

درس ۲۲:

مبانی شبیه‌سازی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

شبیه‌سازی تقلیدی از عملکرد فرایند یا سیستم **واقعی** با گذشت زمان است. شبیه‌سازی، صرفه نظر از این که دستی یا به وسیله کامپیوتر انجام می‌شود، به ایجاد ساختگی تاریخچه سیستم، و بررسی آن به منظور دستیابی به نتیجه‌گیری‌هایی در مورد ویژگی‌های عملکرد سیستم واقعی مربوط می‌شود.

همچنانکه یک سیستم با گذشت زمان تغییر می‌کند، می‌توان رفتار آن با ایجاد مدل شبیه‌سازی بررسی کرد. این مدل معمولاً به شکل مجموعه‌ای از فرض‌های مربوط به عملکرد سیستم است. با ایجاد و معتبرسازی مدل، می‌توان آن را برای یافتن پرسش "**چه می‌شود اگر**" در مورد سیستم واقعی به کار برد.

در برخی موارد می‌توان مدلی چنان ساده ایجاد کرد که به راحتی تماماً با **روش‌های ریاضی** حل شود. چنین راه‌حلهایی را می‌توان با استفاده از روش‌های ریاضی بدست آورد. این راه‌حل‌ها معمولاً چند پارامتر عددی را در بر می‌گیرد که همان معیارهای سنجش عملکرد سیستم هستند. اما بسیاری از سیستم‌های واقعی چنان **پیچیده** هستند که حل مدل‌های ریاضی آن‌ها در عمل **ناممکن** است. در این گونه موارد می‌توان از شبیه‌سازی کامپیوتری استفاده کرد.

شبیه‌سازی چه وقت ابزار مناسبی شمرده می‌شود

در دسترس بودن زبان‌های برنامه‌نویسی ویژه شبیه‌سازی، توانایی‌های محاسباتی گسترده با هزینه‌ی روی به کاهش هر محاسبه، و پیشرفت‌هایی چشم‌گیر اخیر در روش‌های شبیه‌سازی، این مبحث را به صورت یکی از رایج‌ترین و پذیرفته‌ترین ابزار **تحلیل سیستم‌ها** در آورده است. شبیه‌سازی بررسی و آزمایش رابطه‌های متقابل هر سیستم یا زیر سیستم پیچیده را میسر می‌کند. از جمله **کاربردهای** شبیه‌سازی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱- به وسیله شبیه‌سازی، بررسی و آزمایش رابطه‌های متقابل هر سیستم یا زیر سیستم پیچیده میسر خواهد بود.

۲- تغییرات اطلاعاتی، سازمانی و محیطی را می‌توان شبیه‌سازی کرد و به مشاهده تاثیر این تغییرات بر رفتار مدل پرداخت.

۳- با طراحی مدل شبیه‌سازی، می‌توان در زمان پیشنهاد انجام اصلاحات در سیستم تصمیم خوبی گرفت.

۴- با ایجاد تغییر در ورودی‌های شبیه‌سازی و بررسی خروجی‌ها می‌توان شناخت ارزشمندی در مورد چگونگی رابطه متقابل آن‌ها بدست آورد.

۵- شبیه‌سازی را می‌توان به منظور تحقیق و بررسی پاسخ‌های مدل‌های تحلیلی مورد استفاده قرار داد تا از نتیجه و اثر واقعی جواب‌های بدست آمده از مدل‌های تحلیل مطلع شد.

مزایا و معایب شبیه‌سازی

تحلیلگر باید قبل از استفاده از شبیه‌سازی، از مزایا و معایب آن مطلع باشد. از جمله **مزایای** شبیه‌سازی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- می‌توان از مدل شبیه‌سازی برای تحلیل طرح‌های پیشنهادی استفاده کرد و دیگر نیاز به پیاده سازی طرح‌های پیشنهادی در سیستم واقعی برای بررسی طرح‌ها نیست.

۲- معمولاً دستیابی به داده‌های شبیه‌سازی بسیار کم هزینه تر از فراهم آوردن داده‌های مربوط به سیستم واقعی است.

۳- به کار بردن روش‌های شبیه‌سازی معمولاً آسانتر از روش‌های تحلیلی است. بنابراین، شمار استفاده کنندگان بالقوه روش‌های شبیه‌سازی بسیار بیشتر از روش‌های تحلیلی است.

۴- در حالی که معمولاً مدل‌های تحلیلی به فرض‌های ساده کننده متعددی نیاز دارند تا از لحاظ ریاضی کاربرد پذیر شوند، ولی مدل‌های شبیه‌سازی چنین محدودیت‌هایی ندارد. با استفاده از مدل‌های تحلیلی، معمولاً تنها تعداد محدودی از معیارهای سنجش عملکرد سیستم را می‌توان

محاسبه کند، در صورتی که می توان از داده های تولید شده مدل های شبیه سازی به منظور برآورد هر معیار کارایی متصور عملکرد سیستم، استفاده کرد.

از **معایب** روش های شبیه سازی می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- معمولاً، به اجراهای فراوانی در مورد هر مدل شبیه سازی نیازمندیم و همین مساله ممکن است به هزینه های محاسباتی زیاد منجر شود.

۲- در مواردی که روش های تحلیلی کافی به نظر می رسد استفاده از روش های شبیه سازی منجر به فراموشی روش های ریاضی می شود.

زمینه های کاربرد مدل های شبیه سازی

شبیه سازی **کاربردهای** بسیار گسترده ای دارد که می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- شبیه سازی عملیات در فرودگاه های بزرگ توسط شرکت های هواپیمایی به منظور آزمودن تغییرات خطی مشی ها و عملکرد مانند ظرفیت نگهداری و تعمیر ادوات فرودگاه، و امکانات سوار و پیاده کردن مسافر.

۲- شبیه سازی عبور و مرور وسایل حمل و نقل از تقاطع های چراغدار با زمان بندی مشخص به منظور تعیین بهترین زمان بندی

۳- شبیه سازی عملیات نگهداری و تعمیر به منظور تعیین شمار بهینه افراد گروه های عملیاتی

۴- شبیه سازی اقتصاد کشور به منظور پیش بینی تاثیر تصمیمات مربوط به خط مشی اقتصادی

۵- شبیه سازی سیستم ارتباطات تلفنی به منظور تعیین ظرفیت اجزای مورد نظر به منظور بیشینه سازی رضایت مردم

۶- شبیه سازی عملیات خط تولید به منظور تعیین مقدار فضای لازم برای انبار کردن مواد در دست

تولید

سیستم‌ها و پیرامون

برای مدل‌سازی سیستم، درک **مفهوم سیستم** و **مرز سیستم** لازم است. **سیستم** به منزله گروهی از اشیا تعریف می‌کنند که در راستای تحقق هدفی معین در چارچوب رابطه یا وابستگی منظم و به هم پیوسته باشند. مثالی از سیستم عبارت از سیستم تولیدی ساخت خودرو است. ماشین‌ها، قطعات و کارگران با هم در امتداد خط مونتاژ کار می‌کنند تا وسیله نقلیه‌ای با کیفیت بالا تولید کنند.

هر سیستم اغلب تحت تاثیر تغییراتی قرار می‌گیرد که در خارج از سیستم روی می‌دهند. گفته می‌شود که چنین تغییراتی در **پیرامون** سیستم روی می‌دهند. در سیستم‌ها لازم است که **مرز** بین سیستم و **پیرامون** آن تعیین شود. چگونگی تعیین این مرز ممکن است به مقصود از مطالعه سیستم بستگی داشته باشد. برای مثال در مورد سیستم کارخانه، عوامل کنترل کننده ورود سفارش‌ها در پیرامون به شمار آید و خط تولید یک کارخانه در سیستم جای می‌گیرد.

اجزای سیستم

به منظور درک و تحلیل سیستم، چند واژه را تعریف می‌کنیم:

نهاد یا **Entity**، عنصر یا شی مورد توجه در سیستم است. **خصیصه** یا **Attribute** ویژگی نهاد است. **فعالیت** یا **Activity** بیانگر دوره‌ای زمانی با طول مشخص است. در مورد یک سیستم بانکی، مشتریان را می‌توان **نهاد** دانست. موجود حساب‌ها جاری آن‌ها را **خصیصه** و سپرده گذاری را **فعالیت** به حساب آورد.

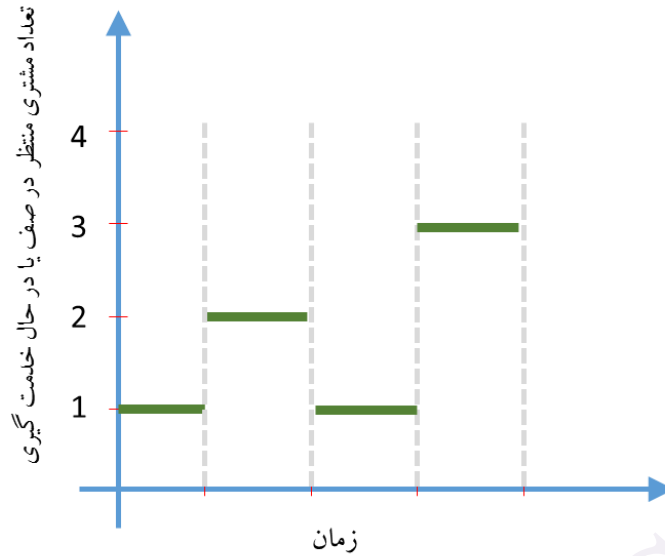
مجموعه متغیرهای لازم برای تشریح سیستم در هر زمان، با توجه به اهداف بررسی را **متغیرهای حالت سیستم** یا **State variables** تعریف می‌کنیم. در مثال بانک، متغیرهای حالت عبارت‌اند: تعداد تحویل داران مشغول کار، تعداد مشتریان منتظر در صف یا تعداد مشتریان در حال خدمت‌گیری و زمان ورود مشتری بعدی. **پیشامد** یا **Event** را رویدادی لحظه‌ای تعریف می‌کنیم که بتواند **حالت سیستم** را تغییر دهد. واژه **درون‌زا** یا **Internal** به منظور تشریح فعالیت‌ها و پیشامدهای که در درون سیستم رخ می‌دهد و واژه **برون‌زا** یا **External** به منظور تشریح فعالیت‌ها و پیشامدهای پیرامونی که سیستم را

تحت تاثیر قرار می دهند بکار می رود. در مثال بانک، ورود یک مشتری پیشامد برون زا و خدمت دهی به هر مشتری، پیشامدی درون زا است. در جدول زیر نمونه ای از نهاد، خصیصه، فعالیت، پیشامد و متغیرهای حالت در چند مسئله ارایه شده است.

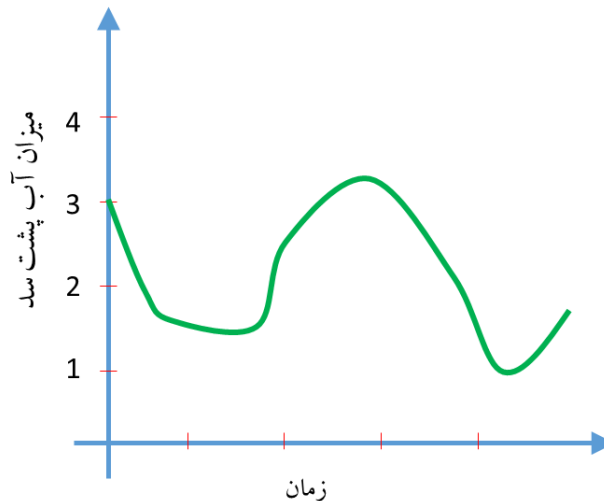
سیستم	نهادها	خصیصه‌ها	فعالیت‌ها	پیشامدها	متغیرهای حالت
قطار	مسافران	مبدأ مقصد	سفر	ورود به ایستگاه، رسیدن به مقصد	تعداد مسافران منتظر در هر ایستگاه، تعداد مسافران در سفر
بانک	مشتریان	مانده حساب جاری	سپرده گذاری	ورود و خروج از بانک	تعداد خدمت دهنده‌ها، تعداد مشتریان منتظر
ارتباطات	پیام‌ها	طول و مقصد	مخابره	ورود به مقصد	تعداد پیام‌ها در انتظار مخابره

سیستم‌های گسسته و پیوسته

سیستم‌ها را می توان در دو رده گسسته یا *Discrete* و پیوسته یا *Continuous* جا داد. **سیستم گسسته**، سیستمی است که متغیرهای حالت در آن تنها در مجموعه ای از نقاط گسسته زمان تغییر کند. بانک، مثالی در مورد سیستم گسسته است زیرا متغیر حالت تعداد مشتری حاضر در بانک، تنها وقتی تغییر می کند که یک مشتری وارد یا خدمت دهی به یک مشتری کامل شود. در شکل زیر نمایش متغیر حالت (تعداد مشتری منتظر در صف یا در حال خدمت گیری) در طول زمان را نشان می دهد.



سیستم پیوسته، سیستمی است که متغیر(های) حالت در آن به صورت پیوسته در طول زمان تغییر کند. برای مثال، میزان آب پشت سد است. در جریان بارش هر رگبار و تا مدتی پس از آن، آب در دریاچه پشت سد جریان می‌یابد. از سوی دیگر، به منظور مهار سیلاب و تولید برق، آب سد تخلیه می‌شود و تبخیر نیز سطح آب را کاهش می‌دهد.



گام‌های اساسی در بررسی مبتنی بر شبیه‌سازی

گام‌های اساسی بررسی مبتنی بر شبیه‌سازی به شرح زیر است:

۱- **صورت بندی مسئله:** هر بررسی مبتنی بر شبیه‌سازی را باید با صورت بندی مسئله شروع کرد و تحلیلگر از درک درست درباره مسئله اطمینان حاصل کند.

۲- **تعیین اهداف و طرح کلی پروژه:** اهداف شبیه‌سازی پرسش‌هایی را مطرح می‌کند که باید پاسخ آن‌ها را با استفاده از شبیه‌سازی بدست آورد.

۳- **مدلسازی:** ساختن مدل سیستم را کاری هنری و علمی می‌شناسند. مناسب‌ترین شیوه مدل‌سازی، آغاز کار با مدل ساده و پیچیده کردن تدریجی آن است. توصیه می‌شود که استفاده‌کننده از مدل در ساختن مدل حضور یابد. شرکت دادن استفاده‌کننده از مدل در این کار، هم کیفیت مدل بدست آمده را بالا می‌برد و هم بر اطمینان خاطر استفاده‌کننده از مدل در عمل را افزایش می‌دهد.

۴- **گردآوری داده‌ها:** بین ساختن مدل و گردآوری داده‌های ورودی، رابطه متقابل مداومی وجود دارد. همچنان که پیچیدگی مدل تغییر می‌کند عناصر داده‌ای مورد نیاز نیز تغییر می‌کنند. به علاوه، چون گردآوری داده‌ها بخش بزرگی از مجموع مدت مورد نیاز برای انجام شبیه‌سازی را در بر می‌گیرد، لازم است که آن را تا حد ممکن زود و معمولاً همراه با مراحل اولیه مدل‌سازی آغاز کرد.

۵- **برنامه نویسی:** چون شبیه‌سازی سیستم‌های واقعی به مدل‌هایی نتیجه می‌شود که به مقدار زیادی ذخیره‌سازی و محاسبات اطلاعاتی نیاز دارند، مدل را باید برای کامپیوتر رقمی برنامه نویسی کرد. مدل‌سازی باید تصمیم بگیرد که با چه زبانی نوشته شود.

۶- **وارسی برنامه:** واریسی مربوط به برنامه کامپیوتری آماده شده برای مدل شبیه‌سازی است. آیا برنامه کامپیوتری به خوبی کار می‌کند؟ در مورد مدل‌های پیچیده، برنامه نویسی کامل مدل به طریقی موفقیت آمیز بدون غلط و خطا، امری دشوار است. وظیفه برنامه نویس این است که کنترل کند ما به ازای واقعی تمامی روابط در برنامه درست وارد شده است یا نه؟

۷- **معتبرسازی مدل:** معتبرسازی مدل به معنای مشخص کردن این است که آیا مدل معرف دقیقی از سیستم واقعی است یا نه؟ معتبرسازی معمولاً از طریق محک زدن مدل انجام می‌گیرد، یعنی فرایند تکرار شونده‌ای که مسئول مقایسه مدل با رفتار سیستم واقعی است. در مثال بانک که در بالا آمده، داده‌های مربوط به طول صف انتظار در شرایط فعلی گردآوری شد. آیا مدل شبیه‌سازی از عهده پیش بینی این معیار عملکرد سیستم بر می‌آید؟

۸- **طرح آزمایشی:** در هر طرح آزمایشی باید تصمیم‌های در مورد طول مدت اجراهای شبیه‌سازی و تعداد تکرار هر اجرا اتخاذ کرد.

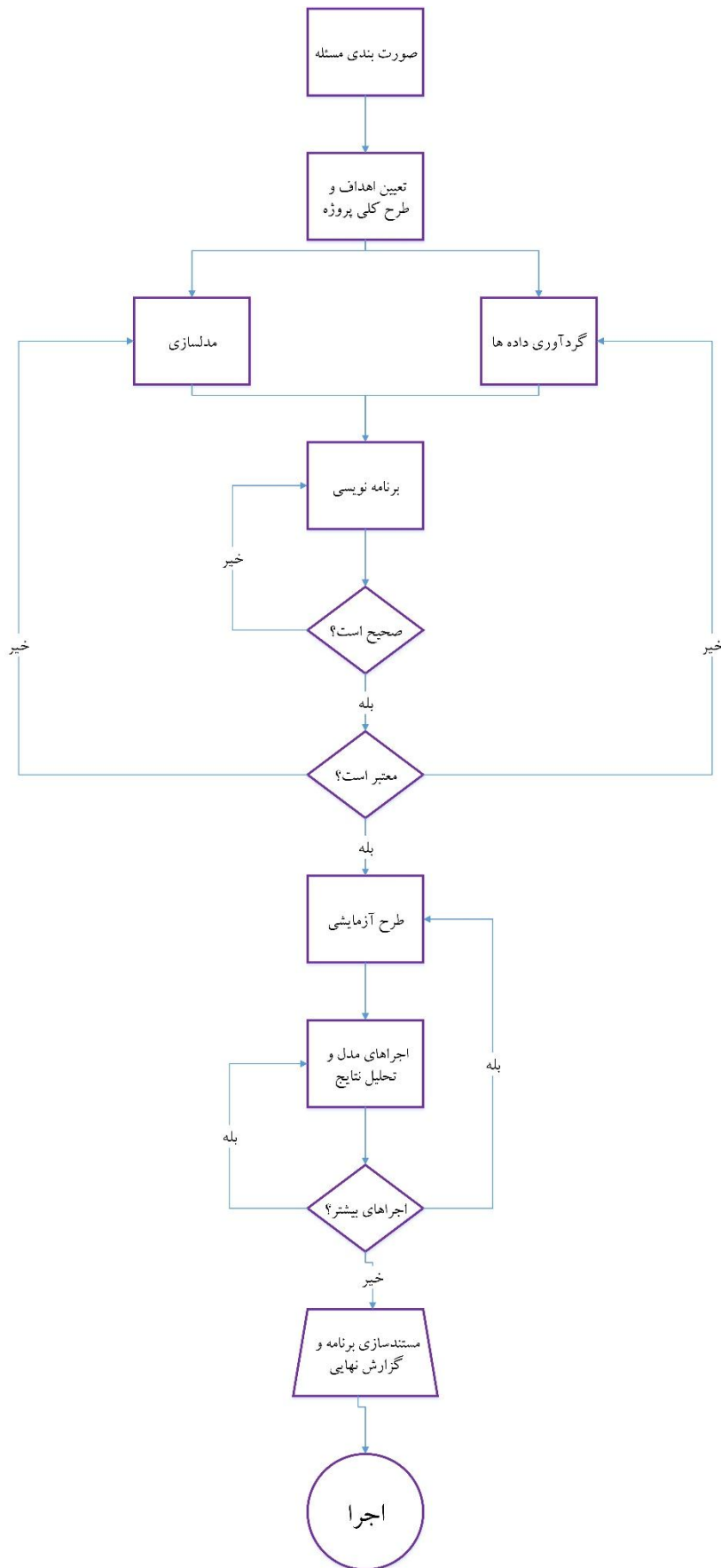
۹- **اجراهای مدل و تحلیل نتایج:** اجراهای مکرر مدل و سپس تحلیل آن‌ها به منظور تعیین معیارهای عملکرد از سیستمی که شبیه‌سازی می‌شوند، در این بخش انجام می‌شود.

۱۰- **اجراهای بیشتر:** براساس اجراهای کامل شده، تحلیل گر تعیین می‌کند که آیا اجراهای دیگری مورد نیاز است یا نه و اگر چنین است، این اجراها از چه طرحی باید پیروی کنند.

۱۱- **مستند سازی برنامه و گزارش نتایج:** به دلایل متعددی، مستند سازی برنامه لازم است. اگر قرار باشد برنامه توسط همان تحلیلگر یا تحلیل گران دیگر باز هم مورد استفاده واقع شود، مستند سازی لازم است.

۱۲- **اجرا:** موفقیت گام اجرا به این موضوع بستگی دارد که یازده مرحله قبلی چقدر خوب انجام شده است. موفقیت این مرحله همچنین به میزان شرکت دادن استفاده کننده نهایی مدل در تمام فرایند شبیه‌سازی از سوی طراح سیستم، بستگی دارد. اگر استفاده کننده از مدل به طور کامل در فرایند مدل سازی شرکت داده شده باشد و اگر ماهیت مدل و خروجی‌های آن را درک کند، احتمال اجرایی شدن مدل افزایش می‌یابد.

در شکل زیر، مراحل اساسی در بررسی مبتنی بر روش شبیه‌سازی نشان داده شده است.



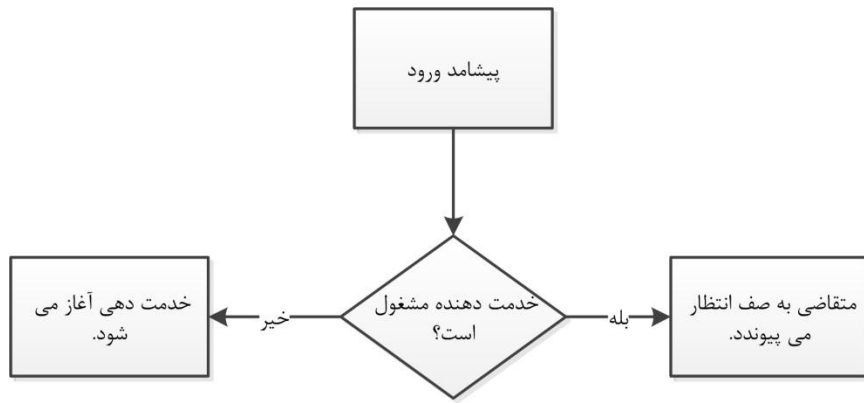
شبیه‌سازی سیستم‌های صف

در یک سیستم صف؛ تعداد جمعیت متقاضی، چگونگی و زمان ورود و خدمت دهی، ظرفیت سیستم و نظام صف مشخص می‌شود. در این سیستم، جمعیت متقاضی نامحدود است یعنی اگر یک نفر از جمعیت متقاضی وارد سیستم شود و به صف انتظار ملحق شود یا به محل دریافت خدمت برود، هیچ گونه تغییری در آهنگ ورود متقاضیان دیگر نخواهد داد. به علاوه در این سیستم، ورودها به صورت تصادفی رخ می‌دهد و اگر واردشدگان به صف انتظار ملحق شوند، سرانجام خدمت دریافت خواهند کرد. در ضمن، زمان خدمت دهی تصادفی است و در قالب توزیع احتمالی تعیین می‌شوند که با گذشت زمان بدون تغییر می‌ماند. ظرفیت سیستم نیز نامحدود است. منظور از سیستم، واحد در حال دریافت خدمت و آنهایی که در صف انتظارند را در بر می‌گیرد. سرانجام، متقاضیان ورود از یک نظام خدمت دهی مثلا هر کسی زودتر وارد سیستم شود زودتر خدمت دهی به آن انجام می‌شود، پیروی می‌کند.

زمان ورودی ها و زمان خدمت دهی ها با توزیع‌های احتمالی مدت بین دو ورود متوالی و مدت‌ها خدمت دهی مشخص می‌شوند. به طور کلی، آهنگ ورود باید از آهنگ خدمت دهی کمتر باشد، در غیر این صورت، طول صف انتظار به مرور به طور نامحدود افزایش می‌یابد.

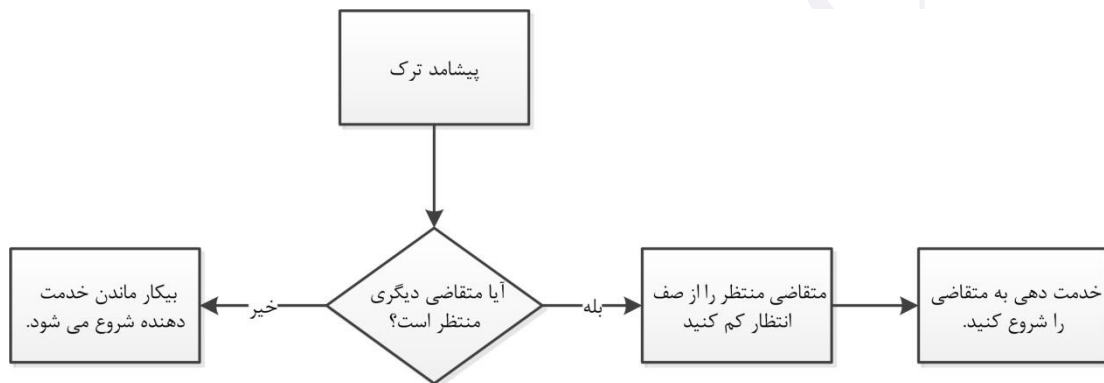
حالت سیستم، تعداد حاضران در سیستم و وضعیت خدمت دهنده از لحاظ مشغول بودن یا بیکار بودن است. پیشامد مجموعه شرایطی است که موجب تغییری لحظه ای در حالت سیستم می‌شود. در مساله تک خدمت ده، تنها دو پیشامد ممکن است حالت سیستم را تغییر دهد. این دو پیشامد **ورود** یک متقاضی (پیشامد ورود) و **پیشامد تکمیل** خدمت‌دهی به یک متقاضی (پیشامد ترک) است. سیستم صف در برگیرنده خدمت دهنده، متقاضی در حال خدمت‌گیری و حاضران در صف است.

پیشامد ورود وقتی رخ می‌دهد که یک متقاضی به سیستم وارد شود. متقاضی ممکن است که خدمت دهنده را بیکار یا مشغول بیابد. بنابراین یا بر خدمت دهنده وارد می‌شود یا به صف خدمت دهنده ملحق می‌شود.



پیشامد ترک وقتی روی می دهد که خدمت دهی یک متقاضی تکمیل شود. در این صورت شبیه سازی

مطابق شکل زیر ادامه می یابد.



عملیات های متصور به هنگام ورود یک متقاضی به سیستم به صورت جدول زیر می شود. اگر خدمت

دهنده مشغول باشد، با ورود متقاضی وارد صف خدمت دهنده می شود. اگر خدمت دهنده بیکار باشد، به این

معنا است که صف خالی بوده است و متقاضی وارد خدمت دهنده می شود.

		وضعیت صف	
		غیر خالی	خالی
وضعیت خدمت دهنده	مشغول	ورود به صف	ورود به صف
	بیکار	غیر ممکن	شروع به خدمت دهی

اینک باید دید که پیشامدهای فوق الذکر چگونه با گذشت زمان شبیه سازی رخ می دهد. در فرآیند

شبیه سازی، زمان با **ساعتی** که مشخص کننده رخ دادن پیشامدها با گذشت زمان است انجام می شود.

معمولا در شبیه‌سازی، پیشامدها به صورت **تصادفی** روی می‌دهند. تصادفی بودن تقلیدی از زندگی واقعی است که **غیر قطعی بودن** را نشان می‌دهد. مثلا، به طور قطعی معلوم نیست که در چه زمانی مشتری بعدی برای ترک فروشگاه مواد غذایی، به صندوق فروشگاه مراجعه می‌کند، یا به طور قطع معلوم نیست چقدر طول می‌کشد تا کارمند باجه بانک، ثبت یک نقل و انتقال مالی را به اتمام برساند.

عامل تصادف برای تقلید زندگی واقعی، با استفاده از **اعداد تصادفی** میسر است. اعداد تصادفی به طور **یکنواخت و مستقل** در بازه صفر تا یک توزیع می‌شود. اعداد تصادفی را می‌توان تولید کرد که در **درس‌های آینده** به طور مفصل به آن خواهیم پرداخت.

در مسئله تک مجرای صف (یا مسئله صف با یک خدمت دهنده)، مدت‌ها بین دو ورود و مدت‌های خدمت دهی براساس اعداد تصادفی تعیین می‌شود. فرض کنید که مدت‌های بین ورودها با پنج بار ریختن یک تاس عادل و ثبت عدد وجه بالایی نمایان شده است تولید می‌شود. جدول زیر مجموعه پنج مدت بین ورود تولید شده به این ترتیب را نشان می‌دهد. از این پنج مدت بین دو ورود برای محاسبه زمان‌های ورود شش مشتری به سیستم صف استفاده شده است. فرض بر آن است که اولین مشتری در زمان صفر وارد می‌شود.

مدت بین دو ورود	زمان ورود بر حسب ساعت شبیه سازی	مشتری
-	۰	۱
۲	۲	۲
۴	۶	۳
۱	۷	۴
۲	۹	۵
۶	۱۵	۶

مدت زمان مورد نیاز دیگر، مدت زمان خدمت دهی است. تنها مقادیر ممکن خدمت دهی، یک، دو، سه و چهار واحد زمانی است. با پذیرش این فرض که این مقادیر چهارگانه دارای احتمال رخداد یکسان هستند، این مقادیر بدین صورت قابل تولید هستند که اعداد یک تا چهار را بر روی ۴ مهره بنویسیم و در داخل کلاه

بیاندازیم و هر بار یکی را بیرون بیاورد و بعد از دیدن عدد روی مهره آن را دوباره در داخل کلاه بگذاریم. در جدول زیر نتایج این فرآیند برای ۶ مشتری آورده شده است.

مدت خدمتهی	مشتری
۲	۱
۱	۲
۳	۳
۲	۴
۱	۵
۴	۶

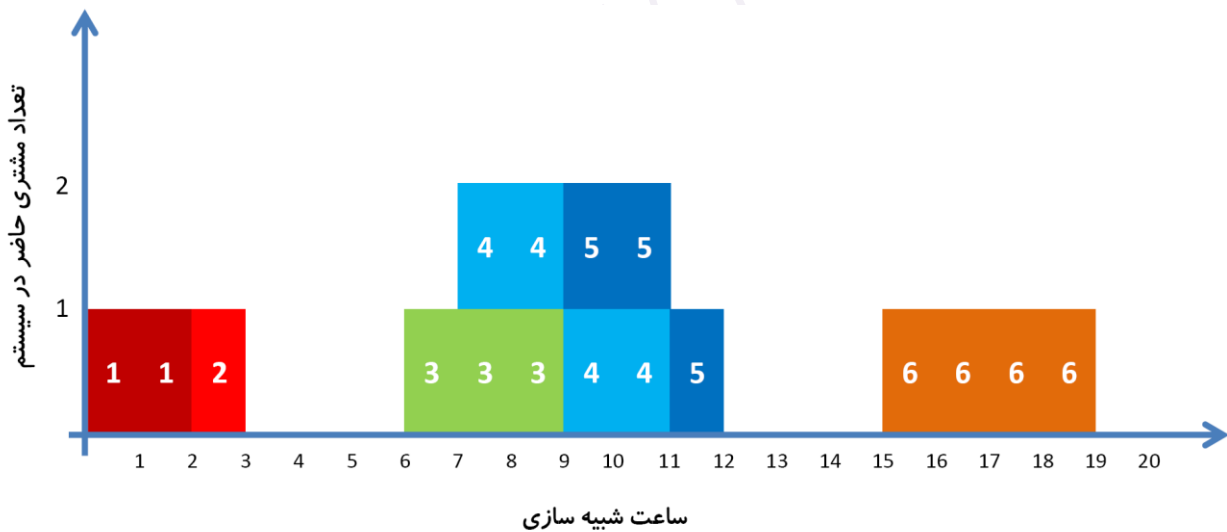
در جدول زیر براساس ساعت شبیه‌سازی، نحوه ورود به سیستم برای خدمت دهی آورده شده است. در ستون اول، شماره مشتری مشخص می‌شود. در ستون‌های دوم و سوم به ترتیب زمان‌های ورود و زمان خدمت دهی مشخص می‌شود که براساس اعداد تصادفی تعیین شده است. زمان شروع خدمت دهی و زمان پایان خدمت دهی در ستون‌های چهارم و پنجم گزارش شده است.

مشتری	زمان ورود به سیستم	مدت خدمت دهی	زمان شروع خدمت دهی	زمان پایان خدمت دهی
۱	۰	۲	۰	۲
۲	۲	۱	۲	۳
۳	۶	۳	۶	۹
۴	۷	۲	۹	۱۱
۵	۹	۱	۱۱	۱۲
۶	۱۵	۴	۱۵	۱۹

در جدول فوق ترتیب ورودی مشتریان مشخص نشده است. در جدول زیر ترتیب زمانی پیشامدها و ساعت هر یک از آنها آورده شده است.

ساعت شبیه سازی	مشتری	نوع پیشامد
۰	۱	ورود
۲	۱	ترک
۲	۲	ورود
۳	۲	ترک
۶	۳	ورود
۷	۴	ورود
۹	۳	ترک
۹	۵	ورود
۱۱	۴	ترک
۱۲	۵	ترک
۱۵	۶	ورود
۱۹	۶	ترک

نمایش گرافیکی جدول فوق به صورت زیر می‌شود. در شکل زیر تعداد مشتری‌های حاضر در سیستم را در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.



در ادامه با ارایه چند مثال، فرآیندهای اشاره شده در بالا بیشتر تشریح می‌شود.

مثال صف تک خدمت دهنده

یک فروشگاه مواد غذایی تنها با یک باجه صندوق دارد. مشتری‌ها به طور تصادفی با فواصل زمانی یک تا هشت دقیقه به صندوق فروشگاه مراجعه می‌کنند. جدول زیر نشان می‌دهد که مدت‌های بین ورود دارای احتمال وقوع یکسان است.

مدت های بین ورود (دقیقه)	احتمال	احتمان تجمعی
۱	۰,۱۲۵	۰,۱۲۵
۲	۰,۱۲۵	۰,۲۵
۳	۰,۱۲۵	۰,۳۷۵
۴	۰,۱۲۵	۰,۵
۵	۰,۱۲۵	۰,۶۲۵
۶	۰,۱۲۵	۰,۷۵۰
۷	۰,۱۲۵	۰,۸۷۵
۸	۰,۱۲۵	۱

مدت زمان خدمت دهی از یک تا شش دقیقه تغییر می‌کند که احتمال وقوع هر یک از این شش عدد با احتمالات نامساوی از جدول زیر پیروی می‌کند.

مدت خدمت دهی (دقیقه)	احتمال	احتمان تجمعی
۱	۰,۱	۰,۱
۲	۰,۲	۰,۳
۳	۰,۳	۰,۶
۴	۰,۲۵	۰,۸۵
۵	۰,۱	۰,۹۵
۶	۰,۰۵	۱

در این مسئله شبیه‌سازی، به تحلیل سیستم از طریق شبیه‌سازی ورود ۲۰ مشتری و خدمت دهی به آن‌ها می‌پردازیم.

نکته: در این مسئله، سیستم از حالت خالی شروع می‌شود.

برای تولید مدت‌های خدمت دهی و زمان ورود به سیستم، باید اعداد تصادفی تولید کرد. برای تولید اعداد تصادفی، سه رقم تصادفی بین ۰ تا ۹ را در کنار هم قرار می‌دهیم که در این صورت اعداد تصادفی بین ۰ تا ۹۹۹ تولید شود. با تقسیم اعداد تولید شده به ۱۰۰۰ و مقایسه با ستون احتمال تجمعی دو جدول بالا می‌توان اعداد تصادفی زمان ورود و زمان خدمت دهی مشخص شود. برای نمونه اگر سه عدد تصادفی برابر با ۴، ۸، و ۲ باشد لذا داریم ۰.۲۸۴. با تقسیم این عدد بر ۱۰۰۰ خواهیم داشت: ۰.۲۸۴ که بر اساس جدول تابع توزیع احتمال زمان ورود به سیستم، برابر با ۳ می‌شود زیرا $0.250 < 0.284 < 0.375$.

برای تعیین مدت زمان خدمت دهی با توجه به این که مقادیر تابع احتمال تجمعی با دقت دو رقم اعشار هستند، لذا تولید دو عدد تصادفی کفایت می‌کند. در دو جدول زیر اعداد تصادفی برای زمان ورود به سیستم و زمان خدمت دهی آورده شده است.

تعیین مدت‌های بین دو ورود متوالی

مدت بین دو ورود (دقیقه)	عدد تصادفی	مشتری	مدت بین دو ورود (دقیقه)	عدد تصادفی	مشتری
۱	۰,۱۰۹	۱۱	-	-	۱
۱	۰,۰۹۳	۱۲	۸	۰,۹۱۳	۲
۵	۰,۶۰۷	۱۳	۶	۰,۷۲۷	۳
۶	۰,۷۳۸	۱۴	۱	۰,۰۱۵	۴
۳	۰,۳۵۹	۱۵	۸	۰,۹۴۸	۵
۸	۰,۸۸۸	۱۶	۳	۰,۳۰۹	۶
۱	۰,۱۰۶	۱۷	۸	۰,۹۲۲	۷
۲	۰,۲۱۲	۱۸	۷	۰,۷۵۳	۸
۴	۰,۴۹۳	۱۹	۲	۰,۲۳۵	۹
۵	۰,۵۳۵	۲۰	۳	۰,۳۰۲	۱۰

تعیین مدت‌های زمان خدمت دهی

مدت خدمت دهی (دقیقه)	عدد تصادفی	مشتری	مدت خدمت دهی (دقیقه)	عدد تصادفی	مشتری
۳	۰,۳۲	۱۱	۴	۰,۸۴	۱
۵	۰,۹۴	۱۲	۱	۰,۱	۲
۴	۰,۷۹	۱۳	۴	۰,۷۴	۳
۱	۰,۰۵	۱۴	۳	۰,۵۳	۴
۵	۰,۷۹	۱۵	۲	۰,۱۷	۵
۴	۰,۸۴	۱۶	۴	۰,۷۹	۶
۳	۰,۵۲	۱۷	۵	۰,۹۱	۷
۳	۰,۵۵	۱۸	۴	۰,۶۷	۸
۲	۰,۳۰	۱۹	۵	۰,۸۹	۹
۳	۰,۵۰	۲۰	۳	۰,۳۸	۱۰

براساس اعداد تصادفی تولید شده در بالا، جدول شبیه‌سازی دستی بدست می‌آید. این گونه جدول‌ها به

نحوی طراحی می‌شود که پرسش‌های مطروحه را بتواند پاسخگو باشد. نتایج شبیه‌سازی این مثال برای ۲۰

مشتری به صورت جدول زیر است.

مشتري	مدت از آخرين ورود (دقيقه)	زمان ورود	مدت خدمت دهی (دقيقه)	زمان شروع خدمت	مدت ماندن مشتري در صف (دقيقه)	زمان پايان خدمت	مدت ماندن مشتري در سيستم (دقيقه)	مدت بيكاري خدمت دهنده (دقيقه)
۱	-	۰	۴	۰	۰	۴	۴	۰
۲	۸	۸	۱	۸	۰	۹	۱	۴
۳	۶	۱۴	۴	۱۴	۰	۱۸	۴	۵
۴	۱	۱۵	۳	۱۸	۳	۲۱	۶	۰
۵	۸	۲۳	۲	۲۳	۰	۲۵	۲	۲
۶	۳	۲۶	۴	۲۶	۰	۳۰	۴	۱
۷	۸	۳۴	۵	۳۴	۰	۳۹	۵	۴
۸	۷	۴۱	۴	۴۱	۰	۴۵	۴	۲
۹	۲	۴۳	۵	۴۵	۲	۵۰	۷	۰
۱۰	۳	۴۶	۳	۵۰	۴	۵۳	۷	۰
۱۱	۱	۴۷	۳	۵۳	۶	۵۶	۹	۰
۱۲	۱	۴۸	۵	۵۶	۸	۶۱	۱۳	۰
۱۳	۵	۵۳	۴	۶۱	۸	۶۵	۱۲	۰
۱۴	۶	۵۹	۱	۶۵	۶	۶۶	۷	۰
۱۵	۳	۶۲	۵	۶۶	۴	۷۱	۹	۰
۱۶	۸	۷۰	۴	۷۱	۱	۷۵	۵	۰
۱۷	۱	۷۱	۳	۷۵	۴	۷۸	۷	۰
۱۸	۲	۷۳	۳	۷۸	۵	۸۱	۸	۰
۱۹	۴	۷۷	۲	۸۱	۴	۸۳	۶	۰
۲۰	۵	۸۲	۳	۸۳	۱	۸۶	۴	۰
مجموع			۶۸		۵۶		۱۲۴	۱۸

مشتري اول در زمان صفر وارد سيستم می شود و خدمت دهی بلافاصله شروع می شود و با توجه به اين زمان خدمت دهی آن ۴ دقيقه است و در زمان ۴ تمام می شود. مشتري اول به اندازه ۴ دقيقه در سيستم بوده است. مشتري دوم در زمان ۸ وارد سيستم می شود و سيستم به مدت ۴ دقيقه بيكار بوده است. در صورتی اين که مشتري ۴ ام بررسی می شود به اين نتیجه می رسيم که اين مشتري در زمان ۱۵ وارد شده ولی تا زمان ۱۸ امکان خدمت دهی به وی نبود و اين مشتري به اندازه ۳ دقيقه در انتظار خدمت بوده است. برخی از یافته های کوتاه مدت شبیه سازی به صورت زیر محاسبه می شود.

۱- متوسط مدت انتظار هر مشتري در صف به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\text{مجموع مدت انتظار مشتریان در صف بر حسب دقیقه} \\ \text{متوسط مدت انتظار بر حسب دقیقه} = \frac{\text{مجموع تعداد مشتریان}}{\text{مجموع تعداد مشتریان}}$$

$$= \frac{56}{20} = 2.8 \text{ min}$$

۲- احتمال بودن هر مشتری در صف به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\text{تعداد مشتریانی که در انتظار می‌مانند} \\ \text{احتمال انتظار در سیستم برای خدمت‌گیری} = \frac{\text{مجموع تعداد مشتریان}}{\text{مجموع تعداد مشتریان}}$$

$$= \frac{13}{20} = 0.65$$

۳- احتمال بیکاری خدمت‌دهنده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\text{مجموع مدت بیکاری خدمت‌دهنده بر حسب دقیقه} \\ \text{احتمال بیکاری خدمت‌دهنده} = \frac{\text{مجموع مدت اجرای شبیه‌سازی بر حسب دقیقه}}{\text{مجموع مدت اجرای شبیه‌سازی بر حسب دقیقه}}$$

$$= \frac{18}{86} = 0.21$$

احتمال مشغول بودن خدمت‌دهنده برابر با ۰.۷۹ یا ۱-۰.۲۱ است.

۴- متوسط زمانی که خدمت‌دهنده در حال خدمت‌دهی در طول مدل شبیه‌سازی بوده است به

صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\text{مجموع مدت خدمت‌دهی بر حسب دقیقه} \\ \text{متوسط مدت خدمت‌دهی} = \frac{\text{مجموع تعداد مشتریان}}{\text{مجموع تعداد مشتریان}}$$

$$= \frac{68}{20} = 3.4 \text{ min}$$

همان طور که در ابتدای این مثال بیان شد مدت زمان خدمت دهی دارای یک تابع توزیع احتمالی است لذا مقدار **امید ریاضی زمان خدمت دهی** به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{امید ریاضی مدت خدمت دهی} = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.25 + 5 \times 0.1 + 6 \times 0.05 = 3.2 \text{ min}$$

همان طور که مشاهده می‌شود متوسط مدت خدمت دهی با امید ریاضی زمان خدمت دهی کمی متفاوت است که با افزایش مدت شبیه‌سازی این دو زمان به هم **میل** می‌کنند.

۵- **متوسط مدت بین دو ورود متوالی** به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{مجموع تمام مدت زمانی بین دو ورود بر حسب دقیقه} \\ \text{تعداد ورودی منهای یک} \\ = \text{متوسط مدت زمان بین دو ورود بر حسب دقیقه}$$

$$= \frac{82}{19} = 4.3 \text{ min}$$

نکته: به دلیل اینکه فرض شده است که اولین مشتری در زمان صفر وارد سیستم می‌شود لذا در مخرج عبارت فوق، تعداد ورودی‌ها از یک کم می‌شود.

مشابه مدت زمان خدمت دهی، مدت زمان بین دو ورود به صورت احتمالی است که **امید ریاضی**

$$\text{مدت زمان بین دو ورود با توجه به یکنواخت بودن تابع توزیع برابر با } \frac{1+8}{2} = 4.5 \text{ می‌شود.}$$

همان طور که مشاهده می‌شود دو مدت زمان فوق با هم متفاوت است ولی با افزایش مدت شبیه‌سازی این دو زمان به هم **میل** می‌کنند.

۶- **متوسط زمان انتظار مشتریانی که در صف انتظار خدمت دهی هستند** به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

مجموع مدتی که مشتریان در صف به انتظار می مانند بر حسب دقیقه = $\frac{\text{مجموع تعداد مشتریانی که در صف به انتظار می مانند}}{\text{متوسط مدت انتظار انهایی که در صف هستند بر حسب دقیقه}}$

$$= \frac{56}{13} = 4.3 \text{ min}$$

۷. **متوسط مدت زمانی هر مشتری در سیستم** به صورت زیر محاسبه می شود. زمان بودن در سیستم شامل صف و خدمت دهنده است.

مجموع مدت زمان بودن مشتریان در سیستم = $\frac{\text{مجموع تعداد مشتریان}}{\text{متوسط مدت ماندن مشتری در سیستم بر حسب دقیقه}}$

$$= \frac{124}{20} = 6.2 \text{ min}$$

این معیار را به نحو دیگری هم می توان محاسبه کرد. در این صورت، متوسط زمان بودن در سیستم، برابر متوسط مدت زمانی که مشتری در صف بعلاوه متوسط زمان مشتری برای خدمت دهی است.

متوسط مدت زمانی مشتری + متوسط مدت زمانی مشتری در صف = متوسط مدت ماندن مشتری در سیستم در حال خدمت گیری

$$= 2.8 + 3.4 = 6.2 \text{ min}$$

نتایج هفتگانه فوق، مورد علاقه تحلیل گران است و با انجام طولانی تر شبیه سازی می توان نتایج فوق را دقیق تر کرد.

مثال روزنامه فروش

یک مساله قدیمی و مهم کنترل موجودی، به خرید و فروش روزنامه توسط روزنامه فروش مربوط است. روزنامه فروش، هر نسخه روزنامه را به ۱۳ واحد پول می خرد و به ۲۰ واحد پول می فروشد. روزنامه های فروش نرفته در انتهای روز به عنوان باطله و هر نسخه به ۲ واحد پول فروخته می فروشد. روزنامه در بسته های ده تایی قابل خریدن است و رونامه فروش تنها می تواند مضارب ۱۰ (مثلا ۵۰، ۶۰ و ..) روزنامه

بخرد. با توجه به نوع اخبار، سه نوع روز **خوب**، **متوسط** و **بد** با احتمالات ۰.۳۵، ۰.۴۵، و ۰.۲ متصور است. تقاضا روزنامه بر حسب نوع اخبار روز به صورت جدول زیر داده شده است.

نوع روز			مقدار تقاضا
بد	متوسط	خوب	
۰,۴۴	۰,۱	۰,۰۳	۴۰
۰,۲۲	۰,۱۸	۰,۰۵	۵۰
۰,۱۶	۰,۴	۰,۱۵	۶۰
۰,۱۲	۰,۲	۰,۲	۷۰
۰,۰۶	۰,۰۸	۰,۳۵	۸۰
۰	۰,۰۴	۰,۱۵	۹۰
۰	۰	۰,۰۷	۱۰۰

هدف این مسئله تعیین تعداد بهینه روزنامه‌هایی است که روزنامه فروش باید بخرد. با شبیه‌سازی تقاضا برای ۲۰ روز و ثبت سود ناشی از فروش روزانه، این هدف را بررسی کنید. سود روزنامه فروش از رابطه زیر بدست می‌آید.

درآمد ناشی از فروش روزنامه باطله + سود از دست رفته به خاطر فزونی تقاضا - هزینه خرید روزنامه - درآمد ناشی از فروش = سود

برای بدست آوردن مقدار تصادفی برای تعیین نوع روز و مقدار تقاضا، می‌بایستی تابع توزیع تجمعی احتمالی را بدست آورد که به صورت جدول زیر می‌شود.

نوع روز	احتمال	احتمال تجمعی	ارتقام تصادفی
خوب	۰,۳۵	۰,۳۵	۱ الی ۳۵
متوسط	۰,۴۵	۰,۸	۳۶ الی ۸۰
بد	۰,۲	۱	۸۱ الی ۱۰۰

برای تولید مقدار تقاضا از ارقام تخصیص یافته جدول زیر استفاده می‌شود. با فرض تقاضای متوسط، ۱ الی ۱۰ به این معنا است که اگر عدد تصادفی تولید شده بین ۱ تا ۱۰۰ تولید شد و مقدار آن از یک (خود یک) تا ۱۰ (خود ۱۰) بود، مقدار تقاضا برای روز متوسط برابر ۴۰ است.

تخصیص اعداد تصادفی			توزیع تجمعی			مقدار تقاضا
بد	متوسط	خوب	بد	متوسط	خوب	
۱ الی ۴۴	۱ الی ۱۰	۱ الی ۳	۰,۴۴	۰,۱	۰,۰۳	۴۰
۴۵ الی ۶۶	۱۱ الی ۲۸	۴ الی ۸	۰,۲۲	۰,۱۸	۰,۰۵	۵۰
۶۷ الی ۸۲	۲۹ الی ۶۸	۹ الی ۲۳	۰,۱۶	۰,۴	۰,۱۵	۶۰
۸۳ الی ۹۴	۶۹ الی ۸۸	۲۴ الی ۴۳	۰,۱۲	۰,۲	۰,۲	۷۰
۹۵ الی ۱۰۰	۸۹ الی ۹۶	۴۴ الی ۷۸	۰,۰۶	۰,۰۸	۰,۳۵	۸۰
-	۹۷ الی ۱۰۰	۷۹ الی ۹۳	۰	۰,۰۴	۰,۱۵	۹۰
-	-	۹۴ الی ۱۰۰	۰	۰	۰,۰۷	۱۰۰

جدول شبیه‌سازی برای خرید ۷۰ روزنامه در ابتدای هر روز در جدول زیر آمده است.

روز	ارقام تصادفی برای تعیین نوع روز	نوع روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	درآمد حاصل به خاطر فزونی تقاضا	سود از دست رفته به خاطر فزونی تقاضا	درآمد ناشی از فروش به قیمت باطله	سود روزانه
۱	۹۴	بد	۸۰	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۲	۷۷	متوسط	۲۰	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۳	۴۹	متوسط	۱۵	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۴	۴۵	متوسط	۸۸	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۵	۴۳	متوسط	۹۸	۹۰	۱۴۰۰	۱۴۰	-	۳۵۰
۶	۳۲	خوب	۶۵	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۷	۴۹	متوسط	۸۶	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۸	۰۰	بد	۷۳	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۹	۱۶	خوب	۲۴	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۰	۲۴	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	--	۴۲۰
۱۱	۳۱	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	--	۴۲۰
۱۲	۱۴	خوب	۲۹	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۳	۴۱	متوسط	۱۸	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۱۴	۶۱	متوسط	۹۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۵	۸۵	بد	۹۳	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۶	۰۸	خوب	۷۳	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۷	۱۵	خوب	۲۱	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۱۸	۹۷	بد	۴۵	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۱۹	۵۲	متوسط	۷۶	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۲۰	۷۸	متوسط	۹۶	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
مجموع								۷۲۶۰

در روز ۱ تقاضا برای روزنامه ۶۰ و درآمد ناشی از فروش ۶۰ روزنامه برابر با ۱۲۰۰ است و هزینه خرید ۷۰ روزنامه هر روزنامه ۱۳ واحد پول برابر با ۹۱۰ واحد پول است. در پایان این روز ۱۰ روزنامه باقی می‌ماند زیرا ۷۰ روزنامه سفارش داده شده است. روزنامه‌های باقی مانده با قیمت ۲ واحد پول و در مجموع ۲۰ واحد پول عایدی روزنامه فروش می‌شود. لذا سود روزنامه فروش در روز اول برابر است با:

$$\text{سود} = ۱۲۰۰ - ۹۱۰ - ۰ + ۲۰ = ۳۱۰$$

در روز پنجم تقاضا بیش از عرضه است. در آمد ناشی از فروش ۱۴۰۰ واحد پول است زیرا ۷۰ روزنامه سفارش داده شده است. چون در این روز تقاضا ۹۰ روزنامه بوده است لذا ۲۰ روزنامه دیگر روزنامه فروش می‌توانست بفروشد و چون هزینه فروش ۲۰ و هزینه خرید ۱۳ بوده است سود از دست رفته برابر با ۷ خواهد بود و لذا روزنامه فروش ۱۴۰ واحد پول (7×20) ضرر کرده است. سود این روز به صورت زیر می‌شود.

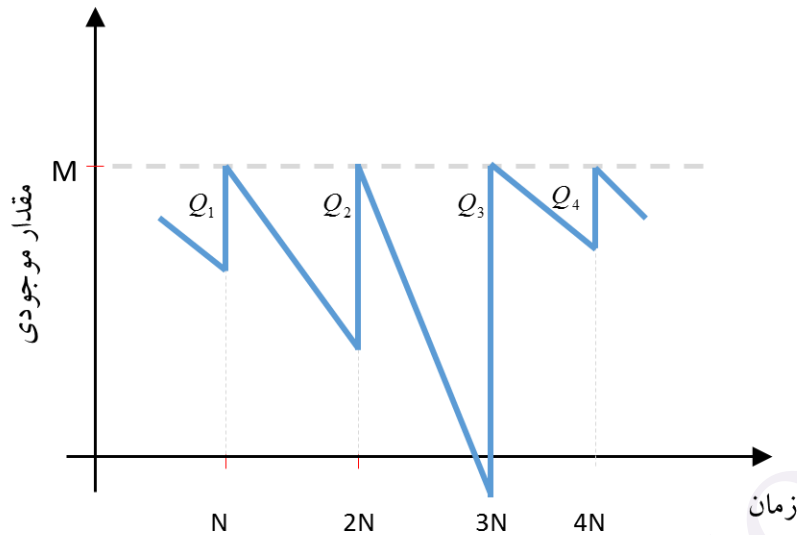
$$\text{سود} = ۱۴۰۰ - ۹۱۰ - ۱۴۰ + ۰ = ۳۵۰$$

سود یک دوره شبیه‌سازی ۲۰ روزه برابر با ۷۲۶۰ می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\text{سود} = ۲۵۸۰۰ - ۱۸۲۰۰ - ۵۶۰ + ۲۲۰ = ۷۲۶۰$$

شبیه‌سازی سیستم‌های موجودی

رده مهمی از مسائل شبیه‌سازی به سیستم‌های موجودی مربوط است که در مثال روزنامه فروش یک حالت ساده از آن را بررسی کردیم. سیستم ساده موجودی در شکل زیر نشان داده شده است.



این سیستم موجودی، مروری دوره ای به طول N دارد که در آن، سطح موجودی بررسی می‌شود و سفارشی به نحوی انجام می‌شود که سطح موجودی به M برسد. در پایان اولین دوره، سفارشی به مقدار Q_1 صادر می‌شود. در این مثال فرض می‌شود که فاصله بین صدور و دریافت سفارش برابر صفر است. مقدار تقاضا دارای تابع توزیع احتمالی است.

در پایان دوره سوم، مقدار موجودی در دور دوم به زیر صفر کاهش می‌یابد که این موضوع معرف کمبود است. مقداری که زیر خط زمان است که سفارش‌های تحویل نشده است. هر گاه سفارشی برسد، ابتدا به تقاضای مربوط به اقلام تحویل نشده پاسخ داده می‌شود. برای پرهیز از این اتفاق تلاش می‌شود که یک ذخیره یا موجودی اطمینان در منبع داشته باشیم و اگر سطح موجودی زیر موجودی اطمینان برود، سفارش داده می‌شود. در مسئله سیستم‌های موجودی، مقدار M و N می‌تواند به عنوان فاکتور کنترلی تغییر کند تا عملکرد سیستم بهبود یابد.

مثال: شبیه‌سازی سیستم موجودی (M, N)

فرض کنید که بالاترین سطح موجودی، M ، برابر ۱۱ و دوره بررسی، N ، برابر ۵ روز در نظر گرفته شده است. در این مسئله به دنبال برآورد متوسط موجود انبار در پایان روز و تعداد روزهایی که شرایط کمبود به وجود می‌آید، از طریق شبیه‌سازی هستیم. تابع توزیع تقاضا در روز به صورت جدول زیر است.

مقدار تقاضا	احتمال	احتمال تجمعی	ارقام تصادفی
۰	۰,۱	۰,۱	۱ الی ۱۰
۱	۰,۲۵	۰,۳۵	۱۱ الی ۳۵
۲	۰,۳۵	۰,۷	۳۶ الی ۷۰
۳	۰,۲۱	۰,۹۱	۷۱ الی ۹۱
۴	۰,۰۹	۱	۹۲ الی ۱۰۰

مدت زمان تحویل سفارشات یک تابع توزیع تصادفی به صورت زیر است.

مهلت تحویل (روز)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰,۶	۰,۶	۱ الی ۶
۲	۰,۳	۰,۹	۷ الی ۹
۳	۰,۱	۱	۱۰

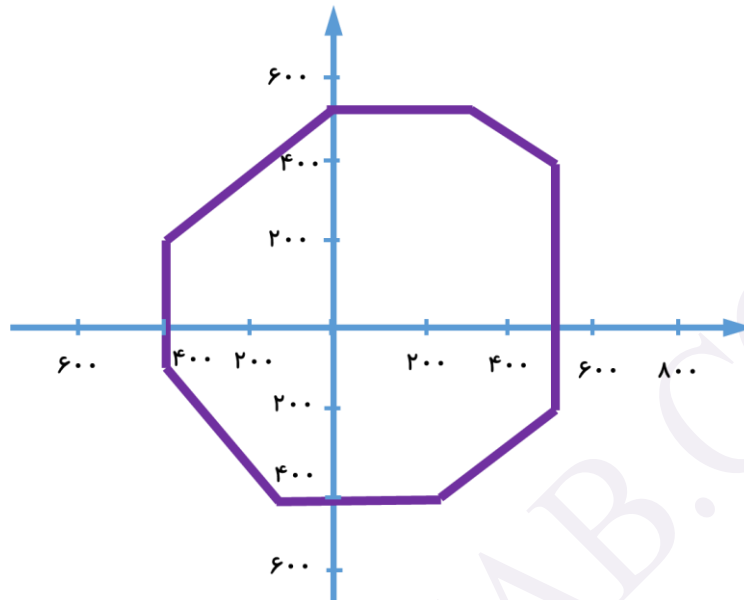
توجه کنید که سفارش‌ها در پایان روز صادر می‌شود و در ابتدای روز بعد وارد می‌شود. در این مثال برآورد میانگین واحدهای مانده در انبار برای ۵ دوره بدست می‌آید. شبیه‌سازی از سطح موجودی ۳ واحد شروع می‌شود. یک سفارش به میزان ۸ واحد در دو روز آینده برنامه ریزی شده است یعنی این سفارش در ابتدای روزی سوم وارد انبار می‌شود. موجودی در انتهای روز دوم برابر ۱ است که با رسیدن سفارش ۸ در ابتدای روزی سوم، موجود انبار برابر با ۹ می‌شود. در انتهای هر دور، به اندازه مجموع تقاضای آن دوره، سفارش داده می‌شود که دو روز بعد از سفارش به محل انبار می‌رسد. برای دوره دوم، تقاضا برابر با $۹=۲+۳+۱+۳$ است لذا سفارش این دوره برابر ۹ است.

براساس ۵ دوره شبیه‌سازی، متوسط موجودی در پایان روز تقریباً برابر با $\frac{87}{25} \approx 3.5$ می‌شود و دو روز از

۲۵ روز این شبیه‌سازی با کمبود مواجه می‌شویم.

دور	روز	موجود در ابتدای روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	موجودی در انتهای روز	مقدار کمبود	مقدار سفارش	ارقام تصادفی برای مهلت تحویل	روزهای مانده تا ورود سفارش	
۱	۱	۳	۲۴	۱	۲	۰	-	-	۱	
	۲	۲	۳۵	۱	۱	۰	-	-	۰	
	۳	۹	۶۵	۲	۷	۰	-	-	-	
	۴	۷	۸۱	۳	۴	۰	-	-	-	
	۵	۴	۵۴	۲	۲	۰	۹	۵	۱	
۲	۱	۲	۰۳	۰	۲	۰	-	-	۰	
	۲	۱۱	۸۷	۳	۸	۰	-	-	-	
	۳	۸	۲۷	۱	۷	۰	-	-	-	
	۴	۷	۷۳	۳	۴	۰	-	-	-	
	۵	۴	۷۰	۲	۲	۰	۹	۰	۳	
۳	۱	۲	۴۷	۲	۰	۰	-	-	۲	
	۲	۰	۴۵	۲	۰	۲	-	-	۱	
	۳	۰	۴۸	۲	۰	۴	-	-	۰	
	۴	۹	۱۷	۱	۴	۰	-	-	-	
	۵	۴	۰۹	۰	۴	۰	۷	۳	۱	
۴	۱	۴	۴۲	۲	۲	۰	-	-	۰	
	۲	۹	۸۷	۳	۶	۰	-	-	-	
	۳	۶	۲۶	۱	۵	۰	-	-	-	
	۴	۵	۳۶	۲	۳	۰	-	-	-	
	۵	۳	۴۰	۲	۱	۰	۱۰	۴	۱	
۵	۱	۱	۰۷	۰	۱	۰	-	-	۰	
	۲	۱۱	۶۳	۲	۹	۰	-	-	-	
	۳	۹	۱۹	۱	۸	۰	-	-	-	
	۴	۸	۸۸	۳	۵	۰	-	-	-	
	۵	۵	۹۴	۴	۱	۰	۱۰	۸	۱	
					۸۷	مجموع				

مثال: یک مساله قدیمی شبیه‌سازی، مربوط به یک اسکادران بمب افکن است که سعی در نابودسازی یک زاغه مهمات دارد که به صورت نشان داده شده در شکل زیر است.



اگر بمبی در هر نقطه از زاغه فرود آید موفقیت و در غیر این صورت شکست حاصل شده است. هواپیما در جهت افقی پرواز می‌کند. بمب‌های پرتاب شده در جهت افقی، با انحراف معیار ۶۰۰ متر به زمین می‌افتند. در جهت عمودی، نیز با انحراف معیار ۳۰۰ متر می‌افتند. هر اسکادران ۵ بمب افکن دارد. نقطه ای که نشانه روی می‌شود، نقطه ای واقع در قلب زاغه است. هدف مساله شبیه‌سازی عملیات و اظهار نظر در مورد تعداد بمب‌های به هدف نشسته است.

به یاد دارید که مقدار تصادفی نرمال استاندارد، Z ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

توزیع می‌شود که در آن X یک متغیر تصادفی نرمال، μ میانگین واقعی توزیع X ، و σ انحراف

معیار X است. بنابراین:

$$X = Z\sigma + \mu$$

نقطه هدف گیری شده در این مثال نقطه $(0,0)$ در نظر گرفته شود، یعنی مقدار μ در جهت افقی و مقدار μ در جهت عمودی صفر است. بنابراین:

$$X = Z \sigma_X$$

$$Y = Z \sigma_Y$$

که (X, Y) مختصات شبیه‌سازی شده محل اصابت بمب است. حالا، در نظر بگیرید: $\sigma_X = 600$ و $\sigma_Y = 300$ پس داریم:

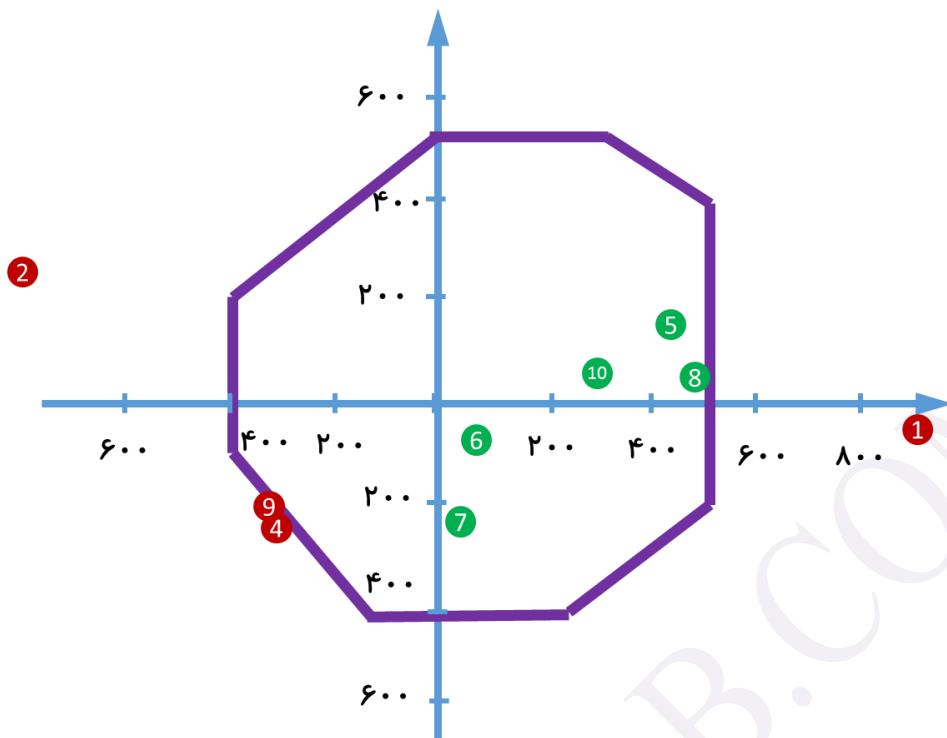
$$X = 600Z_i$$

$$Y = 300Z_j$$

اندیس‌های i و j به این دلیل افزوده شده است که متفاوت بودن مقادیر Z را نشان دهد و برای تولید X و Y از یک عدد تصادفی استفاده نشود. مقادیر Z اعداد تصادفی نرمال هستند که در درس‌های آینده نحوه تولید این اعداد به تشریح بیان خواهد شود. برای این مثال می‌توان از جداول اعداد تصادفی نرمال استفاده کرد.

بمب	RNNx	400RNNx	RNNy	200RNNy	نتیجه
۱	۲,۲۲۹۶	۸۹۱,۸	-۰,۱۹۳۲	-۳۸,۶	عدم اصابت
۲	-۲,۰۰۳۵	-۸۰۱,۴	۱,۳۰۳۴	۲۶۰,۷	عدم اصابت
۳	-۳,۱۴۳۲	-۱۲۵۷,۳	۰,۳۲۸۶	۶۵,۷	عدم اصابت
۴	-۰,۷۹۶۸	-۳۱۸,۷	-۱,۱۴۱۷	-۲۲۸,۳	عدم اصابت
۵	۱,۰۷۴۱	۴۲۹,۶	۰,۷۶۱۲	۱۵۲,۲	اصابت
۶	۰,۱۲۶۵	۵۰,۶	-۰,۳۰۹	-۶۲,۰	اصابت
۷	۰,۰۶۱۱	۲۴,۵	-۱,۱۰۶۶	-۲۲۱,۳	اصابت
۸	۱,۲۱۸۲	۴۸۷,۳	۰,۲۴۸۷	۴۹,۷	اصابت
۹	-۰,۸۰۲۶	-۳۲۱	-۱,۰۰۹۸	-۲۰۲,۰	عدم اصابت
۱۰	۰,۷۳۲۴	۲۹۳	۰,۲۵۵۲	۵۱	اصابت

نتایج شبیه‌سازی در شکل زیر نشان داده شده است. همان طور که روشن است، از میان ۱۰ شلیک بمب، ۵ تا از آن‌ها به هدف می‌خورد و مابقی بی اثر خواهد بود.



تمرین: در مورد سیستم‌های زیر، چند نهاد، خصیصه، فعالیت، پیشامد، و متغیر حالت را نام ببرید.

الف) تعمیرگاه وسایل برقی خانگی

ب) کافه تریا

ج) فروشگاه مواد غذایی

د) لباسشویی عمومی

ه) غذاخوری سرپایی

حل:

ویژگی‌های سیستم برای موارد بالا در جدول زیر ارائه شده است.

مورد	نهاده	خصیصه	فعالیت	پیشامد	متغیر حالت
تعمیرگاه وسایل برقی خانگی	وسایل برقی خانگی	نوع وسیله خانگی عمر وسیله خانگی ماهیت مشکل	تعمیر وسیله	ورودی یک درخواست تعمیر اتمام کار	تعداد وسایل در صف تعمیر وضعیت تعمیرکار
کافه تریا	سفارش غذا	اندازه وعده غذایی علاقه مشتری	انتخاب غذا پرداخت برای غذا	ورود به خط سرویس دهی خروج از خط سرویس دهی	تعداد سفارش در صف انتظار تعداد کارمند در حال کار
فروشگاه مواد غذایی	خریدار	لیست درخواست برای خرید	پرداخت هزینه لیست درخواست	ورود به کانتر پرداخت خروج از کانتر پرداخت	تعداد خریداران در صف تعداد کانترهای فعال
لباس شویی عمومی	ماشین لباس شویی	نرخ خرابی	تعمیر ماشین لباس شویی	اتفاق خرابی تکمیل سرویس	تعداد ماشین لباس شویی در حال کار تعداد ماشین لباس شویی در حال تعمیر تعداد ماشین لباس شویی در صف تعمیر
غذاخوری سرپایی	مشتری	اندازه سفارش	سفارش خرید پرداخت سفارش	ورود مشتری پایان خرید	تعداد مشتریان در صف انتظار تعداد کارهای در حال کار

تمرین: قرار است پخت اسپاگتی برای شام شبیه‌سازی و تعیین شود که برای حاضر بودن شام راس ساعت ۷ شب بر روی میز، چه موقع باید کار را شروع کرد. به منظور اجرای شبیه‌سازی به نحوی که مدل همه مراحل تهیه غذا را در بر داشته باشد، در قسمت گردآوری داده فرایند شبیه‌سازی، چه اطلاعاتی باید جمع آوری شود؟ رخدادهای، فعالیت‌ها، و متغیرهای حالت در این مثال را تشریح نمایید.

حل:

داده‌های مورد نیاز در این مسئله به صورت زیر است:

- ✓ تعداد مهمان‌های دعوت شده
- ✓ زمان مورد نیاز برای جوش آمده آب
- ✓ زمان مورد نیاز برای پختن پاستا
- ✓ زمان مورد نیاز برای خرد کردن پیاز، فلفل دلمه و قارچ
- ✓ زمان مورد نیاز برای سرخ کردن پیاز، فلفل دلمه، قارچ و گوشت
- ✓ زمان مورد نیاز برای اضافه کردن ادویه جات
- ✓ زمان مورد نیاز برای اضافه کردن سس گوجه فرنگی
- ✓ زمان مورد نیاز برای سرخ کردن سس
- ✓ زمان مورد نیاز برای چیدن میز
- ✓ زمان مورد نیاز برای آب کشی پاستا
- ✓ زمان مورد نیاز برای سرو پاستا و سس آن

رخدادهایی که در تهیه پاستا باید در نظر گرفته به صورت زیر است:

- ✓ اتمام پختن پاستا
- ✓ اتمام پختن سس
- ✓ ورود مشتری
- ✓ آغاز خوردن

فعالیت‌هایی که در تهیه پاستا باید در نظر گرفته به صورت زیر است:

- ✓ جوش آوردن آب
- ✓ پختن پاستا
- ✓ پختن سس
- ✓ سرو کردن غذا برای مشتری

متغیرهای حالتی که در تهیه پاستا باید در نظر گرفته به صورت زیر است:

- ✓ تعداد مشتریان
- ✓ وضعیت آب (جوش آمده یا نیامده)
- ✓ وضعیت پاستا (آماده یا غیر آماده)
- ✓ وضعیت سس (آماده یا غیر آماده)

تمرین: یک شرکت تاکسی رانی بین ساعت ۹ صبح الی ۵ بعدازظهر (مدت ۸ ساعت) با یک تاکسی فعالیت می‌کند. در حال حاضر، افزودن تاکسی دومی به این اتومبیل در دست بررسی است. تقاضا برای تاکسی از توزیع نشان داده شده در زیر پیروی می‌کند:

۴۵	۳۵	۲۵	۱۵	۵	مدت زمان خدمت دهی (دقیقه)
۰,۰۴	۰,۰۶	۰,۴۳	۰,۲۵	۰,۱۲	احتمال

۳۵	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵	زمان بین دو تقاضای تلفنی (دقیقه)
۰,۰۴	۰,۱۷	۰,۴۳	۰,۲۲	۰,۱۴	احتمال

پنج روز کار سیستم فعلی و سیستم با یک تاکسی اضافه را شبیه‌سازی کنید. دو سیستم را بر حسب مدت‌های انتظار مشتریان و هر معیار مناسب دیگری مقایسه کنید.

حل:

برای تولید اعداد تصادفی برای زمان سرویس دهی و زمان بین دو ورود متوالی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مدت زمان خدمت دهی	احتمال	احتمال تجمعی	ارقام تصادفی
۵	۰.۱	۰.۱	۱ الی ۱۰
۱۵	۰.۲	۰.۳	۱۱ الی ۳۰
۲۵	۰.۴۳	۰.۷۳	۳۱ الی ۷۳
۳۵	۰.۲۱	۰.۹۴	۷۴ الی ۹۴
۴۵	۰.۰۶	۱	۹۵ الی ۱۰۰

مدت زمان بین دو تقاضای تلفنی	احتمال	احتمال تجمعی	ارقام تصادفی
۱۵	۰.۱۴	۰.۱۴	۱ الی ۱۴
۲۰	۰.۲۲	۰.۳۶	۱۵ الی ۳۶
۲۵	۰.۴۳	۰.۷۹	۳۷ الی ۷۹
۳۰	۰.۱۷	۰.۹۶	۸۰ الی ۹۶
۳۵	۰.۰۴	۱.۰۰	۹۷ الی ۱۰۰

نتایج شبیه‌سازی برای یک تاکسی و دو تاکسی برای ۵ روز به صورت جدول‌های زیر می‌شود.

جدول شبیه‌سازی برای یک تاکسی برای ۸ ساعت (روز اول و دوم)

روز	شماره تماس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان تماس ها	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	مدت زمان خدمت دهی	زمان آغاز تماس	زمان انتظار مشتری	زمان اتمام خدمت	زمان بودن مشتری در سیستم	زمان مشغول بودن تاکسی
۱	۱	۲۹	-	۰	۱۵	۲۱	۰	۱۵	۱۵	۱۵
	۲	۲۰	۲۰	۲۰	۲۵	۵۱	۲۰	۴۵	۲۵	۲۵
	۳	۶۹	۲۵	۴۵	۵	۳	۴۵	۵۰	۵	۵
	۴	۶۹	۲۵	۷۰	۲۵	۴۹	۷۰	۹۵	۲۵	۲۵
	۵	۹۴	۳۰	۱۰۰	۳۵	۸۱	۱۰۰	۱۳۵	۳۵	۳۵
	۶	۶۸	۲۵	۱۲۵	۱۵	۳۰	۱۲۵	۱۵۰	۲۵	۱۵
	۷	۸۷	۳۰	۱۵۵	۲۵	۵۳	۱۵۵	۱۸۰	۲۵	۲۵
	۸	۶۵	۲۵	۱۸۰	۳۵	۸۳	۱۸۰	۲۱۵	۳۵	۳۵
	۹	۹۷	۳۵	۲۱۵	۵	۱۰	۲۱۵	۲۲۰	۵	۵
	۱۰	۵۶	۲۵	۲۴۰	۲۵	۵۸	۲۴۰	۲۶۵	۲۵	۲۵
	۱۱	۷۲	۲۵	۲۶۵	۲۵	۷۳	۲۶۵	۲۹۰	۲۵	۲۵
	۱۲	۴۶	۲۵	۲۹۰	۱۵	۲۱	۲۹۰	۳۰۵	۱۵	۱۵
	۱۳	۴۴	۲۵	۳۱۵	۳۵	۹۱	۳۱۵	۳۵۰	۳۵	۳۵
	۱۴	۳۷	۲۵	۳۴۰	۲۵	۶۲	۳۴۰	۳۷۵	۲۵	۳۵
	۱۵	۸۳	۳۰	۳۷۰	۲۵	۵۴	۳۷۵	۴۰۰	۳۰	۲۵
	۱۶	۶۸	۲۵	۳۹۵	۳۵	۷۶	۳۹۵	۴۳۵	۳۵	۳۵
	۱۷	۷۰	۲۵	۴۲۰	۳۵	۹۰	۴۲۰	۴۷۰	۳۵	۳۵
	۱۸	۹۹	۳۵	۴۵۵	۲۵	۶۹	۴۵۵	۴۹۵	۲۵	۳۵
	۱۹	۱۷	۲۰	۴۷۵	۲۵	۵۷	۴۷۵	۵۲۰	۲۰	۳۵
۲	۱	۹۳	-	۰	۵	۹	۰	۵	۵	۵
	۲	۵۵	۲۵	۲۵	۲۵	۳۹	۲۵	۵۰	۲۵	۲۵
	۳	۵۸	۲۵	۵۰	۴۵	۱۰۰	۵۰	۹۵	۴۵	۴۵
	۴	۶۱	۲۵	۷۵	۲۵	۵۵	۷۵	۱۱۵	۲۰	۲۰
	۵	۸۷	۳۰	۱۰۵	۲۵	۶۲	۱۰۵	۱۴۰	۳۵	۲۵
	۶	۶۱	۲۵	۱۳۰	۳۵	۸۱	۱۳۰	۱۷۵	۴۵	۲۵
	۷	۸۱	۳۰	۱۶۰	۵	۱۰	۱۶۰	۱۸۰	۲۰	۵
	۸	۱۰۰	۳۵	۱۹۵	۳۵	۷۹	۱۹۵	۲۳۰	۳۵	۳۵
	۹	۶۱	۲۵	۲۲۰	۱۵	۳۰	۲۲۰	۲۴۵	۲۵	۱۵
	۱۰	۴۰	۲۵	۲۴۵	۲۵	۴۴	۲۴۵	۲۷۰	۲۵	۲۵
	۱۱	۱۲	۱۵	۲۶۰	۲۵	۴۰	۲۶۰	۲۹۵	۱۰	۳۵
	۱۲	۸۴	۳۰	۲۹۰	۱۵	۲۶	۲۹۰	۳۱۰	۲۰	۱۵
	۱۳	۵۱	۲۵	۳۱۵	۳۵	۹۲	۳۱۵	۳۵۰	۳۵	۲۵
	۱۴	۱۰	۱۵	۳۳۰	۲۵	۳۷	۳۳۰	۳۷۵	۴۵	۲۵
	۱۵	۷	۱۵	۳۴۵	۲۵	۶۷	۳۴۵	۴۰۰	۵۵	۲۵
	۱۶	۵۴	۲۵	۳۷۰	۱۵	۱۷	۳۷۰	۴۱۵	۴۵	۱۵
	۱۷	۸۳	۳۰	۴۰۰	۲۵	۵۷	۴۰۰	۴۴۰	۴۰	۲۵
	۱۸	۹۴	۳۰	۴۳۰	۲۵	۵۳	۴۳۰	۴۶۵	۳۵	۲۵
	۱۹	۸۷	۳۰	۴۶۰	۲۵	۴۶	۴۶۰	۴۹۰	۳۰	۲۵

جدول شبیه‌سازی برای یک تاکسی برای ۸ ساعت (روز سوم و چهارم)

روز	شماره تماس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان تماس ها	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	مدت زمان خدمت دهی	زمان آغاز تماس	زمان انتظار مشتری	زمان اتمام خدمت	زمان بودن مشتری در سیستم	زمان مشغول بودن تاکسی
۳	۱	۵۰	-	۵۸	۲۵	۰		۲۵	۲۵	۲۵
	۲	۵۲	۲۵	۱۷	۱۵	۲۵		۴۰	۱۵	۱۵
	۳	۵۶	۲۵	۴	۵	۵۰		۵۵	۵	۵
	۴	۵۷	۲۵	۴۴	۲۵	۷۵		۱۰۰	۲۵	۲۵
	۵	۶۴	۲۵	۷۱	۲۵	۱۰۰		۱۲۵	۲۵	۲۵
	۶	۱۸	۲۰	۲۹	۱۵	۱۲۰	۵	۱۴۰	۲۰	۲۰
	۷	۴۷	۲۵	۷۷	۳۵	۱۴۵		۱۸۰	۳۵	۳۵
	۸	۵۸	۲۵	۳۹	۲۵	۱۷۰	۱۰	۲۰۵	۲۵	۳۵
	۹	۸۵	۳۰	۳۱	۲۵	۲۰۰	۵	۲۳۰	۳۰	۳۰
	۱۰	۹۷	۳۵	۵۷	۲۵	۲۳۵		۲۶۰	۲۵	۲۵
	۱۱	۶۱	۲۵	۵۷	۲۵	۲۶۰		۲۸۵	۲۵	۲۵
	۱۲	۴۵	۲۵	۹۹	۴۵	۲۸۵		۳۳۰	۲۵	۴۵
	۱۳	۷۸	۲۵	۲۹	۱۵	۳۱۰	۲۰	۳۴۵	۲۵	۳۵
	۱۴	۶۴	۲۵	۶	۵	۳۳۵	۱۰	۳۵۰	۲۵	۱۵
	۱۵	۷۲	۲۵	۱۲	۱۵	۳۶۰		۳۷۵	۲۵	۱۵
	۱۶	۲۶	۲۰	۱۰۰	۴۵	۳۸۰		۴۲۵	۲۰	۴۵
	۱۷	۴۹	۲۵	۷۰	۲۵	۴۰۵	۲۰	۴۵۰	۲۵	۴۵
	۱۸	۷	۱۵	۲۰	۱۵	۴۲۰	۳۰	۴۶۵	۱۵	۴۵
	۱۹	۲۷	۲۰	۵	۵	۴۴۰	۲۵	۴۷۰	۲۰	۳۰
	۲۰	۷۵	۲۵	۷۷	۳۵	۴۶۵	۵	۵۰۵	۲۵	۴۰
۴	۱	۶۳	-	۱۶	۱۵	۰		۱۵	۱۵	۱۵
	۲	۴۶	۲۵	۱۷	۱۵	۲۵		۴۰	۱۵	۱۵
	۳	۲۳	۲۰	۱۴	۱۵	۴۵		۶۰	۱۵	۱۵
	۴	۹۶	۳۰	۱۹	۱۵	۷۵		۹۰	۱۵	۱۵
	۵	۶۴	۲۵	۷۴	۳۵	۱۰۰		۱۳۵	۳۵	۳۵
	۶	۲۴	۲۰	۷	۵	۱۲۰	۱۵	۱۴۰	۲۰	۲۰
	۷	۴۱	۲۵	۷۵	۳۵	۱۴۵		۱۸۰	۳۵	۳۵
	۸	۲۴	۲۰	۴۸	۲۵	۱۶۵	۱۵	۲۰۵	۲۰	۴۰
	۹	۶	۱۵	۸	۵	۱۸۰	۲۵	۲۱۰	۱۵	۳۰
	۱۰	۱۴	۱۵	۴	۵	۱۹۵	۱۵	۲۱۵	۱۵	۲۰
	۱۱	۲۸	۲۰	۲۷	۱۵	۲۱۵		۲۳۰	۲۰	۱۵
	۱۲	۹۸	۳۵	۵۹	۲۵	۲۵۰		۲۷۵	۳۵	۲۵
	۱۳	۱۹	۲۰	۳۸	۲۵	۲۷۰	۵	۳۰۰	۲۰	۳۰
	۱۴	۵۸	۲۵	۷۶	۳۵	۲۹۵	۵	۳۳۵	۲۵	۴۰
	۱۵	۶۶	۲۵	۲۶	۱۵	۳۲۰	۱۵	۳۳۵	۲۵	۳۰
	۱۶	۳	۱۵	۴۸	۲۵	۳۳۵	۱۵	۳۷۵	۱۵	۴۰
	۱۷	۵	۱۵	۷۲	۲۵	۳۵۰	۲۵	۳۷۵	۱۵	۵۰
	۱۸	۲۱	۲۰	۷۸	۳۵	۳۷۰	۳۰	۴۳۵	۲۰	۶۵
	۱۹	۹۹	۳۵	۳۰	۱۵	۴۰۵	۳۰	۴۵۰	۳۵	۴۵
	۲۰	۷۷	۲۵	۷۶	۳۵	۴۳۰	۲۰	۴۸۵	۲۵	۵۵
	۲۱	۸۰	۳۰	۱۶	۱۵	۴۶۰	۲۵	۵۰۰	۳۰	۴۰

جدول شبیه‌سازی برای یک تاکسی برای ۸ ساعت (روز پنجم)

روز	شماره تماس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان بین دو تماس	زمان تماس‌ها	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	مدت زمان خدمت دهی	زمان آغاز تماس	زمان انتظار مشتری	زمان اتمام خدمت	زمان بودن مشتری در سیستم	زمان مشغول بودن تاکسی
۵	۱	۷	-	۰	۲۶	۱۵	۰		۱۵	۱۵	۱۵
	۲	۸۱	۳۰	۳۰	۱۹	۱۵	۳۰		۴۵	۱۵	۱۵
	۳	۲۳	۲۰	۵۰	۱۵	۱۵	۵۰		۶۵	۱۵	۱۵
	۴	۴۶	۲۵	۷۵	۹۱	۳۵	۷۵		۱۱۰	۳۵	۳۵
	۵	۹۷	۳۵	۱۱۰	۶۱	۲۵	۱۱۰		۱۳۵	۲۵	۲۵
	۶	۹۶	۳۰	۱۴۰	۴۸	۲۵	۱۴۰		۱۶۵	۲۵	۲۵
	۷	۲۸	۲۰	۱۶۰	۱۰	۵	۱۶۵	۵	۱۷۰	۱۰	۵
	۸	۸۳	۳۰	۱۹۰	۹۷	۴۵	۱۹۰		۲۳۵	۴۵	۴۵
	۹	۷۴	۲۵	۲۱۵	۶۷	۲۵	۲۱۵	۲۰	۲۶۰	۴۵	۲۵
	۱۰	۱	۱۵	۲۳۰	۲۳	۱۵	۲۳۰	۳۰	۲۷۵	۴۵	۱۵
	۱۱	۲۲	۲۰	۲۵۰	۶۸	۲۵	۲۷۵	۲۵	۳۰۰	۵۰	۲۵
	۱۲	۴	۱۵	۲۶۵	۱۰	۵	۳۰۰	۳۵	۳۰۵	۴۰	۵
	۱۳	۵۲	۲۵	۲۹۰	۶۱	۲۵	۳۰۵	۱۵	۳۲۰	۴۰	۲۵
	۱۴	۵	۱۵	۳۰۵	۳۹	۲۵	۳۲۰	۲۵	۳۵۵	۵۰	۲۵
	۱۵	۲۹	۲۰	۳۲۵	۴۷	۲۵	۳۵۵	۳۰	۳۸۰	۵۵	۲۵
	۱۶	۵۷	۲۵	۳۵۰	۱۸	۱۵	۳۸۰	۳۰	۳۹۵	۴۵	۱۵
	۱۷	۱۶	۲۰	۳۷۰	۵۱	۲۵	۳۹۵	۲۵	۴۲۰	۵۰	۲۵
	۱۸	۵۳	۲۵	۳۹۵	۶۵	۲۵	۴۲۰	۲۵	۴۴۵	۵۰	۲۵
	۱۹	۱۹	۲۰	۴۱۵	۸۴	۳۵	۴۴۵	۳۰	۴۸۰	۶۵	۳۵
	۲۰	۵۲	۲۵	۴۴۰	۵۴	۲۵	۴۸۰	۴۰	۵۰۵	۶۵	۲۵
	۲۱	۱۱	۱۵	۴۵۵	۵۸	۲۵	۵۰۵	۵۰	۵۳۰	۷۵	۲۵
	۲۲	۴۱	۲۵	۴۸۰	۹۳	۳۵	۵۳۰	۵۰	۵۶۵	۸۵	۳۵

نتایج مهم جدول فوق را به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

✓ **کل زمان شبیه‌سازی** به این صورت محاسبه می‌شود که برابر با مجموع زمان‌های اتمام

خدمت در انتهای هر روز است که در این جا برابر با $520 + 490 + 505 + 500 + 565 = 2580$

(دقیقه) می‌شود.

✓ **کل زمان مشغول بودن تاکسی** برابر با مجموع اختلاف زمان اتمام خدمت دهی و زمان آغاز

درخواست است که برابر با ۲۱۵۵ دقیقه می‌شود.

✓ **کل زمان بیکاری تاکسی** به این صورت محاسبه می‌شود که برابر با اختلاف کل زمان

شبیه‌سازی و کل زمان مشغول بودن تاکسی است که برابر ۴۲۵ دقیقه است.

✓ **کل مشتریان سرویس‌گیری شده** در ۵ روز برابر با ۱۰۱ است.

✓ متوسط زمان بیکاری تاکسی مورد نظر برای هر تماس (یا درخواست) از تقسیم کل زمان

$$\text{بیکاری بر تعداد کل مشتریان بدست می‌آید که برابر } \frac{425}{101} = 4.2 \text{ دقیقه است.}$$

✓ درصد بیکاری تاکسی از تقسیم کل زمان بیکاری تاکسی بر کل زمان شبیه‌سازی بدست

$$\text{می‌آید که برابر با } 0.164 = \frac{425}{2580} \text{ است.}$$

✓ کل مدت زمان انتظار مشتریان برابر با ۱۰۷۵ دقیقه است.

✓ تعداد مشتریانی که انتظار تاکسی را تجربه می‌کنند برابر با ۵۷ است.

✓ احتمال این که یک مشتری با تاخیر روبرو شود از تقسیم تعداد مشتریانی که انتظار را

$$\text{تجربه می‌کنند بر تعداد کل مشتریان بدست می‌آید که برابر با } \frac{57}{101} = 0.564 \text{ است.}$$

✓ متوسط زمان تاخیری یک مشتری از تقسیم کل زمان انتظار برای تاکسی بر تعداد کل

$$\text{مشتریان بدست می‌آید که برابر با } 10.64 = \frac{1075}{101} \text{ دقیقه است.}$$

جدول شبیه‌سازی برای دو تاکسی به مدت پنج روز (روز اول و دوم)

روز	شماره تماس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان بین دو تماس	زمان تماس	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	زمان خدمت دهی	تاکسی ۱		تاکسی ۲		زمان مشغول بودن تاکسی ۲	زمان مشغول بودن تاکسی ۱	زمان مشتری در سیستم	زمان انتظار مشتری	زمان خدمت دهی ۲	پایان زمان خدمت دهی ۲	آغاز زمان خدمت دهی ۲	پایان زمان خدمت دهی ۱	زمان آغاز خدمت دهی ۱	زمان خدمت دهی	
							پایان زمان خدمت دهی ۱	آغاز زمان خدمت دهی ۱	پایان زمان خدمت دهی ۲	آغاز زمان خدمت دهی ۲											
۱	۱	۲۹	-	۰	۲۱	۱۵	۰	۱۵	۱۵	۰	۱۵	۱۵									
	۲	۲۰	۲۰	۲۰	۵۱	۲۵	۲۰	۴۵	۴۵	۲۰	۲۵	۲۵									
	۳	۶۹	۲۵	۴۵	۳	۵	۴۵	۵۰	۵۰	۴۵	۵	۵									
	۴	۶۹	۲۵	۷۰	۴۹	۲۵	۷۰	۹۵	۹۵	۲۵	۲۵	۲۵									
	۵	۹۴	۳۰	۱۰۰	۸۱	۳۵	۱۰۰	۱۳۵	۱۳۵	۳۵	۳۵	۳۵									
	۶	۶۸	۲۵	۱۲۵	۳۰	۱۵	۱۲۵	۱۴۰	۱۲۵	۱۵	۰	۱۵									
	۷	۸۷	۳۰	۱۵۵	۵۳	۲۵	۱۵۵	۱۸۰	۱۵۵	۲۵	۲۵	۲۵									
	۸	۶۵	۲۵	۱۸۰	۸۳	۳۵	۱۸۰	۲۱۵	۱۸۰	۳۵	۳۵	۳۵									
	۹	۹۷	۳۵	۲۱۵	۱۰	۵	۲۱۵	۲۲۰	۲۱۵	۵	۵	۵									
	۱۰	۵۶	۲۵	۲۴۰	۵۸	۲۵	۲۴۰	۲۶۵	۲۴۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۱	۷۲	۲۵	۲۶۵	۷۳	۲۵	۲۶۵	۲۹۰	۲۶۵	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۲	۴۶	۲۵	۲۹۰	۲۱	۱۵	۲۹۰	۳۰۵	۲۹۰	۱۵	۱۵	۱۵									
	۱۳	۴۴	۲۵	۳۱۵	۹۱	۳۵	۳۱۵	۳۵۰	۳۱۵	۳۵	۳۵	۳۵									
	۱۴	۳۷	۲۵	۳۴۰	۶۲	۲۵	۳۴۰	۳۶۵	۳۴۰	۲۵	۰	۲۵									
	۱۵	۸۳	۳۰	۳۷۰	۵۴	۲۵	۳۷۰	۳۹۵	۳۷۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۶	۶۸	۲۵	۳۹۵	۷۶	۳۵	۳۹۵	۴۳۰	۳۹۵	۳۵	۳۵	۳۵									
	۱۷	۷۰	۲۵	۴۲۰	۹۰	۳۵	۴۲۰	۴۵۵	۴۲۰	۳۵	۰	۳۵									
	۱۸	۹۹	۳۵	۴۵۵	۶۹	۲۵	۴۵۵	۴۸۰	۴۵۵	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۹	۱۷	۲۰	۴۷۵	۵۷	۲۵	۴۷۵	۵۰۰	۴۷۵	۲۵	۲۵	۲۵									
۲	۱	۹۳	-	۰	۹	۵	۵	۵	۵	۵	۵										
	۲	۵۵	۲۵	۲۵	۳۹	۲۵	۵۰	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵										
	۳	۵۸	۲۵	۵۰	۱۰۰	۴۵	۹۵	۵۰	۴۵	۴۵	۴۵										
	۴	۶۱	۲۵	۷۵	۵۵	۲۵	۷۵	۱۰۰	۲۵	۲۵	۲۵										
	۵	۸۷	۳۰	۱۰۵	۶۲	۲۵	۱۳۰	۱۰۵	۲۵	۲۵	۲۵										
	۶	۶۱	۲۵	۱۳۰	۸۱	۳۵	۱۶۵	۱۳۰	۳۵	۳۵	۳۵										
	۷	۸۱	۳۰	۱۶۰	۱۰	۵	۱۶۰	۱۶۰	۱۶۰	۵	۵	۵									
	۸	۱۰۰	۳۵	۱۹۵	۷۹	۳۵	۱۹۵	۲۳۰	۱۹۵	۳۵	۳۵	۳۵									
	۹	۶۱	۲۵	۲۲۰	۳۰	۱۵	۲۲۰	۲۳۵	۲۲۰	۱۵	۱۵	۱۵									
	۱۰	۴۰	۲۵	۲۴۵	۴۴	۲۵	۲۴۵	۲۷۰	۲۴۵	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۱	۱۲	۱۵	۲۶۰	۴۰	۲۵	۲۶۰	۲۸۵	۲۶۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۲	۸۴	۳۰	۲۹۰	۲۶	۱۵	۲۹۰	۳۰۵	۲۹۰	۱۵	۱۵	۱۵									
	۱۳	۵۱	۲۵	۳۱۵	۹۲	۳۵	۳۱۵	۳۵۰	۳۱۵	۳۵	۳۵	۳۵									
	۱۴	۱۰	۱۵	۳۳۰	۳۷	۲۵	۳۳۰	۳۵۵	۳۳۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۵	۷	۱۵	۳۴۵	۶۷	۲۵	۳۴۵	۳۷۵	۳۵۰	۲۵	۲۵	۲۵		۵							
	۱۶	۵۴	۲۵	۳۷۰	۱۷	۱۵	۳۷۰	۳۸۵	۳۷۰	۱۵	۱۵	۱۵									
	۱۷	۸۳	۳۰	۴۰۰	۵۷	۲۵	۴۰۰	۴۲۵	۴۰۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۸	۹۴	۳۰	۴۳۰	۵۳	۲۵	۴۳۰	۴۵۵	۴۳۰	۲۵	۲۵	۲۵									
	۱۹	۸۷	۳۰	۴۶۰	۴۶	۲۵	۴۶۰	۴۸۵	۴۶۰	۲۵	۲۵	۲۵									

جدول شبیه‌سازی برای دو تاکسی به مدت پنج روز (روز سوم و چهارم)

روز	شماره تاکس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان بین دو تماس	زمان تماس	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	زمان خدمت دهی	تاکسی ۱		تاکسی ۲		زمان مشغول بودن تاکسی ۲	زمان مشغول بودن تاکسی ۱	زمان مشتری در سیستم	زمان انتظار مشتری		
							پایان زمان خدمت دهی ۱	آغاز زمان خدمت دهی ۲	پایان زمان خدمت دهی ۲	پایان زمان خدمت دهی ۱						
۳	۱	۵۰	-	۰	۵۸	۲۵	۰	۲۵			۰	۲۵	۲۵			
	۲	۵۲	۲۵	۲۵	۱۷	۱۵	۲۵	۴۰			۰	۱۵	۱۵			
	۳	۵۶	۲۵	۵۰	۴	۵	۵۵	۵۰			۰	۵	۵			
	۴	۵۷	۲۵	۷۵	۴۴	۲۵	۷۵	۱۰۰			۰	۲۵	۲۵			
	۵	۶۴	۲۵	۱۰۰	۷۱	۲۵	۱۰۰	۱۲۵			۰	۲۵	۲۵			
	۶	۱۸	۲۰	۱۲۰	۲۹	۱۵	۱۳۵	۱۲۰			۱۵	۰	۱۵			
	۷	۴۷	۲۵	۱۴۵	۷۷	۳۵	۱۴۵	۱۸۰			۰	۳۵	۳۵			
	۸	۵۸	۲۵	۱۷۰	۳۹	۲۵	۱۹۵	۱۷۰			۲۵	۰	۲۵			
	۹	۸۵	۳۰	۲۰۰	۳۱	۲۵	۲۲۵	۲۰۰			۰	۲۵	۲۵			
	۱۰	۹۷	۳۵	۲۳۵	۵۷	۲۵	۲۶۰	۲۳۵			۰	۲۵	۲۵			
	۱۱	۶۱	۲۵	۲۶۰	۵۷	۲۵	۲۸۵	۲۶۰			۰	۲۵	۲۵			
	۱۲	۴۵	۲۵	۲۸۵	۹۹	۴۵	۳۳۰	۲۸۵			۰	۴۵	۴۵			
	۱۳	۷۸	۲۵	۳۱۰	۲۹	۱۵	۳۲۵	۳۱۰			۱۵	۰	۱۵			
	۱۴	۶۴	۲۵	۳۳۵	۶	۵	۳۴۰	۳۳۵			۰	۵	۵			
	۱۵	۷۲	۲۵	۳۶۰	۱۲	۱۵	۳۷۵	۳۶۰			۰	۱۵	۱۵			
	۱۶	۲۶	۲۰	۳۸۰	۱۰۰	۴۵	۴۲۵	۳۸۰			۰	۴۵	۴۵			
	۱۷	۴۹	۲۵	۴۰۵	۷۰	۲۵	۴۳۰	۴۰۵			۲۵	۰	۲۵			
	۱۸	۷	۱۵	۴۲۰	۲۰	۱۵	۴۴۰	۴۲۰			۰	۱۵	۱۵	۵		
	۱۹	۲۷	۲۰	۴۴۰	۵	۵	۴۴۵	۴۴۰			۰	۵	۵			
	۲۰	۷۵	۲۵	۴۶۵	۷۷	۳۵	۵۰۰	۴۶۵			۰	۳۵	۳۵			
۴	۱	۶۳	-	۰	۱۶	۱۵	۰	۱۵			۰	۱۵	۱۵			
	۲	۴۶	۲۵	۲۵	۱۷	۱۵	۴۰	۲۵			۰	۱۵	۱۵			
	۳	۲۳	۲۰	۴۵	۱۴	۱۵	۶۰	۴۵			۰	۱۵	۱۵			
	۴	۹۶	۳۰	۷۵	۱۹	۱۵	۹۰	۷۵			۰	۱۵	۱۵			
	۵	۶۴	۲۵	۱۰۰	۷۴	۳۵	۱۳۵	۱۰۰			۰	۳۵	۳۵			
	۶	۲۴	۲۰	۱۲۰	۷	۵	۱۲۵	۱۲۰			۵	۰	۵			
	۷	۴۱	۲۵	۱۴۵	۷۵	۳۵	۱۸۰	۱۴۵			۰	۳۵	۳۵			
	۸	۲۴	۲۰	۱۶۵	۴۸	۲۵	۱۹۰	۱۶۵			۲۵	۰	۲۵			
	۹	۶	۱۵	۱۸۰	۸	۵	۱۸۵	۱۸۰			۰	۵	۵			
	۱۰	۱۴	۱۵	۱۹۵	۴	۵	۲۰۰	۱۹۵			۰	۵	۵			
	۱۱	۲۸	۲۰	۲۱۵	۲۷	۱۵	۲۳۰	۲۱۵			۰	۱۵	۱۵			
	۱۲	۹۸	۳۵	۲۵۰	۵۹	۲۵	۲۷۵	۲۵۰			۰	۲۵	۲۵			
	۱۳	۱۹	۲۰	۲۷۰	۳۸	۲۵	۲۹۵	۲۷۰			۲۵	۰	۲۵			
	۱۴	۵۸	۲۵	۲۹۵	۷۶	۳۵	۳۳۰	۲۹۵			۰	۳۵	۳۵			
	۱۵	۶۶	۲۵	۳۲۰	۲۶	۱۵	۳۳۵	۳۲۰			۱۵	۰	۱۵			
	۱۶	۳	۱۵	۳۳۵	۴۸	۲۵	۳۶۰	۳۳۵			۰	۲۵	۲۵			
	۱۷	۵	۱۵	۳۵۰	۷۲	۲۵	۳۷۵	۳۵۰			۲۵	۰	۲۵			
	۱۸	۲۱	۲۰	۳۷۰	۷۸	۳۵	۴۰۵	۳۷۰			۰	۳۵	۳۵			
	۱۹	۹۹	۳۵	۴۰۵	۳۰	۱۵	۴۲۰	۴۰۵			۰	۱۵	۱۵			
	۲۰	۷۷	۲۵	۴۳۰	۷۶	۳۵	۴۶۵	۴۳۰			۰	۳۵	۳۵			
	۲۱	۸۰	۳۰	۴۶۰	۱۶	۱۵	۴۷۵	۴۶۰			۱۵	۰	۱۵			

جدول شبیه‌سازی برای دو تاکسی به مدت پنج روز (روز پنجم)

روز	شماره تماس	ارقام تصادفی برای زمان بین دو تماس	زمان بین دو تماس	زمان تماس	ارقام تصادفی برای زمان خدمت دهی	زمان خدمت دهی	تاکسی ۱		تاکسی ۲		زمان مشغول بودن تاکسی ۲	زمان مشغول بودن تاکسی ۱
							زمان آغاز خدمت دهی ۱	پایان زمان خدمت دهی ۱	آغاز زمان خدمت دهی ۲	پایان زمان خدمت دهی ۲		
	۱	۷	-	۰	۲۶	۱۵	۰	۱۵			۱۵	۰
	۲	۸۱	۳۰	۳۰	۱۹	۱۵	۳۰	۴۵			۱۵	۰
	۳	۲۳	۲۰	۵۰	۱۵	۱۵	۵۰	۶۵			۱۵	۰
	۴	۴۶	۲۵	۷۵	۹۱	۳۵	۷۵	۱۱۰			۳۵	۰
	۵	۹۷	۳۵	۱۱۰	۶۱	۲۵	۱۱۰	۱۳۵			۲۵	۰
	۶	۹۶	۳۰	۱۴۰	۴۸	۲۵	۱۴۰	۱۶۵			۲۵	۰
	۷	۲۸	۲۰	۱۶۰	۱۰	۵	۱۶۰	۱۶۵	۱۶۰		۵	۰
	۸	۸۳	۳۰	۱۹۰	۹۷	۴۵	۱۹۰	۲۳۵			۴۵	۰
	۹	۷۴	۲۵	۲۱۵	۶۷	۲۵	۲۱۵	۲۴۰	۲۱۵		۰	۲۵
	۱۰	۱	۱۵	۲۳۰	۲۳	۱۵	۲۳۰	۲۵۰	۲۳۵	۵	۱۵	۰
	۱۱	۲۲	۲۰	۲۵۰	۶۸	۲۵	۲۵۰	۲۷۵	۲۵۰		۲۵	۰
	۱۲	۴	۱۵	۲۶۵	۱۰	۵	۲۶۵	۲۷۰	۲۶۵		۵	۰
	۱۳	۵۲	۲۵	۲۹۰	۶۱	۲۵	۲۹۰	۳۱۵	۲۹۰		۲۵	۰
	۱۴	۵	۱۵	۳۰۵	۳۹	۲۵	۳۰۵	۳۳۰	۳۰۵		۰	۲۵
	۱۵	۲۹	۲۰	۳۲۵	۴۷	۲۵	۳۲۵	۳۵۰	۳۲۵		۲۵	۰
	۱۶	۵۷	۲۵	۳۵۰	۱۸	۱۵	۳۵۰	۳۶۵	۳۵۰		۱۵	۰
	۱۷	۱۶	۲۰	۳۷۰	۵۱	۲۵	۳۷۰	۳۹۵	۳۷۰		۲۵	۰
	۱۸	۵۳	۲۵	۳۹۵	۶۵	۲۵	۳۹۵	۴۲۰	۳۹۵		۲۵	۰
	۱۹	۱۹	۲۰	۴۱۵	۸۴	۳۵	۴۱۵	۴۵۰	۴۱۵		۰	۳۵
	۲۰	۵۲	۲۵	۴۴۰	۵۴	۲۵	۴۴۰	۴۶۵	۴۴۰		۲۵	۰
	۲۱	۱۱	۱۵	۴۵۵	۵۸	۲۵	۴۵۵	۴۸۰	۴۵۵		۰	۲۵
	۲۲	۴۱	۲۵	۴۸۰	۹۳	۳۵	۴۸۰	۵۱۵	۴۸۰		۳۵	۰

نتایج مهم جدول فوق را به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

✓ **کل زمان شبیه‌سازی** به این صورت محاسبه می‌شود که برابر با مجموع زمان‌های اتمام

خدمت در انتهای هر روز است که در این جا برابر با $500 + 485 + 500 + 475 + 515 = 2475$

(دقیقه) می‌شود.

✓ **کل زمان مشغول بودن تاکسی‌ها** برابر با مجموع اختلاف زمان اتمام خدمت دهی و زمان

آغاز درخواست است که برای تاکسی ۱ برابر با ۱۷۸۵ دقیقه و برای تاکسی ۲ برابر ۵۲۰ دقیقه

می‌شود.

✓ **کل زمان بیکاری تاکسی‌ها** به این صورت محاسبه می‌شود که برابر با اختلاف کل زمان شبیه‌سازی و کل زمان مشغول بودن هر تاکسی است که برای تاکسی ۱ برابر ۶۹۰ دقیقه و برای تاکسی ۲ برابر ۱۹۵۵ دقیقه است.

✓ **تعداد کل مشتریان داده شده** در ۵ روز برابر با ۱۰۱ است.

✓ **متوسط زمان بیکاری تاکسی** برای هر تماس (یا درخواست) از تقسیم کل زمان بیکاری

$$\frac{690}{101} = 6.8 \text{ برابر ۱ تاکسی}$$

$$\frac{1955}{101} = 19.35 \text{ برابر ۲ تاکسی}$$

✓ **درصد بیکاری تاکسی** از تقسیم کل زمان بیکاری تاکسی بر کل زمان شبیه‌سازی بدست

$$\frac{690}{2580} = 0.267 \text{ برابر ۱ تاکسی و } \frac{1955}{2580} = 0.757 \text{ برابر ۲ تاکسی}$$

است.

✓ **کل مدت زمان انتظار مشتریان** برابر با ۱۵ دقیقه است.

✓ **تعداد مشتریانی منتظر تاکسی‌ها** برابر با ۳ است.

✓ **احتمال اینکه یک مشتری با تاخیر** روبرو شود از تقسیم تعداد مشتریانی که انتظار را تجربه

$$\frac{3}{101} = 0.029 \text{ برابر با ۳ است.}$$

✓ **متوسط زمان تاخیری یک مشتری** که تجربه می‌کند از تقسیم کل زمان انتظار برای

$$\frac{15}{101} = 0.148 \text{ برابر با ۱۵ دقیقه است.}$$

مقایسه دو سیستم:

شرکت تاکسی رانی باید انتخاب کند که کدام موضوع در اولویت وی قرار دارد. این که با پرداخت هزینه

۴۳ ساعت بیکاری برای دو تاکسی در ۵ روز و در این صورت تنها سه مشتری منتظر خواهند ماند و یا

اینکه تنها هزینه بیکاری ۷ ساعت برای یک تاکسی در ۵ روز را پرداخت کند ولی با احتمال ۰.۵۶ مشتریان با تاخیر مواجه شوند.

BEHINEHYAB.COM

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**