2] = [8 \ 12], \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 72 \end{bmatrix}$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت



نسخه نادقیق مسئله برنامه ریزی خطی بالا به صورت زیر است:

$$\text{Max } \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$$

$$\text{s.t. } \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 \leq \tilde{b}_1$$

$$\tilde{a}_{21} x_1 + \tilde{a}_{22} x_2 \leq \tilde{b}_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

عدم اطمینان پارامترهای مسئله بالا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{c}_j = c_j + \hat{c}_j \xi_{i0}, j=1,2$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \hat{a}_{ij} \xi_{ij}, i=1,2 j=1,2$$

$$\tilde{b}_i = b_i + \hat{b}_i \xi_i, i=1,2$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت

که $\hat{a}_{ij} = 0.1a_{ij}$ ، $\hat{b}_j = 0.1b_j$ ، $\hat{c}_j = 0.1c_j$ انحراف از مقدار اسمی خود را نشان می دهند و

$\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_1, \xi_2$ متغیر های تصادفی مستقل هستند.

وقتی هم زمان مقادیر سمت چپ (LHS)، سمت راست (RHS) و مقادیر تابع هدف (OBJ) را

نادقیق در نظر بگیریم، ابتدا عدم اطمینان تابع هدف را به عدم اطمینان محدودیت تبدیل می کنیم و

سپس همتای استوار مبتنی بر مجموعه عدم اطمینان های مختلف را فرموله می کنیم؛ همتای استوار

مبتنی بر مجموعه عدم اطمینان جعبه ای، بیضی و چندوجهی به صورت زیر فرموله شده است. برای

مجموعه های دیگر نیز به همین ترتیب می توان همتای استوار آن ها را فرموله کرد.

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت



Max z

$$\text{s.t. } z - 8x_1 - 12x_2 + \Psi(0.8x_1 + 1.2x_2) \leq 0$$

$$10x_1 + 20x_2 + \Psi(x_1 + 2x_2 + 14) \leq 140$$

$$10x_1 + 20x_2 + \Psi(0.6x_1 + 0.8x_2 + 7.2) \leq 72$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مجموعه عدم اطمینان جعبه ای

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت



Max z

$$\text{s.t } z - 8x_1 - 12x_2 + \Omega\sqrt{0.64x_1^2 + 1.44x_2^2} \leq 0$$

مجموعه عدم اطمینان بیضی

$$10x_1 + 20x_2 + \Omega\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 196} \leq 140$$

$$10x_1 + 20x_2 + \Omega\sqrt{0.36x_1^2 + 0.64x_2^2 + 51.81} \leq 172$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مدل استوار مبتنی بر مجموعه های عدم قطعیت



Max z

$$\text{s.t. } z - 8x_1 - 12x_2 + \Gamma z_1 \leq 0$$

$$z_1 \geq 0.8x_1, z_1 \geq 1.2x_2$$

$$10x_1 + 20x_2 + \Gamma z_2 \leq 140$$

$$z_2 \geq x_1, z_2 \geq 2x_2, z_2 \geq 14$$

$$10x_1 + 20x_2 + \Gamma z_3 \leq 72$$

$$z_3 \geq 0.6x_1, z_3 \geq 0.8x_2, z_3 \geq 7.2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مجموعه عدم اطمینان چندوجهی

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma z_i \leq p_i$$

$$z_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

پارادایم کلاسیک در برنامه‌ریزی ریاضی، توسعه مدل با فرض شناخته بودن داده ها و برابر با داده های اسمی است. با این حال این رویکرد تأثیر عدم اطمینان داده ها را روی کیفیت و موجه بودن مدل در نظر نمی گیرد. روشن است که در صورت متفاوت بودن این مقدار داده ها از داده های اسمی، ممکن است از چندین محدودیت تخطی کنیم و جواب بهینه که با این داده ها یافت شد، دیگر بهینه یا حتی موجه نباشد.

در این بخش، سه رویکرد بهینه سازی **سویستر**، **بن تال** و **نیمروفسکی**، و **سیم** و **برتیسماس** بررسی می شود.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



مسئله برنامه‌ریزی خطی اسمی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } c^T x \quad (47)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$l \leq x \leq u$$

در رابطه بالا، فرض کنید عدم اطمینان داده ها فقط عناصر ماتریس A را متاثر می سازد. همچنین

فرض کنید تابع هدف در معرض عدم اطمینان قرار نداشته باشد؛ با توجه به حداکثر سازی تابع

هدف z ، محدودیت $z - c^T x \leq 0$ را به محدودیت های مدل $Ax \leq b$ می توان اضافه کرد.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

برای سطر i از ماتریس A ، J_i را مجموعه عدم اطمینان در سطر i در نظر بگیرید که در معرض عدم اطمینان قرار دارد. در سطر i ، هر درایه $\tilde{a}_{ij}$ ($j \in J_i$) را می توان به صورت یک پارامتر مستقل، متقارن و کران دار مدل سازی کرد، به طوری که مقداری در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ بگیرد. a_{ij} و $\hat{a}_{ij}$ به ترتیب مقدار اسمی و حداکثر انحراف از مقدار اسمی را نشان می دهند.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

فرض قطعی بودن c و b هیچ خللی به کلیت مسئله وارد نمی کند؛ چرا که اگر در تابع هدف، پارامترهای نادقیق داشته باشیم، تابع هدف نیز به راحتی قابل تبدیل شدن به یک محدودیت است. همچنین در صورتی که بردار b غیر قطعی باشد، همانند پارامترهای سمت چپ با آن رفتار می شود، به نحوی که می توان فرض کرد در یک متغیر با مقدار ثابت یک ضرب شده باشد

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

مدل سویستر (۱۹۷۸)

سویستر یک مدل بهینه سازی خطی ارائه کرد که در آن جواب مدل برای کلیه داده های ورودی موجه بودند، به طوری که هر داده عدم اطمینان به صورت مستقل موجه است. که مدل استوار (۴۷)

به صورت زیر است:

$$\text{Max } c^T x$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1} a_{ij}x_j + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij}y_i \leq b_i \quad \forall i$$

$$-y_i \leq x_j \leq y_j \quad \forall i$$

$$l \leq x \leq u$$

$$y \geq 0$$

(۴۸)

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

x^* را جواب بهینه مدل بالا در نظر بگیرید. روشن است که در حالت بهینه، $|x_j^*| = y_j$ است؛ از این رو خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leq b_i \quad \forall i \quad (49)$$

سویستر نشان داد که به ازای هر مقدار ممکن برای داده عدم اطمینان $\tilde{a}_{ij}$ ، جواب به دست آمده موجه باقی می ماند؛ از این رو این جواب، جوابی استوار است و داریم:

$$\sum_{j=1} \tilde{a}_{ij}x_j^* = \sum_{j=1} a_{ij}x_j^* + \sum_{j=1} \eta_{ij} \hat{a}_{ij}x_j^* \leq \sum_{j=1} a_{ij}x_j^* + \sum_{j=J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leq b_i \quad \forall i \quad (50)$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



مثال ۳: مسئله برنامه ریزی خطی با داده های اسمی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 \leq 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 240,$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

کلیه ضرایب متغیرها در محدودیت ها نادقیق هستند. حداکثر انحراف از مقدار اسمی در محدودیت

اول (۱ و ۰/۵) برای متغیرهای x_1 و x_2 و در محدودیت دوم (۵/۰ و ۱) برای متغیرهای x_1 و x_2

است. با کمک رویکرد سویستر مسئله را مدل سازی و حل کنید.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



حل:

مسئله بالا به صورت زیر فرموله بندی می شود:

$$\text{Max } 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 + y_1 + 0.5y_2 \leq 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 + 0.5y_1 + y_2 \leq 240,$$

$$-y_1 \leq x_1 \leq y_1$$

$$-y_2 \leq x_2 \leq y_2$$

$$x, y \geq 0$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

جواب بهینه و مقدار آن در جدول زیر آمده است:

y_2	y_1	x_2	x_1	Z	
-	-	۱۷/۳۹	۲۹/۵۶	۱۱۱۳/۰۴	مدل اسمی
۱۶/۷۴	۲۳/۵۶	۱۶/۷۴	۲۳/۵۶	۹۷۳/۶۴	مدل سویستر

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

مدل بن تال و نمیروفسکی (۲۰۰۱)

در رویکرد سویستر علاوه بر سطح محافظه کاری بالا، در جواب به دست آمده از این رویکرد، مقدار تابع هدف خیلی **بدتری** را در مقایسه با تابع هدف جواب مسئله بهینه سازی **اسمی** به دست می دهد. برای این منظور، الگوریتم های کارایی از جمله روش بن تال و نمیروفسکی برای حل مسائل بهینه سازی **محدب** با داده های عدم اطمینان پیشنهاد شده است. با این حال، فرموله سازی استوار حاصله شامل مسائل درجه دوم مخروطی^۹ است، در نتیجه برای بهینه سازی گسسته قابل استفاده نیست.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

بن تال و نمیروفسکی مسئله استوار زیر را پیشنهاد کردند:

$$\text{Max } c^T x \quad (51)$$

$$\text{s.t. } \sum_j a_{ij}x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}y_j + \Omega_i \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \leq b_i \quad \forall i \quad (52)$$

$$-y_{ij} \leq x_j - z_{ij} \leq y_{ij} \quad \forall i, j \in J_i \quad (53)$$

$$l \leq x \leq u \quad (54)$$

$$y \geq 0 \quad (55)$$

آن ها نشان دادند که احتمال نقض محدودیت i ، حداکثر $\exp\left(-\frac{\Omega_i^2}{2}\right)$ است. مدل استوار بالا نسبت

به مدل سویستر کمتر محافظه کارانه است.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

فرض کنید ماتریس اسمی $A_{m \times n}$ دارای k ضریب باشد که دارای عدم اطمینان است. با توجه به اینکه مسئله اسمی اولیه، دارای n متغیر و m محدودیت است، مدل سویستر یک مسئله بهینه سازی خطی با n متغیر و $m+2n$ محدودیت است. در مقابل مدل (۵۵-۵۱) یک مسئله مخروطی درجه دو با $n+2k$ متغیر و $m+2k$ محدودیت است. با توجه به غیر خطی بودن مدل، این مدل برای حل مدل های بهینه سازی گسسته استوار قابل استفاده نیست.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

مثال ۴: یک کارخانه تولید فولاد می تواند سه نوع فولاد تولید کند. زمان مورد نیاز، هزینه تولید و

سود هر تن از محصولات در جدول زیر آمده است:

C	B	A	
۵	۱۰	۸	هزینه تولید هر تن
۸	۶	۴	زمان مورد نیاز برای تولید هر تن
۱۰	۲۰	۱۵	سود هر تن

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



بودجه این کارخانه ۲۰۰ واحد و کل زمان در دسترس ۱۲۰ واحد است. مسئله را به گونه ای مدل سازی کنید که با توجه به بودجه و زمان در دسترس سود کل حاصل از تولید محصولات حداکثر شود.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



اگر متغیرهای آن x_1 , x_2 و x_3 به ترتیب میزان تولید فولاد از نوع A, B و C باشد، مدل قطعی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } 15x_1 + 20x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t. } 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 200,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 120,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



بررسی های مدیریت نشان می دهد حداکثر انحراف از مقدار اسمی هزینه تولید برای محصولات A،

B و C به ترتیب ۱، ۲ و ۰/۵ و حداکثر انحراف مقدار اسمی زمان تولید برای هر یک از این محصولات به

ترتیب ۰/۵، ۱ و ۲ است. با فرض اینکه احتمال نقض محدودیت های بالا به ترتیب ۰/۲۵ و ۰/۱۵

باشد، مدل همتای استوار این مسئله را با روش بن تال و نمیروفسکی بنویسید و آن را حل کنید.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

حل:

اگر حداکثر احتمال نقض هر محدودیت برابر با $\exp\left(-\frac{\Omega_1^2}{2}\right)$ باشد. از این رو داریم:

$$\exp\left(-\frac{\Omega_1^2}{2}\right) = 0.25 \Rightarrow \Omega_1 = 1.36$$

$$\exp\left(-\frac{\Omega_2^2}{2}\right) = 0.15 \Rightarrow \Omega_2 = 1.9$$

با توجه به اینکه همه ضرایب فنی غیر قطعی و به صورت بازه ای، تعریف شده اند، بنابراین مدل بن

تال و نمیروفسکی به صورت زیر تعریف می شود:

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



$$\text{Max } 15x_1 + 20x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t. } 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 + y_{11} + 2y_{12} + 0.5y_{13} + 1.26 \left[z_{11}^2 + 4z_{12}^2 + 0.25z_{13}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq 200$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0.5y_{21} + y_{22} + 2y_{23} + 1.9 \left[0.25z_{21}^2 + z_{22}^2 + 4z_{23}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq 120$$

$$-y_{11} \leq x_1 - z_{11} \leq y_{11}$$

$$-y_{12} \leq x_2 - z_{12} \leq y_{12}$$

$$-y_{13} \leq x_3 - z_{13} \leq y_{13}$$

$$-y_{21} \leq x_1 - z_{21} \leq y_{21}$$

$$-y_{22} \leq x_2 - z_{22} \leq y_{22}$$

$$-y_{23} \leq x_3 - z_{23} \leq y_{23}$$

$$x_i, y_{ij} \geq 0$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

مقدار جواب بهینه	متغیر تصمیم	مقدار جواب بهینه	متغیر تصمیم
۵/۵	y_{22}	۳۴۰/۲	مقدار تابع هدف
۱/۷	y_{23}	۱۱۴/۲	x_1
•	z_{11}	۵/۵	x_2
•	z_{12}	۱/۷	x_3
•	z_{13}	۲/۷	y_{11}
۱۴/۲	z_{21}	•	y_{12}
۵/۴	z_{22}	•	y_{13}
۱/۷	z_{23}	۱۱/۵	y_{21}

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

مدل برتسیماس و سیم (۲۰۰۴)

c, d و u را بردارهایی n تایی، A را ماتریس $m \times n$ و b را یک برداری m تایی در

نظر بگیرید. مساله برنامه ریزی ریاضی اسمی زیر را با مجموعه n متغیر در نظر

بگیرید:

$$\text{Min } c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$l \leq x \leq u$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می شود که تنها ماتریس A و بردار c شامل داده های غیرقطعی هستند و بردار b از اعداد قطعی تشکیل یافته است. هر چند در این مورد نیز می توان متغیر جدید x_{n+1} را معرفی کرد و نوشت

$$Ax - bx_{n+1} \leq 0, l \leq x \leq u, 1 \leq x_{n+1} \leq 1$$

را نیز شامل شود.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

در کاربردهای معمول، برای مقدار میانگین ضرایب a_{ij} و دامنه آن ها $\hat{a}_{ij}$ تخمین های معقولی وجود دارد. احساس می شود شناخت توزیع دقیق این ضرایب در اکثر مواقع بعید باشد. به طریق مشابه تخمین هایی برای ضرایب تابع هدف c_j و دامنه آن ها d_j موجود است. مدل عدم قطعیت داده هایی که در این بخش بررسی می شود، به طور خاص به صورت زیر می باشد.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

الف) عدم قطعیت برای ماتریس A

فرض کنید $N = \{1, 2, \dots, n\}$. هر کدام از ضرایب a_{ij} ، $j \in N$ به صورت یک

متغیر تصادفی مستقل، با توزیع متقارن و کران دار مدل می شود و $\tilde{a}_{ij}$ که $j \in N$

در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ مقدار می گیرد.

ب) عدم قطعیت برای بردار هزینه c

هر کدام از $j \in N$ و c_j در بازه $[c_j, c_j + d_j]$ مقدار می گیرد که d_j بیانگر

انحراف از ضریب هزینه اسمی c_j است.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

به منظور استوار بودن جواب، اعداد $\Gamma_i, i = 0, 1, \dots, m$ تعریف می شود که در بازه

$[0, |J_i|]$ مقدار می گیرند که در آن $J_i = \{j \mid \hat{a}_{ij} > 0\}$ به عبارت دیگر $|J_i|$ برابر

با تعداد داده های غیرقطعی در محدودیت i ام است.

نقش پارامتر Γ_i در محدودیت ها، تنظیم نمودن میزان استواری در مقابل سطح

محافظه کاری جواب است. محدودیت i ام مسئله اسمی، یعنی $a_i x \leq b_i$ ، را در

نظر بگیرید. فرض کنید J_i مجموعه ضرایب $a_{ij}, j \in J_i$ هایی باشد که دارای

عدم قطعیت هستند. به عبارت دیگر، $\tilde{a}_{ij}$ برای $j \in J_i$ مقادیری تصادفی از یک

توزیع متقارن با میانگین a_{ij} در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ می گیرند.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

به نظر می رسد کمتر احتمال دارد که همه $\tilde{a}_{ij}$ برای $j \in J_i$ همزمان تغییر کنند. در اینجا هدف آن است که در همه حالاتی که حداکثر $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تا از این ضرایب مجاز به تغییر باشند، و یک ضریب a_{it} نیز حداکثر به اندازه $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it}$ تغییر می کند، موجه بودن جواب تضمین شود. مقدار Γ_i سطح حفاظت برای محدودیت i نامیده می شود.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

پارامتر Γ_0 سطح استوار بودن را برای تابع هدف کنترل می کند. علاقه مند به یافتن جواب بهینه ای هستیم که تابع هدف را تحت همه سناریوهایی که Γ_0 تا از ضرایب هزینه تغییر می کنند و بیشترین تاثیر را روی جواب می گذارند، بهینه کند. فرض کنید $J_0 = \{j \mid d_j > 0\}$. اگر $\Gamma_0 = 0$ باشد، اثر تغییرات در ضرایب هزینه به طور کامل نادیده گرفته می شود. اما اگر $\Gamma_0 = |J_0|$ باشد، همه تغییرات ممکن در ضرایب هزینه در نظر گرفته می شود که محافظه کارانه ترین حالت می باشد.

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

همتای استوار پیشنهادی برتیسمس و سیم برای مسئله اصلی به طور خاص به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x + \max_{\{S_0 | S_0 \subseteq J_0, |S_0| \leq \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} d_j |x_j| \right\} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| \leq \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{it_i}| \right\} \leq b_i \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



سیم و برتسیمس نشان دادند که مدل ساده شده زیر معادل مدل فوق است:

$$\text{Max } c^T x + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j \in J_0} p_{0j}$$

$$\text{s.t. } \sum_j a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i, \quad \forall i$$

$$z_0 + p_{0j} \geq d_j y_j, \quad \forall j \in J_0$$

$$z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j, \quad \forall i \neq 0, j \in J_i$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in J_i$$

$$y_j \geq 0, \quad \forall j$$

$$z_i \geq 0, \quad \forall i$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad \forall j$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار



مثال ۵: مثال ۳ را با رویکرد برتسیماس و سیم مدل سازی و حل کنید.

حل:

مسئله به صورت زیر فرموله سازی می شود:

$$\text{Max } 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 + z_1\Gamma_1 + p_{11} + p_{12} \leq 200,$$

$$4x_1 + 7x_2 + z_2\Gamma_2 + p_{21} + p_{22} \leq 240,$$

$$z_1 + p_{11} \geq y_1$$

$$z_1 + p_{12} \geq 0.5y_2$$

$$z_1 + p_{21} \geq 0.5y_1$$

$$z_2 + p_{22} \geq y_2$$

$$-y_1 \leq x_1 \leq y_1$$

$$-y_2 \leq x_2 \leq y_2$$

$$x, y, p, z \geq 0$$

انواع رویکرد های بهینه سازی استوار

z_2	z_1	p_{22}	p_{21}	p_{12}	p_{11}	y_2	y_1	x_2	x_1	z	بودجه عدم اطمینان
۱۷/۳۹	۲۹/۵۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۱۷/۳۹	۲۹/۵۶	۱۷/۳۹	۲/۵۶	۱۱۰۴	$\Gamma_1, \Gamma_2 = 0$
۱۲/۲۲	۸/۸۸	۵/۵۶	۰/۰	۰/۰	۱۵/۵۵	۱۷/۷۷	۲۴/۴۴	۱۷/۷۷	۲/۴۴	۱۰۲۲	$\Gamma_1, \Gamma_2 = 1$
۱۱/۷۶	۸/۳۷	۴/۹۶	۰/۰	۰/۰	۱۵/۱۹	۱۶/۷۴	۲۳/۵۶	۱۶/۷۴	۲/۵۶	۹۷۳/۶۴	$\Gamma_1, \Gamma_2 = 2$

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com