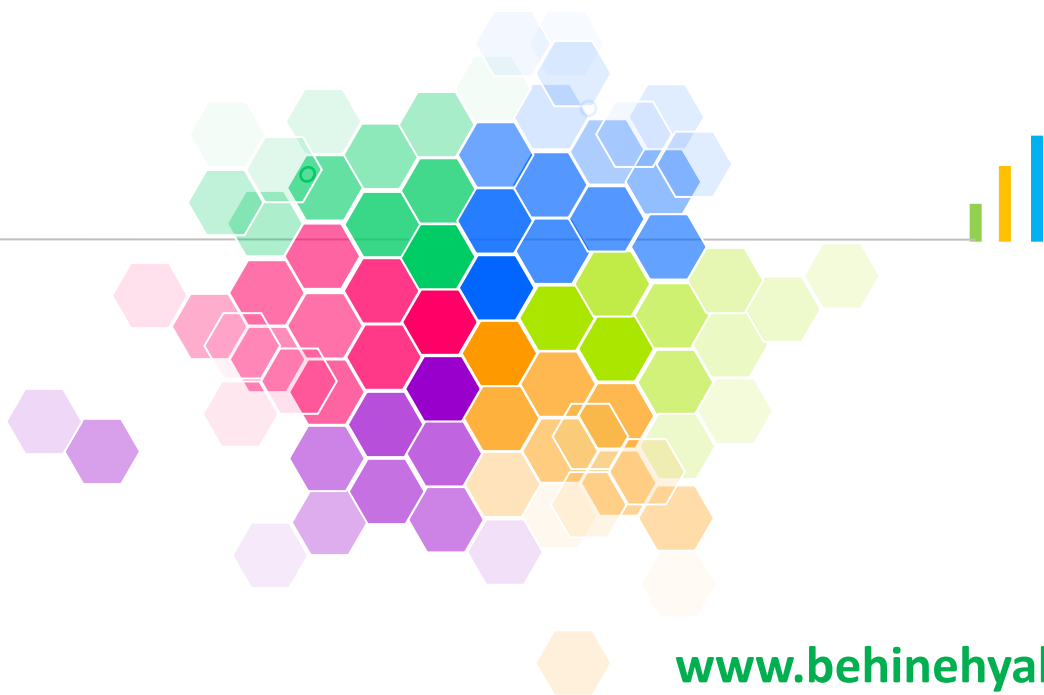


به نام خدا



درس ۲۷: برنامه ریزی احتمالی



فهرست مطالب

مقدمه

۱

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای

۲

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

۳

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

۴

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با تصمیم های گسسته

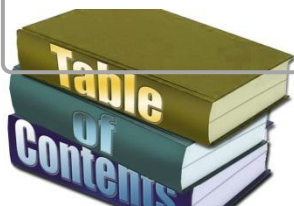
۵

برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای با بازگشت

۶

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

۷



مقدمه

برنامه ریزی احتمالی متعلق به شاخه عمومی تر برنامه ریزی عدم اطمینان است که شامل مباحثی همچون برنامه ریزی پویا، درخت تصمیم گیری، شبیه سازی، فرایندهای تصادفی و قیود احتمالی است.

در تمام مسائل تحقیق در عملیات، **قطعیت** داده ها یک فرض اصلی است و لذا آن را **برنامه ریزی قطعی** می نامیم.



مقدمه

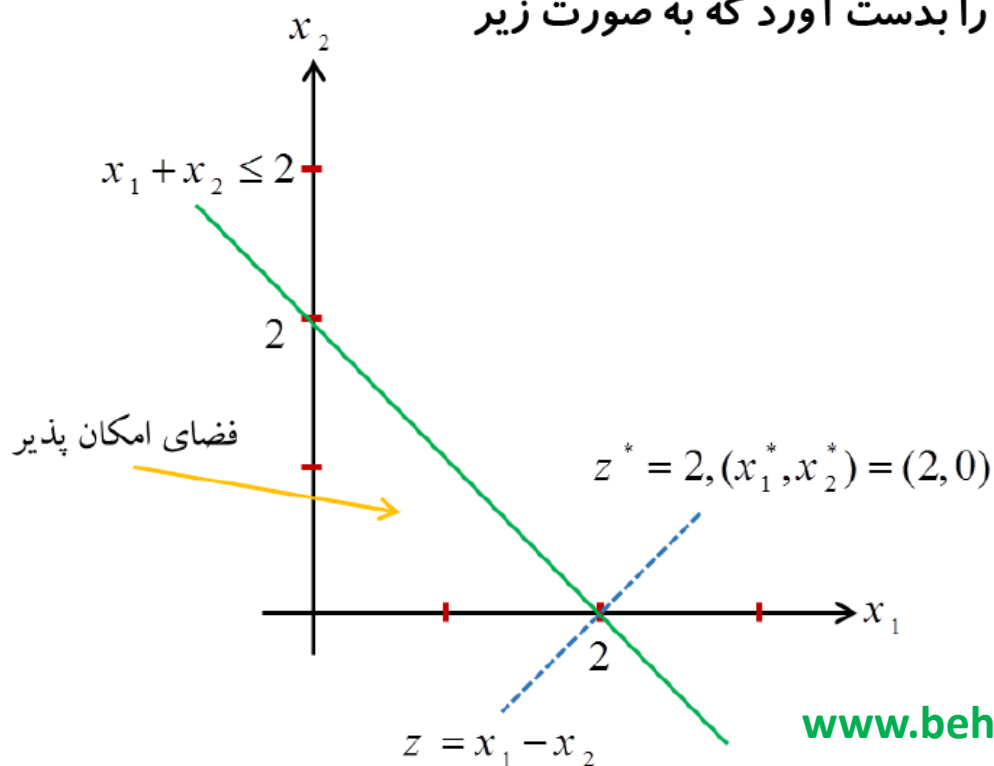
دشواری برنامه ریزی احتمالی بیشتر به خاطر یافتن جواب بهینه است که با عنوان **بهینه سازی** برنامه ریزی احتمالی یا برنامه ریزی تصادفی نامیده می شود و به خصوص در مسائل برنامه ریزی غیر خطی و عدد صحیح این دشواری **بیشتر** و **بیشتر** می شود.

معمولا در **نظر گرفتن** پارامترهای عدم اطمینان باعث بزرگی و پیچیدگی بهینه سازی آن می شود. برخی مواقع برای ساده سازی مسئله، پارامترهای عدم اطمینان را با مقدار متوسط آن و یا برآوردی از آن جایگزین می کنند که می تواند به **خطای بسیار زیاد** در نتایج منجر شود، چون این جواب اند برای همین مقادیر معتبر است و ممکن است برای مقادیر دیگر **غیر موجه** یا **غیر بهینه** باشد.

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

از طریق ترسیمی به راحتی می‌توان جواب این مسئله را بدست آورد که به صورت زیر می‌شود.



مقدمه

حال فرض کند که پارامتر سمت راست محدودیت، غیرقطعی باشد که در این صورت به جای ۲، ۳ باشد. در این صورت جواب جدید برابر $z^* = 3, (x_1^*, x_2^*) = (3, 0)$ می شود که جواب قبلی یعنی $(2, 0)$ دیگر **بهینه نیست**. حالا اگر پارامتر سمت راست به جای ۲، ۱ باشد، جواب بهینه $z^* = 1, (x_1^*, x_2^*) = (1, 0)$ می شود که در این صورت جواب $(2, 0)$ **امکان ناپذیر است**. میانگین ۱ و ۳ برابر ۲ است ولی جوابی که از سمت راست برابر ۲ بدست می آید می تواند با تغییر مقدار سمت راست، **غیر بهینه** یا حتی **امکان ناپذیر** شود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای

در برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای، متغیرهای تصمیم گیری مسئله بهینه سازی در شرایط عدم اطمینان، به دو مجموعه تقسیم می شوند.

متغیرهای مرحله اول (X) متغیرهایی هستند که باید قبل از وقوع و محقق شدن پارامترهای احتمالی، در مورد آن ها تصمیم گیری شود. هنگام تصمیم گیری و حل مدل، این تصمیمات در حضور عدم اطمینان در مورد رخدادهای آتی (ξ) گرفته می شود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای

در مرحله دوم که در مورد متغیرهای مرحله دوم تصمیم گیری می شود، مقدار واقعی پارامترهای عدم اطمینان (ξ)، مشخص و واقع می شوند و تصمیمات بازگشتی یا اقدامات اصلاحی (y) صورت می گیرد. به دلیل این عدم اطمینان، هزینه مرحله دوم، خود یک متغیر تصادفی خواهد بود.

نکته: هدف بهینه سازی، انتخاب متغیرهای مرحله اول خواهد بود، به طریقی که جمع هزینه های مرحله اول و متوسط هزینه های احتمالی مرحله دوم حداقل شود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

فرموله بندی برنامه ریزی احتمالی

مسئله برنامه ریزی خطی احتمالی با بازگشت ثابت به صورت زیر فرموله می شود:

$$\text{Min } z = c^T x + E_{\xi} \left[\min q(\omega)^T y(\omega) \right],$$

$$\text{s.t. } Ax = b,$$

(۱)

$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega)$$

$$x \geq 0, y(\omega) \geq 0$$

در رابطه بالا، c برداری مشخص و قطعی با n_1 مؤلفه (عنصر)، b برداری قطعی با m_1 مؤلفه، A و W

ماتریس های مشخص و معین به ترتیب با ابعاد $m_1 \times n_1$ و $m_2 \times n_2$ هستند.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

عبارت W ، ماتریس بازگشت نامیده می شود که فرض می کنیم در اینجا ثابت است. در صورت مشخص و ثابت بودن ماتریس بازگشت، این نوع برنامه ریزی را **برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای** با **بازگشت ثابت** می نامیم.

با کنار هم قرار دادن اجزاء تصادفی مسئله بالا، به بردار

پارامترهای تصادفی $\xi^T(\omega) = (q(\omega)^T, h(\omega)^T, T_1(\omega), \dots, T_{m_2}(\omega))$ با $N = n_2 + m_2 + (m_2 \times n_1)$ عنصر

می رسیم؛ در این بردار، $T_i(\omega)$ ، i امین سطر ماتریس ضرایب تکنولوژی $T(\omega)$ است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

نمایش ریاضی	ابعاد	تعریف
x	$n_1 \times 1$	متغیر تصمیم مرحله اول
$y(\omega)$	$n_2 \times 1$	متغیر تصمیم مرحله دوم
W	$m_2 \times n_2$	ضریب تکنولوژی متغیر مرحله دوم با ماهیت غیرقطعی
A	$m_1 \times n_1$	ضریب تکنولوژی متغیر مرحله اول با ماهیت قطعی
b	$m_1 \times 1$	مقدار سمت راست با ماهیت قطعی
$h(\omega)$	$m_2 \times 1$	مقدار سمت راست با ماهیت غیرقطعی
$q(\omega)$	$n_2 \times 1$	ضریب تابع هدف متغیر مرحله دوم با ماهیت غیرقطعی
$T(\omega)$	$m_2 \times n_1$	ضریب تکنولوژی متغیر مرحله اول با ماهیت غیرقطعی

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته



مدل (۱) معادل برنامه ریزی زیر است:

$$\text{Min} z = c^T x + \Phi(x)$$

(۲)

$$\text{s.t. } Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

که داریم:

(۳)

$$\Phi(x) = E_{\xi} Q(x, \xi(\omega))$$

$$Q(x, \xi(\omega)) = \text{Min}_y q(\omega)^T y(\omega)$$

(۴)

$$\text{s.t. } Wy = h(\omega) - T(\omega)x$$

$$x, y \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

متوسط هزینه تصمیمات مرحله دوم با $\Phi(x)$ نشان داده می شود و آن را **تابع بازگشت** می نامیم که برای یک x معین و بر حسب ω به دست می آید. در این رابطه، E_ω میانگین ریاضی است که بر روی فضای $\xi(\omega)$ به دست می آید.

تابع $Q(x, \xi(\omega))$ به ازای یک x و $\xi(\omega)$ معین و ثابت به دست می آید؛ به عبارت دیگر، با توجه به اینکه مقدار x از تصمیمات **مرحله اول** به دست آمده، مقدار آن در محاسبه این تابع ثابت است؛ از این رو، برای هر $\xi(\omega)$ معین، یک $Q(x, \xi(\omega))$ قابل محاسبه است. به ازای هر $Q(x, \xi(\omega))$ که محاسبه می شود، یک مقدار برای تصمیمات مرحله دوم به صورت بهینه که با (y) نشان می دهیم، داریم.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

در صورت قطعی بودن ماتریس T ، رابطه بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\text{Min} z = c^T x + \Psi(\chi) \quad (5)$$

$$\text{s.t. } Ax = b,$$

$$Tx - \chi = 0$$

$$x \geq 0$$

در این رابطه، $\Psi(\chi) = E_{\xi} \psi(\chi, \xi(\omega))$ و $\psi(\chi, \xi(\omega)) = \text{Min} \{ q(\omega)^T y \mid Wy = h(\omega) - \chi, y \geq 0 \}$ هستند.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

مسئله با بازگشت ثابت

به معنی این است که ماتریس بازگشت (W) مستقل از ω باشد، یعنی داشته باشیم $W(\omega) = W$.

این ویژگی اجازه می دهد

در صورت ثابت نبودن این ماتریس، ممکن است با مشکلاتی روبه رو شویم که در ادامه به آن ها می پردازیم.

نکته: وضعیتی که در آن $W = [I, -I]$ باشد، مسئله با بازگشت ساده نامیده می شود. I ماتریس

همانی است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

مسئله با بازگشت کامل

یک مسئله با بازگشت کامل است، اگر ماتریس بازگشت ثابت باشد و به ازای هر مقدار برای تصمیمات مرحله اول (x) محدودیت مسئله مرحله دوم، $T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega)$ ، موجه باقی بماند. روشن است که در این گونه مسائل به ازای هر مقدار برای x و متغیر تصادفی ω ، مسئله مرحله دوم همواره موجه باقی می ماند.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته



مثال ۱: مسئله برنامه ریزی احتمالی دو مرحله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } z = -\frac{3}{4}x - y_{1k} + 3y_{2k} + y_{3k} + y_{4k},$$

$$\text{s.t. } x \leq 5,$$

$$-y_{1k} + y_{2k} - y_{3k} + y_{4k} = \xi_k + \frac{1}{2}x,$$

$$-y_{1k} + y_{2k} + y_{3k} - y_{4k} = 1 + \xi_k + \frac{1}{4}x,$$

$$x, y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k} \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

ξ_k یک توزیع گسسته یکنواخت است و برای آن، $k=1, \dots, 11$ پیشامد بین صفر و ۱- داریم:

$\{0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1.0\}$ وجود و احتمال وقوع هر پیشامد

$P_k = 1/11$ است ($k=1, 2, \dots, 11$). توجه کنید در این مسئله عبارت (ω) با اندیس k آورده شده

است. امکان پذیری مدل مرحله دوم را برای $x=5$ بررسی کنید.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

حل: در مرحله اول مسئله برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای بالا در مورد متغیر تصمیم X تصمیم گیری می کنیم. از این رو، این متغیر، متغیر تصمیم مرحله اول است؛ در مرحله دوم پس از مشخص شدن مقدار ξ_k ، در مورد متغیرهای تصمیم مرحله دوم تصمیم گیری می شود. توجه کنید به ازای هر $k=1,2,\dots,11$ ، $y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k}$ متغیرهای تصمیم مرحله دوم هستند. در زیر این مسئله را به صورت ماتریسی بیان کرده ایم:

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته



$$x = [x], \quad y_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \\ y_{4k} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, 11, \quad c^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

$$q_k^T = [-1 \ 3 \ 1 \ 1] \quad k = 1, 2, \dots, 11$$

$$A = [1], \quad b = [5], \quad T_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, 11,$$

$$W_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, 11$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \dots, h_{11} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته



در این مسئله برای $Q(x, \xi)$ داریم:

$$Q(x, \xi) = \text{Min } z = -y_{1k} + 3y_{2k} + y_{3k} + y_{4k}$$

$$\text{s.t.} \quad -y_{1k} + y_{2k} - y_{3k} + y_{4k} = \xi_k + \frac{1}{2}x$$

$$-y_{1k} + y_{2k} + y_{3k} - y_{4k} = 1 + \xi_k + \frac{1}{4}x$$

$$y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k} \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

برای نمونه، به ازای $\xi_1 = 0$ (اولین مقدار گسسته) و $x=5$ ، داریم:

$$Q(5,0) = \text{Min } z = -y_{11} + 3y_{21} + y_{31} + y_{41}$$

$$\text{s.t.} \quad -y_{11} + y_{21} - y_{31} + y_{41} = 2.5$$

$$-y_{11} + y_{21} + y_{31} - y_{41} = 2.25$$

$$y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41} \geq 0$$

مقدار هدف آن، $z=0$ است، که به ازای $x=5$ و $\xi_1 = 0$ به دست آمده است. نتایج همه

مسائل به ازای $x=5$ و ξ_k مختلف در جدول ۱ خلاصه شده است. در این جدول، متغیرهای y_{k1} و

y_{k3} برابر با صفر و آورده نشده اند.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای پیوسته

تعیین موجه بودن مرحله دوم

K	ξ_1	Z_k	Y_{2k}	Y_{4k}
۱	۰	۰	۲/۳۷۵	۰/۱۲۵
۲	-۰/۱	۰	۲/۲۷۵	۰/۱۲۵
۳	-۰/۲	۰	۲/۱۷۵	۰/۱۲۵
۴	-۰/۳	۰	۲/۰۷۵	۰/۱۲۵
۵	-۰/۴	۰	۱/۹۷۵	۰/۱۲۵
۶	-۰/۵	۰	۱/۸۷۵	۰/۱۲۵
۷	-۰/۶	۰	۱/۷۷۵	۰/۱۲۵
۸	۰/۷	۰	۱/۶۷۵	۰/۱۲۵
۹	-۰/۸	۰	۱/۵۷۵	۰/۱۲۵
۱۰	-۰/۹	۰	۱/۴۷۵	۰/۱۲۵

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

در نظر گرفتن ξ به صورت یک متغیر تصادفی گسسته، از مهم ترین کلاس های برنامه ریزی احتمالی است که در عمل مستقیم یا از طریق نمونه گیری از یک توزیع پوسته مکرر استفاده می شود.

مجموعه $X_1 = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ، مجموعهٔ **موجه مرحله اول** است که با محدودیت های ثابت مرحله اول مشخص می شوند. این مجموعه به بردار متغیرهای تصادفی وابسته نبوده و برای همه آن ها ثابت است. به ازای هر ξ معین، مجموعه موجه اولیه را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_2(\xi) = \{x \mid y \geq 0, \text{ s.t. } W(\omega) = h(\omega)x - T(\omega)x\}$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

حال با فرض گسسته بودن ξ ، مجموعه موجه مرحله دوم را تعریف می کنیم:

$$X_2 = \bigcap_{\xi \in \Xi} X_2(\xi)$$

در واقع X_2 متغیرهای تصمیمی (x) را در بر می گیرد که در مرحله دوم موجه هستند. در مثالی

که قبلاً به آن اشاره شد، $X_1 = \{x \mid x \leq 5, x \geq 0\}$ مجموعه موجه مرحله اول بود. مجموعه موجه مرحله

دوم نیز با توجه به اینکه به ازای کلیه مقادیر برای α محدودیت ها همچنان موجه باقی می ماند، از

این رو $X_2 = \{R\}$ در واقع، مسئله مذکور یک مسئله با باز گشت کامل است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

قضیه ۱: به ازای یک ξ معین، مجموعه موجه اولیه، $X_2 = \{\xi\}$ ، یک چند وجهی محدب است.

قضیه ۱-۲: وقتی ξ ، یک متغیر تصادفی گسسته محدود باشد، X_2 یک چند وجهی محدب است.

قضیه ۱-۳: اشتراکی چند وجهی های متناهی، یک چند وجهی متناهی است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

همان طور که گفته شد به ازای مقدار ثابت x و ξ ، مقدار برنامه مرحله دوم، $Q(x, \xi)$ ، به صورت زیر مشخص می شود:

$$Q(x, \xi) = \min_y (\omega)^T y$$

$$\text{s.t.} \quad W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x,$$

$$y \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

در محاسبه مقدار $Q(x, \xi)$ ، وقتی با مشکل روبه رو می شویم که رابطه بالا نامتناهی (بی کران) یا ناموجه باشد. نامتناهی شدن این مقدار، معمولاً از تعریف بد مدل ناشی می شود که می توانیم به راحتی با افزودن یک کران بالا بر روی آن را برطرف کنیم. در صورت ناموجه شدن این تابع، اگر فقط $x \in X_2$ را در نظر بگیریم، مشکل ناموجه بودن نیز حل می شود. بنابراین، به ازای $x \in X_2$ مقدار $Q(x, \xi)$ برای هر ξ موجه است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

در مسئله برنامه ریزی دو مرحله ای، مجموعه متغیرهای موجه، اشتراک بین X_1 و X_2 است، که شامل متغیرهای موجه مرحله اول است که در مرحله دوم نیز صدق می کند. مقدار تابع هدف نیز از جمع هزینه تصمیمات مرحله اول $(c^T x)$ و هزینه تصمیمات مرحله دوم $(\Phi(x))$ به دست می آید. در مسئله برنامه ریزی احتمالی با بازگشت کامل و غیر کامل برای اشتراک بین این دو مجموعه داریم:

۱- اشتراک دو مجموعه X_1 و X_2 در $X_1 \cap X_2 = X_1$ ، مسائل با بازگشت کامل است.

۲- اشتراک دو مجموعه X_1 و X_2 در $X_1 \cap X_2 \subset X_1$ ، مسائل با بازگشت غیر کامل است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

$$\text{Min } z(x) = c^T x + \sum_{s=1}^s p_s Q(x, \xi_s)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

$$T_s x + w_s y_s = h_s$$

$$x \geq 0, y_s \geq 0$$

در این رابطه فرض می کنیم، ξ گسسته و تابعی از s در نظر گرفته می شود؛ $s=1, 2, \dots, S$ مجموعه متناهی از سناریوهای ممکن است، به طوری که هر سناریو بیانگر حالتی از پارامترهای تصادفی

است؛ احتمال وقوع s امین ξ برابر با p_s در نظر گرفته می شود $\left(\sum_{s=1}^s p_s = 1 \right)$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

مثال ۲: مسئله کشاورز

کشاورزی می خواهد برای کشت زمین خود با هدف حداکثرسازی سود حاصل از فروش محصولات، برنامه ریزی کند. این کشاورز می تواند سه نوع محصول **گندم**، **ذرت** و **چغندر قند** را کشت کند. مساحت زمین کشاورزی ۵۰۰ هکتار است و کشاورز برای مصرف سالانه خود حداقل به ۲۰۰ تن گندم و ۲۴۰ تن ذرت نیاز دارد که می تواند آن را کشت **یا** از عمده فروش خریداری کند. قیمت خرید و فروش هر تن گندم به ترتیب ۲۳۸ و ۱۷۰ دلار در هر تن و قیمت خرید و فروش ذرت نیز به ترتیب ۲۱۰ و ۱۵۰ دلار در هر تن است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

قیمت فروش هر تن چغندر قند تا ۶ هزار تن ۳۶ دلار و به ازای هر تن مازاد ۱۰ دلار است. میانگین برداشت مورد انتظار از هر هکتار برای گندم، ذرت و چغندر قند به ترتیب ۲/۵، ۳ و ۲۰ تن است. همچنین هزینه کشت محصولات برای هر هکتار گندم، ذرت و چغندر قند به ترتیب ۱۵۰، ۲۳۰ و ۲۶۰ دلار است. این اطلاعات در جدول (۲) نیز آورده شده است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

چغندر قند	ذرت	گندم	
۲۰	۳	۲/۵	برداشت مورد انتظار (هکتار/تن)
۲۶۰	۲۳۰	۱۵۰	هزینه کشت (هکتار/دلار)
۳۶ دلار برای زیر ۶ هزار تن و ۱۰ دلار برای بالای ۶ هزار تن	۱۵۰	۱۷۰	قیمت فروش (تن/دلار)
-	۲۱۰	۲۳۸	قیمت خرید (تن/دلار)
-	۲۴۰	۲۰۰	حداقل مورد نیاز (تن)
کل زمین کشاورزی موجود: ۵۰۰ هکتار			

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

X_1 : مساحت زمینی که به کشت **گندم** (بر حسب هکتار) اختصاص داده شده است.

X_2 : مساحت زمینی که به کشت **ذرت** (بر حسب هکتار) اختصاص داده شده است.

X_3 : مساحت زمینی که به کشت **چغندر قند** (بر حسب هکتار) اختصاص داده شده است.

w_1 : میزان گندم فروخته شده (بر حسب تن).

y_1 : میزان گندم خریداری شده (بر حسب تن).

w_2 : میزان ذرت فروخته شده (بر حسب تن).

y_2 : میزان ذرت خریداری شده (بر حسب تن).

w_3 : میزان چغندر قند فروخته شده با قیمت ۳۶ دلار در هر تن.

w_4 : میزان چغندر قند فروخته شده با قیمت ۱۰ دلار در هر تن.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

برنامه ریزی دو مرحله ای قطعی این مسئله را به صورت زیر فرموله می کنیم و آن را مدل اول می

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 -$$

نامیم.

$$150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$3.0x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 + w_4 \leq 20x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

چغندر قند	ذرت	گندم	
۳۰۰	۸۰	۱۲۰	سطح زیر کشت (هکتار)
۶۰۰۰	۲۴۰	۳۰۰	برداشت محصول (تن)
۶۰۰۰	–	۱۰۰	مقدار فروش (تن)
–	–	–	مقدار خرید (تن)
سود کل: ۱۱۸۶۰۰ دلار			

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

تعریف سناریوها

کشاورز بر اساس تجربه می داند که هر ساله با یکی از شرایط **خوب**، **متوسط** و **بد** رو به رو خواهد بود. در سال خوب، تولید هر محصول ۲۰ درصد نسبت به حالت متوسط افزایش می یابد و در سال بد کشاورزی نیز ۲۰ درصد نسبت به حالت متوسط با کاهش بازدهی در تولید روبه رو است. از این رو، برای مدل سازی مسئله سه سناریو خواهیم داشت:

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

سناریو ۱ (سال خوب): بازدهی ۲۰ درصد بیشتر از حالت متوسط. در این سناریو، مقدار بازدهی گندم، ذرت و چغندر قند که تنها پارامترهای نامشخص مسئله بودند، به ترتیب از ۲/۵، ۳ و ۲۰ به ۳، ۳/۶ و ۲۴ تغییر می یابد. بنابراین، برای مسئله سناریو ۱، مدل دوم به صورت زیر می شود:

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 +$$

$$210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$3x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$3.6x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 - w_4 \leq 24x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته



سناریو ۲ (سال متوسط): بازدهی به اندازه حالت متوسط. مدل مسئله این سناریو، همان مدل اول خواهد بود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

سناریو ۳ (سال بد): بازدهی ۲۰ درصد کمتر از حالت متوسط. در این سناریو، مقدار بازدهی گندم، ذرت و چغندر قند از ۲/۵، ۳ و ۲۰ به ۲، ۲/۴ و ۱۶ تغییر می یابد. در این حالت، مدل سوم را خواهیم داشت:

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 +$$

$$210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$2x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 - w_4 \leq 16x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

جواب بهینه مسئله کشاورز در سناریوی خوب

چغندر قند	ذرت	گندم	
۲۵۰	۶۶/۶۷	۱۸۳/۳۳	سطح زیر کشت (هکتار)
۶۰۰۰	۲۴۰	۵۵۰	برداشت محصول (تن)
۶۰۰۰	-	۳۵۰	مقدار فروش (تن)
-	-	-	مقدار خرید (تن)
سود کل: ۱۶۷۴۴۷ دلار			

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

جواب بهینه مسئله کشاورز در سناریوی بد

چغندر قند	ذرت	گندم	
۳۷۵	۲۵	۱۰۰	سطح زیر کشت (هکتار)
۶۰۰۰	۶۰	۲۰۰	برداشت محصول (تن)
۶۰۰۰	-	-	مقدار فروش (تن)
-	۱۸۰	-	مقدار خرید (تن)
سود کل: ۵۹۹۵۰ دلار			

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

برنامه ریزی احتمالی مبتنی بر سناریو

برای مدل برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای مبتنی بر سناریو، مقادیر مربوط سطح زیر کشت به عنوان متغیرهای تصمیم مرحله اول و مقادیر مربوط به خرید و فروش هر محصول را به عنوان متغیرهای تصمیم مرحله دوم تعریف می کنیم. متغیرهای تصمیم مرحله دوم به صورت زیر تعریف می شوند:

✓ مقادیر مربوط به فروش محصول i در $s = 1, 2, 3$ $i = 1, 2, 3, 4$ W_{is}

✓ مقادیر مربوط به خرید محصول j در $s = 1, 2, 3$ $j = 1, 2$ y_{js}

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3$$

$$-\frac{1}{3}(170w_{11} - 238_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 26w_{31} + 10w_{41})$$

$$-\frac{1}{3}(170w_{12} - 238_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 26w_{32} + 10w_{42})$$

$$-\frac{1}{3}(170w_{13} - 238_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 26w_{33} + 10w_{43}),$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$3x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200,$$

$$3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \geq 240,$$

$$w_{31} + w_{41} \leq 24x_3,$$

$$w_{31} \leq 6000,$$

ادامه دارد...

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته



$$2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \geq 200,$$

$$3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240,$$

$$w_{32} + w_{42} \leq 20x_3,$$

$$w_{32} \leq 6000,$$

$$2x_1 + y_{13} - w_{13} \geq 200,$$

$$2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \geq 240,$$

$$w_{33} + w_{43} \leq 16x_3,$$

$$w_{33} \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \geq 0, s = 1, 2, 3,$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای گسسته

چغندر قند	ذرت	گندم		
۲۵۰	۸۰	۱۷۰	سطح زیر کشت (هکتار)	متغیر مرحله اول
۶۰۰۰	۲۸۸	۵۱۰	برداشت محصول (تن)	سناریوی اول (خوب)
۶۰۰۰	۴۸	۳۱۰	مقدار فروش (تن)	
-	-	-	مقدار خرید (تن)	
۵۰۰۰	۲۴۰	۴۲۵	برداشت محصول (تن)	سناریوی دوم (متوسط)
۵۰۰۰	-	۲۲۵	مقدار فروش (تن)	
-	-	-	مقدار خرید (تن)	
۴۰۰۰	۱۹۲	۳۴۰	برداشت محصول (تن)	سناریوی سوم (بد)
۴۰۰۰	-	۱۴۰	مقدار فروش (تن)	
-	۴۸	-	مقدار خرید (تن)	
سود کل: ۱۰۸۳۹۰ دلار				

ارزیابی جواب‌های برنامه ریزی احتمالی

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله‌ای به روش **اینجا و اکنون** یا **Here and Now** معروف است. مقدار

بهینه روش اینجا و اکنون برای مسئله کشاورز را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Z_{HN} = 108390$$

ارزیابی جواب‌های برنامه ریزی احتمالی

در مسئله برنامه ریزی کشاورز، فرض کنید کشاورز بداند در سال آینده با چه سناریویی رو به رو خواهد بود؛ در این صورت، کشاورز در سناریوی اول، دوم و سوم به ترتیب بر اساس جواب بهینه مدل‌های قطعی دوم، اول و سوم کشت خواهد کرد؛ در نتیجه، با این فرض، کشاورز به تعداد سناریوها، طرح کشت خواهد داشت؛ در این صورت، مقدار سود بهینه در این سه سناریو به ترتیب، ۱۱۸۶۰۰، ۱۶۷۶۶۷ و ۵۹۹۵۰ دلار خواهد بود و میانگین سود مدل‌های برنامه ریزی قطعی

متناظر با این سه سناریو، $59950 \times \frac{1}{3} + 167667 \times \frac{1}{3} + 118600 \times \frac{1}{3} = 115406$ دلار است.

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



در این روش، که به روش **صبر و مشاهده** یا **Here and Now** معروف است، فرض می کنیم که آینده قطعی است و اطلاعات کاملی در مورد آن داریم. مقدار بهینه این روش را به صورت زیر می نویسیم:

$$z_{ws} = 115406$$

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی

این مقدار از مقدار حاصل از مدل برنامه ریزی احتمالی (۱۰۸۳۹۰ دلار) به میزان ۷۰۱۶ دلار بیشتر است. بنابراین، در صورت اینکه کشاورز بداند طی سال آینده با چه وضعیت آب و هوایی روبه رو خواهد بود، در مقایسه با حالتی که نداند، سود حاصله ۷۰۱۶ دلار بیشتر خواهد شد. این مقدار، ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل (EVPI) نامیده می شود،

ارزیابی جواب‌های برنامه ریزی احتمالی

ارزش برنامه ریزی احتمالی

در سه مدل قطعی اول، دوم و سوم که هر یک متناظر با یک سناریو بود، در هر سناریو سطح زیر کشت متفاوتی به کشاورز ارائه می‌شد. چنانچه در مسئله کشاورز، مقدار متوسط بازدهی هر سه محصول را محاسبه کنیم و در مدل قطعی از مقدار متوسط بازدهی استفاده کنیم، مدل قطعی پنجم را برای محاسبه سطح زیر کشت محصولات خواهیم داشت:

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 -$$

$$170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$\frac{1}{3}(3 + 2.5 + 2)x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$\frac{1}{3}(3.6 + 3 + 2.4)x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 + w_4 \leq \frac{1}{3}(24 + 20 + 16)x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



با حل مدل بالا، سطح زیر کشت بهینه گندم، ذرت و چغندر قند به ترتیب ۱۲۰، ۸۰ و ۳۰۰ می شود. دقت کنید که در این مدل که از مقدار متوسط برای پارامترهای مسئله استفاده شده بود، مقدار پارامترها (بازدهی هر محصول) دقیقاً برابر با مقدار پارامترها در سناریوی متوسط یعنی ۲/۵، ۳ و ۲۰ شد، از این رو، جواب حاصل از مدل پنجم با مدل اول یکسان است.

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی

حال، یک بار دیگر مدل های دوم، اول و سوم را حل می کنیم، با این تفاوت که در هر مدل، مقدار سطح زیر کشت گندم، ذرت و چغندر قند را برابر با جواب بهینه حاصل از مدل پنجم، یعنی به ترتیب ۱۲۰، ۸۰ و ۳۰۰ قرار می دهیم. در این صورت، در سناریوی خوب، متوسط و بد، به ترتیب مدل های ششم، هفتم و هشتم را خواهیم داشت:

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1$$

$$-170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$3x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$3.6x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 + w_4 \leq 24x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1$$

$$-170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 + w_4 \leq 20x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1$$

$$-170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$2x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$

$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

$$w_3 + w_4 \leq 16x_3,$$

$$w_3 \leq 6000,$$

$$x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی

سود کسب شده در سناریوی خوب (مدل ششم)، ۱۴۸ هزار دلار، در سناریوی متوسط (مدل هفتم)

۱۱۸۶۰۰ و در سناریوی بد (مدل هشتم)، ۵۵۱۲۰ دلار خواهد بود. میانگین سود حاصل از این سه

مدل برنامه ریزی قطعی، برابر با $\frac{1}{3} \times 148000 + \frac{1}{3} \times 118600 + \frac{1}{3} \times 55120 = 107240$ دلار می شود؛

در این روش، که به روش **مقدار متوسط** یا (EV) معروف است. مقدار بهینه این روش را به صورت

زیر می نویسیم:

$$Z_{EV} = 107240$$

که از میزان به دست آمده با مدل احتمالی ($Z_{HN} = 108390$)، ۱۱۵۰ دلار کمتر است. مقدار اختلاف

بین این دو روش، ارزش جواب تصادفی (VSS) خوانده می شود.

ارزیابی جواب‌های برنامه ریزی احتمالی

نکته: این مقدار نشان می‌دهد که با استفاده از جواب مرحله یک حاصل از مدل احتمالی به جای

استفاده از جواب مرحله یک مدل قطعی، تا چه میزان می‌توان مقدار جواب بهینه را بهبود بخشید.

نکته: در یک مسئله حداکثرسازی، همواره رابطه زیر بین مقدار جواب بهینه حاصل از این سه روش

وجود دارد:

$$Z_{EV} \leq Z_{HN} \leq Z_{ws}$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته



مثال ۳: مسئله کشاورز با تصمیمات مرحله دوم گسسته

در مسئله کشاورز، فرض کنید به دلیل بالا بودن هزینه های حمل و نقل، بعد از خرید و فروش، این محصولات فقط با کامیون هایی با ظرفیت ۱۰ تن حمل می شود. از این رو، امکان خرید و فروش و حمل فقط به میزان مضاربی از ۱۰ امکان پذیر است. بنابراین، این مسئله باید به صورت یک برنامه احتمالی دو مرحله ای که متغیرهای مرحله دوم آن **عدد صحیح** هستند، مدل سازی شود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته



حل:

برای مدل سازی مسئله کشاورز در این شرایط، متغیرهای تصمیم مرحله اول، یعنی سطح زیر کشت هر یک از محصولات گندم (x_1)، ذرت (x_2) و چغندر قند (x_3)، به همان صورت در نظر گرفته می شوند. متغیرهای مرحله دوم نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته



تعریف متغیر	نمایش متغیر
تعداد خرید کامیون های گندم در سناریو s	$y_{1s}, \quad s = 1, 2, 3$
تعداد فروش کامیون های گندم در سناریو s	$w_{1s}, \quad s = 1, 2, 3$
تعداد خرید کامیون های ذرت در سناریو s	$y_{2s}, \quad s = 1, 2, 3$
تعداد فروش کامیون های ذرت در سناریو s	$w_{2s}, \quad s = 1, 2, 3$
تعداد فروش کامیون های چغندر قند به قیمت ۳۶ دلار / تن در سناریو s	$w_{3s}, \quad s = 1, 2, 3$
تعداد فروش کامیون های چغندر قند به قیمت ۱۰ دلار / تن در سناریو s	$w_{4s}, \quad s = 1, 2, 3$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته



$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3$$

$$-\frac{1}{3} \times 10(170w_{11} - 238_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41})$$

$$-\frac{1}{3} \times 10(170w_{12} - 238_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{42})$$

$$-\frac{1}{3} \times 10(170w_{13} - 238_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 36w_{33} + 10w_{43}),$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$3x_1 + 10y_{11} - 10w_{11} \geq 200,$$

$$3.6x_2 + 10y_{21} - 10w_{21} \geq 240,$$

$$10w_{31} + 10w_{41} \leq 24x_3,$$

$$10w_{31} \leq 6000,$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته



$$2.5x_1 + 10y_{12} - 10w_{12} \geq 200,$$

$$3x_2 + 10y_{22} - 10w_{22} \geq 240,$$

$$10w_{32} + 10w_{42} \leq 20x_3,$$

$$10w_{32} \leq 6000,$$

$$2x_1 + 10y_{13} - 10w_{13} \geq 200,$$

$$2.4x_2 + 10y_{23} - 10w_{23} \geq 240,$$

$$10w_{33} + 10w_{43} \leq 16x_3,$$

$$10w_{33} \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \geq 0, \text{ integer } s = 1, 2, 3,$$

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با متغیر گسسته

چغندر قند	ذرت	گندم		
۲۶/۵	۸۳/۳۳	۳۹۰	سطح زیر کشت (هکتار)	متغیر مرحله اول
۶۳۶	۳۰۰	۱۱۷۰	برداشت محصول (۱۰ تن)	سناریوی اول (خوب)
۶۰	۶	۹۷	مقدار فروش (۱۰ تن)	
۳	-	-	مقدار خرید (۱۰ تن)	
۵۳۰	۲۵۰	۹۷۵	برداشت محصول (تن)	سناریوی دوم (متوسط)
۵۳	۱	۷۷	مقدار فروش (تن)	
-	-	-	مقدار خرید (تن)	
۴۲۴	۲۰۰	۷۸۰	برداشت محصول (تن)	سناریوی سوم (بد)
۴۲	-	۵۸	مقدار فروش (تن)	
-	۴	-	مقدار خرید (تن)	
سود کل: ۶۶۳۱۰ دلار				

برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای با بازگشت

مدل دو مرحله ای که در قسمت های قبل به آن پرداختیم، یک مورد خاص از یک ساختار عمومی تر به نام مدل برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای است که در آن متغیرهای تصمیم و محدودیت ها به گروه هایی متناظر با مراحل $t=1, 2, \dots, H$ تقسیم می شوند. در واقع، اکثر مسائل تصمیم گیری یک توالی از تصمیمات دارند که طی زمان ظاهر می شوند؛ این تصمیمات باید طی چندین مرحله متوالی گرفته شوند. در اولین مرحله تصمیمات گرفته می شود و تصمیمات مراحل بعدی روی تصمیمات مراحل قبلی تأثیر می گذارند.

برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای با بازگشت

$$\text{Min } Z = c^1 x^1 + E_{\xi^2} \left[\text{Min } c^2(\omega) x^2(\omega^2) + \dots + E_{\xi^H} \left[\text{Min } c^H(\omega) x^H(\omega^H) \right] \dots \right]$$

$$\text{s.t.} \quad w^1 x^1 = h^1,$$

$$T^1(\omega^2) x^1 + w^2 x^2(\omega^2) = h^2(\omega)$$

$$T^2(\omega^3) x^2(\omega^2) + w^3 x^3(\omega^3) = h^3(\omega)$$

...

$$T^{H-1}(\omega^H) x^{H-1}(\omega^{H-1}) + w^H x^H(\omega^H) = h^H(\omega)$$

$$x^1 \geq 0, x^t(\omega^t) \geq 0 \quad t = 2, \dots, H$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

برنامه ریزی با قیود شانس، که کارناس و کوپر در سال ۱۹۵۹ توسعه داده اند، بر روی **قابلیت اطمینان** سیستم تمرکز دارد، یعنی توانایی سیستم برای مواجهه بودن در یک محیط عدم اطمینان. این قابلیت اطمینان به صورت یک **حداقل** الزام در مورد احتمال ارضای محدودیت ها خواهد بود. از این رو، در این نوع برنامه ریزی، هر محدودیت باید با یک درصد مشخصی **موجه** باشد. در نسخه رایج این نوع برنامه ریزی، متغیرهای تصادفی مستقل از هم و فقط سمت راست محدودیت ها، احتمالی در نظر گرفته می شوند.

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

برنامه ریزی با قیود شانس بر حسب ارتباط بین محدودیت های شانس مدل به دو صورت مدل های با محدودیت های مشترک یا محدودیت های جدا از هم، می توانند باشند:

۱. محدودیت های شانس **مشترک** به صورت $\Pr(g_i(x, \xi) \geq 0 (i = 1, \dots, n)) \geq p$ است.

۲. محدودیت های شانس **مجزا**. این محدودیت ها به صورت $\Pr(g_i(x, \xi) \geq 0) \geq p_i (i = 1, \dots, n)$ هستند.

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

در یک برنامه ریزی خطی، وقتی پارامترهای تکنولوژی سمت چپ محدودیت ها (ξ_{ij}) به صورت

تصادفی با توزیع نرمال باشد، محدودیت های متناظر با احتمال $(1-p_i)$ برقرار باشد. مدل

برنامه ریزی احتمالی با محدودیت های تصادفی سمت چپ به صورت زیر فرموله می شود:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\text{s.t. } \Pr \left(\sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j \geq b_i \right) \geq 1 - p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\xi \approx N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2) \forall ij$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

برنامه ریزی احتمالی با قيود احتمالی



همچنین با فرض محدودیت های مشترک، برنامه ریزی با محدودیت های احتمالی به صورت زیر

بازنویسی می شود:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\text{s.t. } \Pr\left(\sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j \geq b_i\right) \geq 1 - p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m p_i \leq p$$

$$\xi \approx N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2) \forall ij$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

$1-p$ ، سطح احتمال مشترکی است که کل مجموعه محدودیت های عدم اطمینان باید در آن سطح برآورده شوند.

برای هر i ، با فرض استقلال متغیر تصادفی ξ_{ij} ، عبارت $Z_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j$ را تعریف می کنیم به طوری

که $\mu_i = E(Z_i)$ و $\sigma_i = \sqrt{\text{Var}(Z_i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2}$ به ترتیب میانگین و انحراف معیار آن برای

هر i هستند. با توجه به اینکه برای هر i ، متغیرهای تصادفی ξ_{ij} دارای توزیع **نرمال** و **مستقل** هستند

و سپس داریم:

$$\Pr(Z_i \geq b_i) = 1 - \Pr(Z_i < b_i) = 1 - \Pr\left(\frac{Z_i - \mu_i}{\sigma_i} < \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i}\right) \geq 1 - p_i$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است؛ بنابراین، $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

معادل $\Pr(Z_i \geq b_i) \geq 1 - p_i$ است. در نتیجه با معکوس سازی هر دو طرف $\Phi\left(\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i}\right) \geq 1 - p_i$

برای هر i داریم:

$$\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i} \geq \Phi^{-1}(1 - p_i)$$

که معادل است با:

$$\mu_i - \Phi^{-1}(1-p_i)\sigma_i \geq b_i$$

و یا

$$\sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j - \Phi^{-1}(1-p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2)} \geq b_i$$

Φ^{-1} تابع توزیع تجمعی معکوس متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

نکته: عبارت $\Phi^{-1}(1-p_i)\sigma_i$ به صورت مقدار ایمنی محدودیت قابل تفسیر است.

نکته: برای محدودیت های شانسی که فقط سمت راست یا سمت چپ و راست آن ها به صورت همزمان تصادفی باشند، نیز به همین صورت عمل می کنیم.

با فرض عدم استقلال متغیرهای تصادفی رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j - \Phi^{-1}(1-p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \text{Cov}(\xi_{ij}, \xi_{ik}) x_i x_k} \geq b_i$$

$$\sigma(Z_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \text{cov}(\xi_{ij}, \xi_{ik}) x_i x_k}$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی



مثال ۴: مسئله با قیود احتمالی زیر را به فرم قطعی تبدیل و آن را حل کنید:

$$\text{Min } z = 7x_1 + 5x_2 + 2x_3,$$

$$\text{s.t. } \Pr(\xi_{11}x_1 + \xi_{12}x_2 + \xi_{13}x_3 \geq 52) \geq 1 - p_1,$$

$$\Pr(\xi_{21}x_1 + \xi_{22}x_2 + \xi_{23}x_3 \geq 32) \geq 1 - p_2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی



حل:

فرض کنید $p_1 = 0.1$ و $p_2 = 0.05$ و متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین و

واریانس زیر باشند:

$$E(\xi_{11}) = 3, E(\xi_{12}) = 1, E(\xi_{13}) = 8, \sigma^2(\xi_{11}) = 12, \sigma^2(\xi_{12}) = 25, \sigma^2(\xi_{13}) = 18$$

$$E(\xi_{21}) = 6, E(\xi_{22}) = 9, E(\xi_{23}) = 3, \sigma^2(\xi_{21}) = 8, \sigma^2(\xi_{22}) = 14, \sigma^2(\xi_{23}) = 12$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی



با توجه به روابط قبلی، مدل بالا را به یک مدل قطعی تبدیل می کنیم.

$$E(\xi_{11})x_1 + E(\xi_{12})x_2 + E(\xi_{13})x_3 +$$

$$\Phi^{-1}(0.9)\sqrt{\sigma^2(\xi_{11})x_1^2 + \sigma^2(\xi_{12})x_2^2 + \sigma^2(\xi_{13})x_3^2} \geq 38$$

$$E(\xi_{21})x_1 + E(\xi_{22})x_2 + E(\xi_{23})x_3 +$$

$$\Phi^{-1}(0.95)\sqrt{\sigma^2(\xi_{21})x_1^2 + \sigma^2(\xi_{22})x_2^2 + \sigma^2(\xi_{23})x_3^2} \geq 22$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی



با توجه به جدول توزیع نرمال استاندارد، $\Phi^{-1}(0.9)$ و $\Phi^{-1}(0.95)$ به ترتیب برابر با $1/275$ و $1/645$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$3x_1 + x_2 + 8x_3 + 1.275\sqrt{12x_1^2 + 25x_2^2 + 18x_3^2} \geq 38$$

$$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 1.645\sqrt{8x_1^2 + 14x_2^2 + 12x_3^2} \geq 22$$

برنامه ریزی احتمالی با قیود احتمالی

سپس، مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } z = 7x_1 + 5x_2 + 2x_3,$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 1.275\sqrt{12x_1^2 + 25x_2^2 + 18x_3^2} \geq 38,$$

$$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 1.645\sqrt{8x_1^2 + 14x_2^2 + 12x_3^2} \geq 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مسئله فوق، یک برنامه ریزی غیرخطی است. برای حل این مدل، روش های مختلفی وجود دارد که

در درس ۲۱ گروه آموزشی بهینه یاب، روش های حل مدل فوق ارایه شده است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com