

درس ۲۳:

مدل‌های آماری در شبیه‌سازی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

در مدلسازی پدیده‌های واقعی، کمتر وضعیت‌هایی وجود دارد که عملکرد **نهادهای** (Attribute) درون سیستم تحت بررسی را بتوان کاملاً از قبل پیش بینی کرد و دنیایی که سازنده مدل می بیند **احتمالی** است و نه **قطعی**. مدل ساز می پندارد که این تغییرات به طور اتفاقی رخ می‌دهد و نمی‌توان آن را پیش بینی کرد. اما برخی مدل‌های آماری به خوبی از عهده تعیین مقدار نهادهای سیستم بر می آیند.

از طریق نمونه گیری از پدیده مورد علاقه می‌توان مدل آماری مناسبی بدست آورد. سپس مدل ساز شکل توزیع معینی را به صورت حدسی بر می‌گزیند. برآوردی از پارامتر(های) این توزیع حدس زده شده بدست می‌آورد و سپس برای بررسی میزان دقت در برازش پارامترها آزمون‌هایی انجام می‌شود که در **درس‌های آینده** نحوه این بررسی آموزش داده می‌شود.

مروری بر واژه‌ها و مفاهیم

متغیرهای تصادفی گسسته

X را **متغیری تصادفی** بگیرید. اگر تعداد مقادیر ممکن برای X متناهی یا نامتناهی شمارا باشد، X را متغیر تصادفی **گسسته** می‌نامیم. مقادیر ممکن X را می‌توان به صورت $x_1, x_2, \dots$ فهرست کرد. در مورد متناهی بودن، تعداد مقادیر X فهرست پایان می‌گیرد. در مورد نامتناهی شمارا بودن آن‌ها، فهرست به گونه ای نامتناهی ادامه می‌یابد.

مثال: تعداد سفارش‌هایی که هر هفته به کارگاهی وارد می‌شود، مورد مشاهده قرار می‌گیرد. متغیر تصادفی مورد نظر X است، که داریم:

$$X = \text{تعداد سفارش های وارد شده در هفته}$$

کلیه مقادیر ممکن X را فضای دامنه X ، که R_X معرف آن است، مشخص می‌کند. در این جا داریم:

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته ای باشد. با هر نتیجه ممکن x_i در R_X ، عدد $p(x_i) = P(X=x_i)$ احتمال اینکه متغیر تصادفی مساوی x_i شود را تعیین می کند. اعداد $p(x_i)$ برای $i=1, 2, 3, \dots$ باید **دو شرط** زیر را داشته باشد.

۱- به ازای همه مقادیر i داشته باشیم: $p(x_i) \geq 0$

$$2- \text{داشته باشیم: } \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

حالت جمع شده زوج های $(x_i, p(x_i))$ را **توزیع احتمال X** و $p(x_i)$ را **تابع جرم احتمال** متغیر تصادفی X می نامیم.

مثال: تجربه انداختن یک تاس را در نظر بگیرید. پس از آن که تاس انداخته شد، X را برابر با تعداد نقطه های وجه بالایی آن تعریف می کنیم. پس $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. تابع توزیع احتمال گسسته این متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

متغیر تصادفی پیوسته

اگر فضای دامنه متغیر تصادفی X فاصله یا مجموعه ای از فواصل باشد، X را **متغیر تصادفی پیوسته** می نامند. در مورد متغیر تصادفی پیوسته ای مانند X ، احتمال قرارگرفتن X در فاصله $[a, b]$ به صورت زیر ارایه می شود.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

تابع $f(x)$ را تابع چگالی احتمال یا **Probability density function** یا به اختصار **PDF** متغیر تصادفی

X می نامیم. در مورد **PDF** شرایط زیر صدق می کند.

الف) به ازای همه مقادیر x در R_X داریم $f(x) \geq 0$.

$$\int_{R_X} f(x) dx = 1 \quad \text{ب)}$$

ج) اگر x در R_X نباشد، داریم $f(x) = 0$.

نکته: روابط زیر براساس شرایط بالا برقرار است:

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال: یک لامپ اشعه کاتدی که به منظور بازرسی ترک های بال های هواپیما به کار برده می شود و با

متغیر تصادفی پیوسته ای چون X که همه مقادیر موجود در دامنه $x \geq 0$ است معرفی می شود. **PDF** عمر

لامپ بر حسب سال به شرح زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & O/W \end{cases}$$

احتمال این که عمر لامپ اشعه کاتدی بین ۲ و ۳ سال باشد طبق رابطه زیر بدست می آید.

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2} \int_2^3 e^{-\frac{x}{2}} dx = -e^{-\frac{3}{2}} + e^{-1} = -0.223 + 0.368 = 0.145$$

تابع توزیع تجمعی

تابع توزیع تجمعی یا *Cumulative distribution function* یا **CDF** که با نماد $F(x)$ نشان داده می‌شود و این احتمال را اندازه گیری می‌کند که متغیر تصادفی X مقدار کمتر یا مساوی x بگیرد. به عبارت دیگر داریم:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

اگر X گسسته باشد، داریم:

$$F(x) = \sum_{\forall x_i \leq x} p(x_i)$$

اگر X پیوسته باشد داریم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

برخی از ویژگی‌های CDF به صورت زیر است:

(الف) F تابعی غیرنزولی است. اگر $a < b$ باشد، آنگاه داریم $F(a) \leq F(b)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{ج)}$$

از جمله پرسش‌هایی که در مورد X با استفاده از CDF پاسخ داده می‌شود می‌توان به احتمال وقوع x در بازه بین a و b به صورت زیر اشاره کرد:

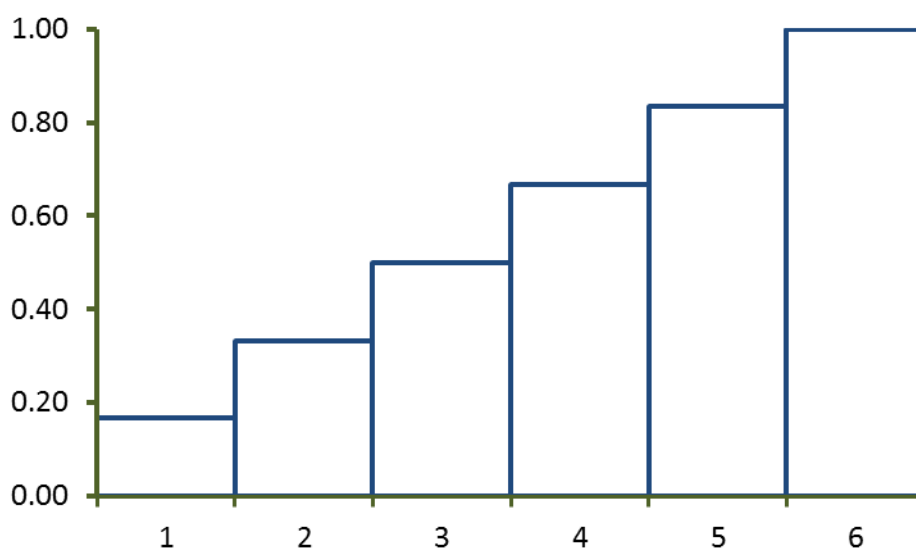
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

مثال: مثال پرتاب تاس عادل را در نظر بگیرید. تابع توزیع تجمعی و نمودار آن را رسم کنید.

جدول تابع توزیع احتمال تجمعی

x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

نمودار تابع توزیع احتمال تجمعی



مثال: لامپ اشعه کاتدی مثال متغیرهای تصادفی پیوسته را در نظر بگیرید. احتمال این که لامپ اشعه کاتدی کمتر از دو سال دوام بیاورد به شرح زیر تعیین می‌شود.

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$P(0 \leq x \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

احتمال این که عمر لامپ اشعه کاتدی بین ۲ تا ۳ سال باشد طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 3) &= F(3) - F(2) = \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - e^{-1}\right) \\ &= -e^{-\frac{3}{2}} + e^{-1} = -0.223 + 0.368 = 0.145 \end{aligned}$$

امید ریاضی

از مفاهیم مهم در نظریه احتمال، مفهوم **امید ریاضی** متغیر تصادفی است. اگر X متغیر تصادفی باشد، امید ریاضی X را با نماد $E(X)$ معرفی می‌شود و برای متغیرهای گسسته و پیوسته به شرح زیر تعریف می‌شود.

۱- اگر X **گسسته** باشد:

$$E(X) = \sum_{\forall i} x_i p(x_i)$$

۲- اگر X **پیوسته** باشد:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

نکته: امید ریاضی، $E(X)$ ، متغیر تصادفی X را میانگین یا گشتاور اول X نیز می‌نامند.

واریانس متغیر تصادفی X که با $Var(X)$ معرفی می‌شود، به شرح زیر تعریف می‌شود.

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X - E(x))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

مثال: میانگین و واریانس تجربه پرتاب تاس عادل را بدست آورید.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

برای محاسبه $Var(X)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} = 15.166$$

بنابراین واریانس به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$Var(X) = 15.166 - (3.5)^2 = 2.916$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 1.707$$

مثال: میانگین و انحراف معیار لامپ اشعه کاتدی تشریح شده در مثال قبلی را بدست آورید.

$$E(X) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx = -x e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 0 + \frac{1}{1.2} e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2$$

به منظور محاسبه انحراف معیار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx = -x^2 e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx = 8$$

بنابراین:

$$Var(X) = 8 - 2^2 = 4$$

و

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 2$$

با میانگین عمر ۲ سال و انحراف معیار ۲ سال، به این نتیجه می‌توان رسید که عمر واقعی تغییر پذیری زیادی دارد.

تابع توزیع‌های گسسته

متغیرهای تصادفی گسسته به منظور تشریح پدیده‌های تصادفی که در آن‌ها تنها مقادیر صحیح رخ می‌دهد به کار می‌رود. در ادامه چهار نوع توزیع را تشریح می‌کنیم.

توزیع برنولی

تجربه ای متشکل از n آزمایش را در نظر بگیرید که حاصل هر آزمایش موفقیت یا شکست است. اگر j امین آزمایش به موفقیت بیانجامد $X_j=1$ و اگر j -ام آزمایش به شکست بیانجامد $X_j=0$ n آزمایش برنولی را فرایند **برنولی** می نامند اگر آزمایش های مستقل از یک دیگر باشند؛ هر آزمایش تنها دو نتیجه ممکن (موفقیت یا شکست) داشته باشد؛ و احتمال موفقیت از یک آزمایش به آزمایش دیگر ثابت بماند. بنابر موارد گفته شده داریم:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2) \cdots p_n(x_n)$$

و

$$p_j(x_j) = p(x_j) = \begin{cases} p, & x_j = 1, j = 1, 2, \dots, n \\ 1-p = q, & x_j = 0, j = 1, 2, \dots, n \\ 0, & O/W \end{cases}$$

به توزیع فوق، توزیع برنولی می گویند.

همچنین میانگین و واریانس X_j را به شرح زیر محاسبه می کنیم.

$$E(X_j) = 0 \times q + 1 \times p = p$$

$$Var(X_j) = [0^2 \times q + 1^2 \times p] - p^2 = p(1-p)$$

توزیع دو جمله ای

متغیر تصادفی X که معرف تعداد موفقیت ها در n آزمایش برنولی است، دارای توزیع دو جمله ای است

که به شرح زیر با $p(x)$ معرفی می شود.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & O/W \end{cases}$$

احتمال بالا به این معنا است که اگر **موفقیت** را با **S** و **شکست** را با **F** نشان دهیم، آنگاه x آزمایش اول با موفقیت و $n-x$ آزمایش بعدی با شکست مواجه شود. نمایش دیگر این توزیع احتمال به صورت زیر است.

$$P(\overbrace{SS \cdots SS}^{x \text{ times}} \overbrace{FF \cdots FF}^{n-x \text{ times}}) = p^x q^{n-x} \quad p = 1 - q$$

از آنجایی که توزیع هندسی شامل n توزیع برنولی مستقل از هم، X_i هستند، لذا می توان در محاسبه میانگین و واریانس به صورت زیر عمل کرد:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$E(X) = p + p + \cdots + p = np$$

$$Var(X) = pq + pq + \cdots + pq = npq$$

نکته: واریانس مجموع n متغیر تصادفی مستقل برابر با مجموع واریانس متغیر تصادفی است. نمایش ریاضی آن به صورت زیر می شود.

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

مثال: یک فرایند تولید، چیپ های نیمه رسانای مورد استفاده در ریز پردازنده های را به طور متوسط با نسبت ناقص ۲ درصد می سازد. هر روز یک نمونه تصادفی ۵۰ تایی از فرایند گرفته می شود. اگر نمونه بیش از دو واحد ناقص داشته باشد، فرایند متوقف می شود. احتمال متوقف کردن فرایند با این شیوه نمونه گیری را تعیین کنید.

با در نظر گرفتن فرایند نمونه گیری به صورت $n=50$ آزمایش برنولی، هر یک با $p=0.02$ ، تعداد کل واحدهای ناقص در هر نمونه، X ، توزیع دوجمله ای به صورت زیر خواهد داشت.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{50}{x} 0.02^x 0.98^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, 50 \\ 0, & O/W \end{cases}$$

به منظور تعیین احتمال این که بیش از دو واحد ناقص در نمونه پیدا شود، بسیار ساده تر است که سمت راست تساوی زیر را محاسبه کنیم.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

احتمال $P(X \leq 2)$ از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 \binom{50}{x} 0.02^x 0.98^{50-x} = 0.98^{50} + 50 \times 0.02 \times 0.98^{49} + 1225 \times 0.02^2 \times 0.98^{48} \\ = 0.92$$

بنابراین، احتمال این که فرایند تولید روزی براساس فرایند نمونه گیری متوقف شود، تقریباً برابر ۰.۰۸ است. میانگین تعداد واحدهای ناقص در یک نمونه تصادفی به اندازه ۵۰ تایی به صورت زیر است.

$$E(X) = np = 50 \times 0.02 = 1$$

و واریانس آن به صورت زیر است.

$$Var(X) = npq = 50 \times 0.02 \times 0.98 = 0.98$$

توزیع هندسی

توزیع هندسی به دنباله ای از آزمایش های برنولی مرتبط است که متغیر تصادفی X با حصول اولین موفقیت تعریف می شود. توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر ارایه می شود.

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}p, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & O/W \end{cases}$$

پیشامد $\{X=x\}$ هنگامی رخ می دهد که $x-1$ شکست و به دنبال آن یک موفقیت وجود داشته باشد. اگر

هر یک از این شکست ها احتمال $q=1-p$ و هر موفقیت احتمال p داشته باشد، بنابراین، داریم:

$$P\left(\overbrace{FFF \cdots F}^{x-1 \text{ times}} S\right) = q^{x-1} p$$

میانگین توزیع هندسی به صورت زیر بدست می آید.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

انحراف معیار توزیع هندسی به صورت زیر بدست می آید.

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

مثال: چهل درصد ریز پردازنده‌های مونتاژ شده در ایستگاه بازرسی مردود شناخته می‌شود. این احتمال را محاسبه کنید که اولین ریز پردازنده پذیرفته شده سومین ریز پردازنده بازرسی شده باشد. با در نظر گرفتن $p=0.6$ و $q=0.4$ داریم:

$$p(3) = 0.4^2 \times 0.6 = 0.096$$

بنابراین، تنها در ۱۰ درصد از موارد اولین ریز پردازنده مورد پذیرش، سومین آن‌ها از هر نقطه شروع دلخواه خواهد بود.

توزیع پواسون

توزیع پواسون فرایندهای تصادفی بسیاری را خوب تعریف می‌کند و از لحاظ ریاضی کاملاً ساده است. تابع توزیع احتمال پواسون به صورت زیر است.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha} \alpha^x}{x!}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & 0 \text{ / } W \end{cases} \quad \alpha > 0$$

در این توزیع داریم:

$$E(X) = \text{Var}(X) = \alpha$$

تابع توزیع تجمعی این توزیع به صورت زیر است.

$$F(x) = \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\alpha} \alpha^i}{i!}$$

مثال: هر گاه برای سرویس تعمیر کامپیوتر با تعمیر کار تماس تلفنی می گیرند، دستگاه گیرنده او را با صدای "بیب" خبر می کند. معلوم شده است که تعداد بیب ها در ساعت طبق توزیع پواسون با میانگین $\alpha = 2$ در هر ساعت رخ می دهد. احتمال سه بیب در ساعت بعدی با توجه به توزیع احتمال پواسون برابر است با:

$$p(3) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = 0.18$$

مثال: احتمال دو بیب یا بیشتر در یک دوره یک ساعته را در مثال فوق بدست آورید.

$$P(\geq 2) = 1 - P(< 2) = 1 - p(0) - p(1) = 1 - F(1) = 0.594$$

تابع توزیع های پیوسته

به منظور تشریح پدیده های تصادفی که متغیر مورد نظر در آن ها می تواند هر مقدار در یک فاصله را بگیرد، می توان از متغیرهای تصادفی پیوسته استفاده کرد: مثلاً، طول یک میله و سطح آب یک رودخانه. در ادامه توزیع های مهم پیوسته معرفی می شود.

توزیع یکنواخت

متغیر تصادفی X روی فاصله $[a, b]$ به طور یکنواخت توزیع می شود، اگر PDF آن طبق رابطه زیر تعیین شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{O/W} \end{cases}$$

CDF با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

توجه کنید در این توزیع داریم:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

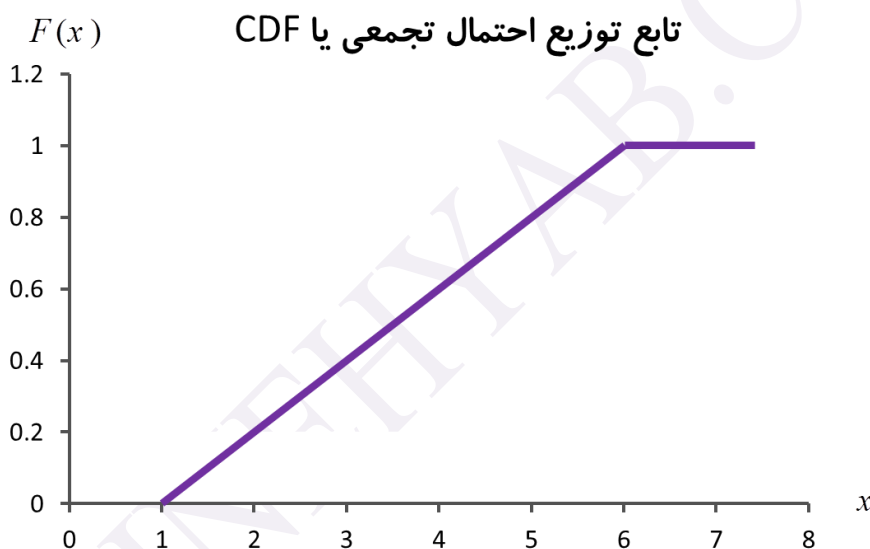
به ازای همه مقادیری از x_1 و x_2 که در رابطه $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ صدق کند، متناسب فاصله خواهد بود. میانگین و واریانس توزیع طبق رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

و

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

برای مثال، اگر $a=1$ و $b=6$ باشد، PDF و CDF به صورت زیر می‌شود.



مثال: از ساعت ۶:۴۰ صبح هر بیست دقیقه اتوبوسی به توقفگاه مشخصی وارد می‌شود که این روند تا ساعت ۸:۴۰ صبح ادامه می‌یابد. مسافر معینی که از برنامه بی اطلاع است، هر روز صبح به طور تصادفی (با توزیع یکنواخت) بین ۷:۰۰ صبح و ۷:۳۰ صبح از راه می‌رسد. احتمال بیش از ۵ دقیقه معطل شدن این مسافر برای اتوبوس چقدر است؟

مسافر تنها در صورتی مجبور به بیش از ۵ دقیقه معطل شدن است که یا بین ۷:۰۰ صبح و ۷:۱۵ صبح یا بین ۷:۲۰ صبح و ۷:۳۰ صبح وارد شود. اگر X متغیری تصادفی باشد که تعداد دقیقه‌های گذشته از ۷:۰۰ صبح را به هنگام رسیدن مسافر نشان می‌دهد، احتمال مورد نظر عبارت است از:

$$P(0 < X < 15) + P(20 < X < 30)$$

با توجه به این که X یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $(0, 30)$ است بنابراین احتمال مورد

نظر طبق رابطه زیر بدست می آید:

$$F(15) + F(30) - F(20) = \frac{15}{30} + 1 - \frac{20}{30} = \frac{5}{6}$$

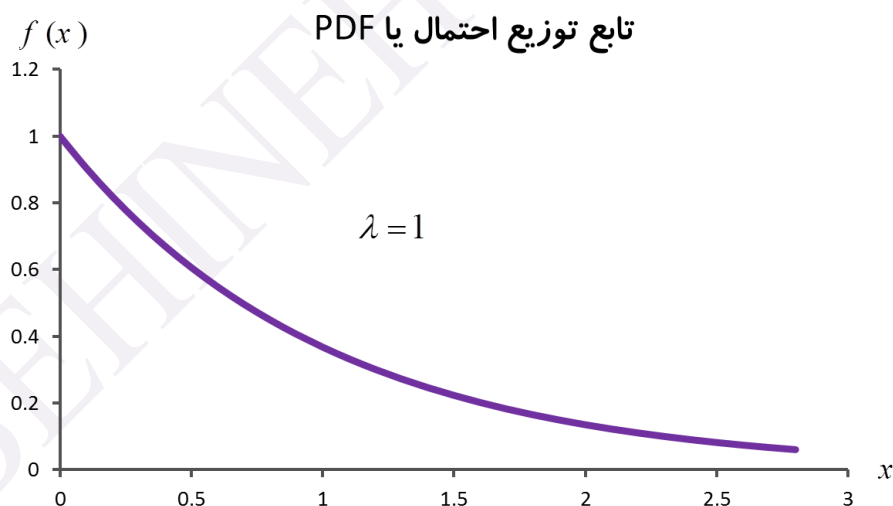
توزیع نمایی

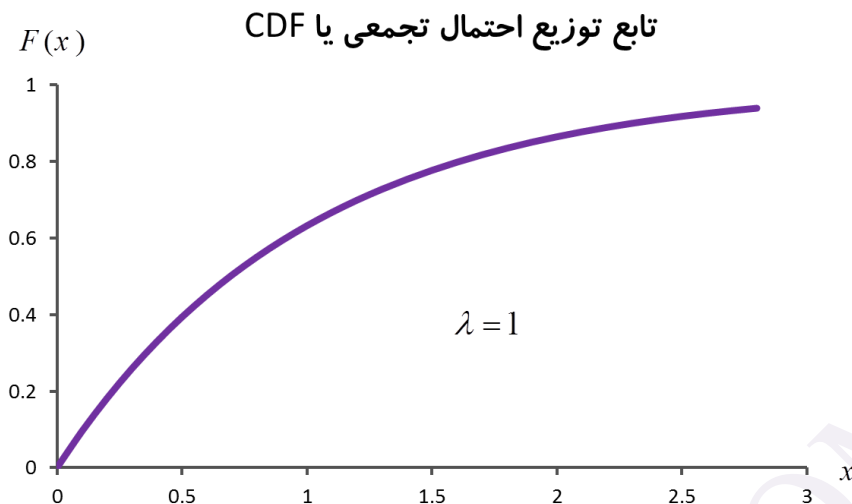
گفته می شود متغیر تصادفی X توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ دارد اگر PDF آن طبق معادله زیر ارایه

شود:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x \\ 0 & O/W \end{cases}$$

تابع توزیع احتمال و تابع توزیع احتمال تجمعی به صورت زیر است.





توزیع نمایی به منظور مدل سازی مدت‌های بین دو ورود متوالی در حالتی که ورودها کاملاً تصادفی باشد و همچنین برای مدل سازی مدت ها خدمت دهی در حالتی که این مدت ها بسیار متغیر باشد مورد استفاده قرار گرفته است. در این موارد، λ معرف آهنگ ورود در هر ساعت یا آهنگ خدمت دهی در هر دقیقه است.

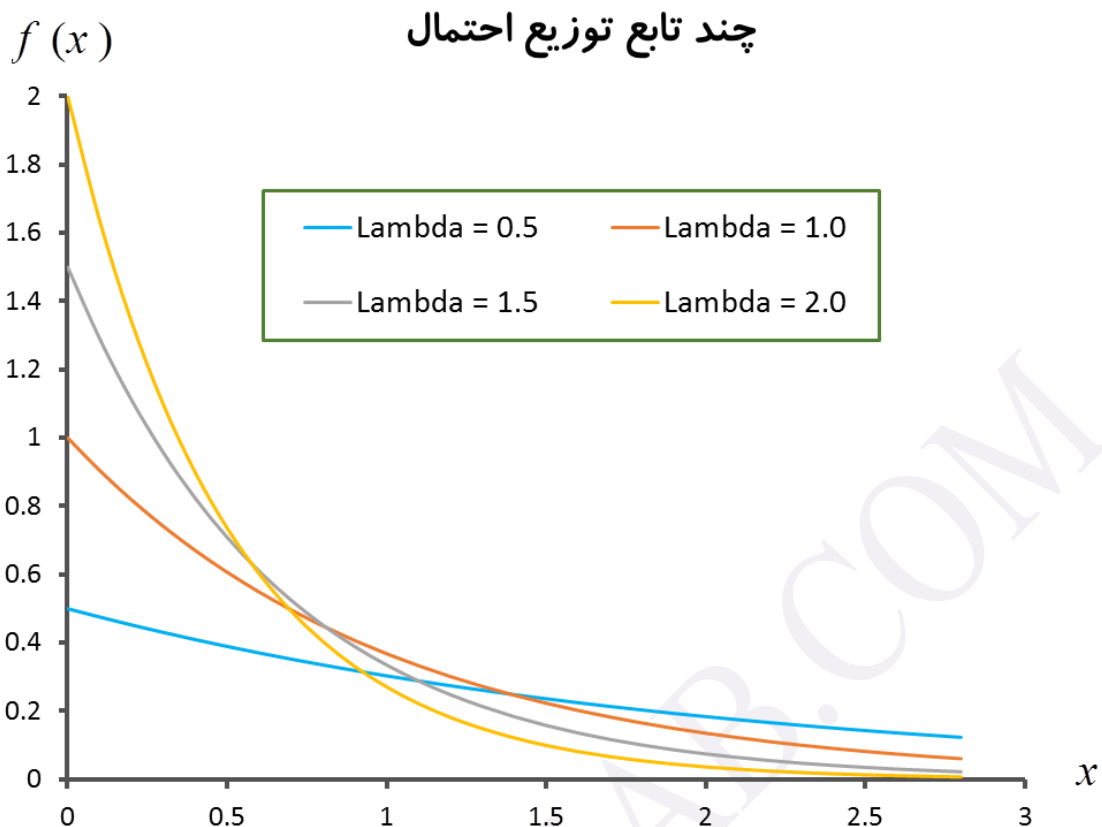
میانگین و واریانس توزیع نمایی طبق روابط زیر تعیین می‌شود.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

تابع توزیع احتمال تجمعی توزیع نمایی به صورت زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

در شکل زیر، چند تابع توزیع احتمال نمایی مختلف رسم شده است. عرض از مبدا همواره برابر با مقدار λ است. توجه داشته باشید که توابع در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



مثال: تصور کنید که عمر نوعی لامپ صنعتی، بر حسب هزار ساعت، توزیع نمایی با آهنگ خراب شدن برابر با $\lambda = \frac{1}{3}$ (یا یک خرابی در هر ۳۰۰۰ ساعت) دارد. احتمال این که لامپ بیش از ۳۰۰۰ ساعت (همان میانگین) عمر کند با رابطه زیر بدست می آید.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$$

برای محاسبه $F(3)$ از رابطه تابع توزیع تجمعی به صورت زیر استفاده می شود.

$$P(X > 3) = 1 - (1 - e^{-\frac{3}{3}}) = e^{-1} = 0.368$$

احتمال این که لامپ صنعتی بین ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ ساعت عمر کند طبق رابطه زیر تعیین می شود.

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = (1 - e^{-\frac{3}{3}}) - (1 - e^{-\frac{2}{3}}) = -0.368 + 0.513 = 0.145$$

نکته: از مهمترین ویژگی‌های توزیع نمایی، **بی حافظه بودن** آن است. به معنای دیگر ازای همه مقادیر

$s \geq 0, t \geq 0$ داریم:

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$$

عبارت ریاضی فوق نشان می‌دهد که قطعه **به یاد نمی‌آورد** که قبلاً به مدت s مورد استفاده قرار داشته است و هر قطعه مستعملی به خوبی یک قطعه نو کار می‌کند. برای اثبات این بخش به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(X > s+t | X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

توزیع گاما

تابعی که در تعریف توزیع گاما مورد استفاده است، **تابع گاما** است که به ازای همه مقادیر $\beta > 0$ به

صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

با انتگرال گیری جز به جز می‌توان نشان داد

$$\Gamma(\beta) = (\beta-1)\Gamma(\beta-1)$$

اگر β عدد صحیح باشد، با استفاده از این فرض که $\Gamma(1) = 1$ در رابطه بالا می‌توان دید که:

$$\Gamma(\beta) = (\beta-1)!$$

نکته: به تابع گاما می‌توان به عنوان تعمیم نماد **فاکتوریل** بر همه اعداد مثبت و نه فقط اعداد صحیح،

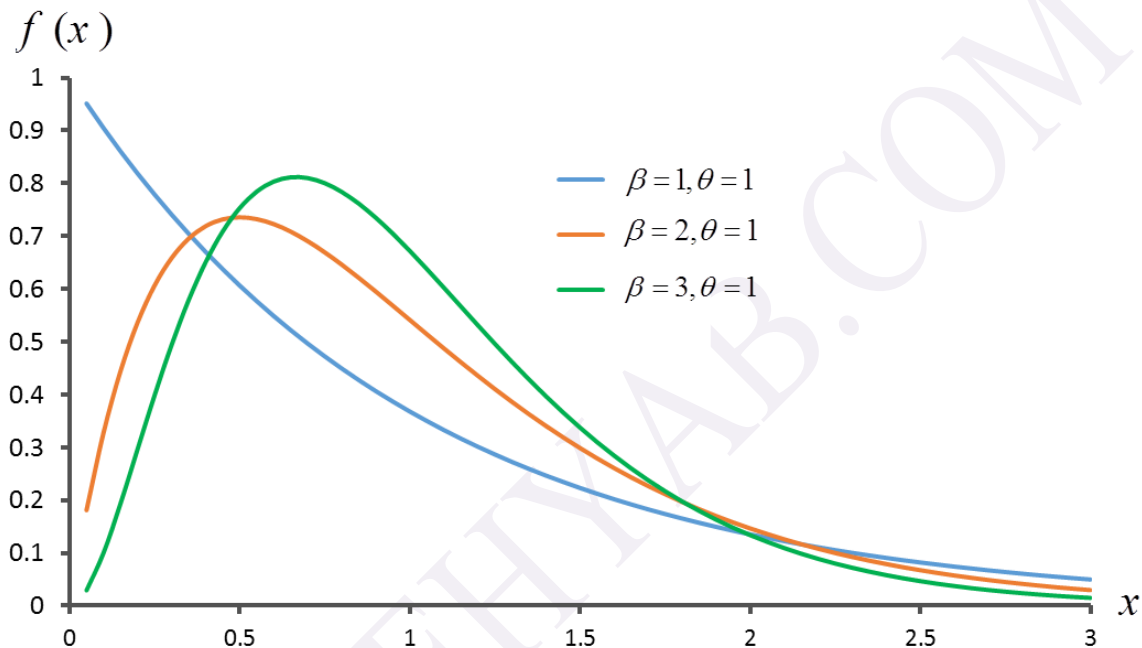
اطلاق کرد.

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای β و θ است اگر PDF آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\theta}{\Gamma(\beta)} (\beta\theta x)^{\beta-1} e^{-\beta\theta x} & x > 0 \\ 0 & O/W \end{cases}$$

پارامتر β را **پارامتر شکل** و پارامتر θ را **پارامتر مقیاس** می نامند. چند توزیع گاما به ازای $\theta = 1$

و مقادیر $\beta = 1, 2, 3$ در شکل زیر نشان داده شده است.



نکته: فرض کنید β عدد صحیح باشد. مجموع β متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی و با پارامتر

$\beta\theta$ ، منجر به تابع توزیع گاما با پارامتر β و θ می شود.

توزیع ارلنگ

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\theta}{\Gamma(\beta)} (\beta\theta x)^{\beta-1} e^{-\beta\theta x} & x > 0 \\ 0 & O/W \end{cases}$$

اگر $\beta = k$ و عدد صحیح باشند آنگاه به توزیع فوق، **توزیع ارلنگ** مرتبه k گفته می‌شود. توزیع ارلنگ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

k ایستگاه را در نظر بگیرید که به منظور کامل کردن خدمت دهی به هر مشتری باید از تمام خدمت ده ها عبور کند. تا زمانی که یک مشتری کار آن در دست پردازش است و با موفقیت از تمامی خدمت ده ها عبور نکرده است، مشتری دیگری نمی‌تواند به ایستگاه اول وارد شود. در هر ایستگاه، مدت خدمت دهی دارای توزیع نمایی با پارامتر $k\theta$ است.

با توجه به این که امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی برابر مجموع امید ریاضی متغیرهای تصادفی است لذا امید ریاضی تابع توزیع ارلنگ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_k)$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X_j با تابع توزیع نمایی برابر با $\frac{1}{k\theta}$ است. بنابراین داریم:

$$E(X) = \frac{1}{k\theta} + \frac{1}{k\theta} + \dots + \frac{1}{k\theta} = \frac{1}{\theta}$$

اگر متغیرهای تصادفی X_j **مستقل** از هم باشند، واریانس جمع آن‌ها، برابر مجموع واریانس آن‌ها به صورت زیر است:

$$Var(X) = \frac{1}{(k\theta)^2} + \frac{1}{(k\theta)^2} + \dots + \frac{1}{(k\theta)^2} = \frac{1}{k\theta^2}$$

در صورتیکه $\beta = k$ و عدد صحیح باشد، می‌توان به صورت جز به جز از تابع توزیع احتمال تابع توزیع تجمعی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\theta x)^i e^{-k\theta x}}{i!} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

مثال: یک استاد دانشگاه خانه خود را در تابستان ترک می‌گوید، ولی به منظور بازداشتن سارقین از سرقت، مایل است لامپی را برای همه مدت روشن بگذارد. او ابزاری می‌سازد که دو لامپ دارد. اگر لامپ اول از کار باز بماند، ابزار مزبور جریان را به لامپ دوم منتقل می‌کند. روی جعبه‌ی بسته بندی لامپ‌ها نوشته شده است که متوسط عمر ۱۰۰۰ ساعت با توزیع نمایی است. این استاد به مدت ۹۰ روز یا ۲۱۶۰ ساعت از خانه اش خارج می‌شود. احتمال این که وقتی تابستان تمام می‌شود و استاد از سفر بر می‌گردد، لامپی روشن باشد چقدر است؟

احتمال این که سیستم دست کم x ساعت عمل کند را تابع **پایایی**، $R(x)$ ، می‌گویند که

$$R(x) = 1 - F(x)$$

در این مثال، مجموع عمر سیستم دارای $\beta = k = 2$ لامپ و $\theta = \frac{1}{1000}$ در هر ساعت و

$\theta = \frac{1}{2000}$ در هر ساعت است. بنابراین به طریق زیر می‌توان $F(2160)$ را محاسبه کرد:

$$F(2160) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-2\left(\frac{1}{2000}\right)(2160)} \left[\left(2\right) \left(\frac{1}{2000}\right) (2160) \right]^i}{i!} = 1 - e^{-2.16} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2.16^i}{i!} = 0.636$$

بنابراین، با احتمال تقریباً ۳۶ درصد احتمال روشن ماندن چراغ در زمان رسیدن استاد وجود دارد.

توزیع نرمال

هر متغیر تصادفی X با میانگین μ ($-\infty < \mu < \infty$) و واریانس $\sigma^2 > 0$ توزیع نرمال دارد اگر تابع

توزیع احتمال آن به شرح ذیل باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

نکته: نمایش $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ به این معنا است که متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس $\sigma^2 > 0$ است.

برخی از خصوصیات تابع توزیع نرمال به صورت زیر است.

الف) چنانچه x به سمت مثبت بی نهایت یا منهای بی نهایت میل کند تابع $f(x)$ به سمت صفر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

یعنی: عبارت ریاضی

ب) تابع توزیع احتمال $f(x)$ حول μ **متقارن** است، یعنی $f(\mu - x) = f(\mu + x)$

ج) مقدار ماکسیمم تابع توزیع احتمال در $x = \mu$ است. بنابراین **میانگین** با **مد** برابر است.

تابع توزیع احتمال تجمعی به صورت زیر است:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

محاسبه انتگرال فوق به صورت بسته میسر نیست. می توان از روش محاسبات عددی استفاده کرد و

برای هر مقداری از (μ, σ^2) انتگرال فوق محاسبه می شود.

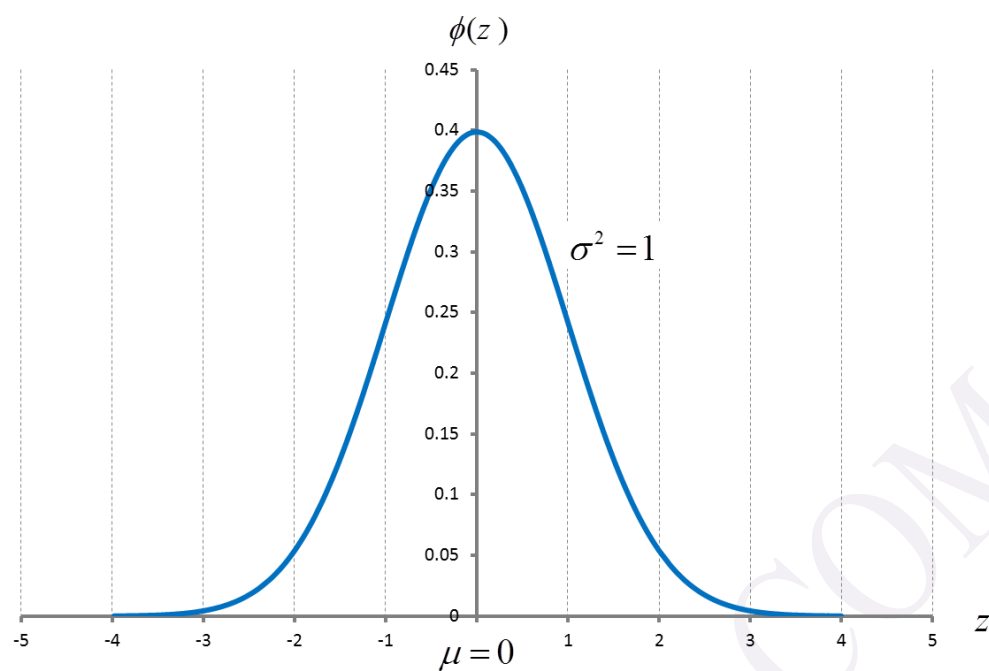
برای سادگی در محاسبه مقدار تابع توزیع تجمعی نرمال $F(x) = P(X \leq x)$ به صورت زیر عمل

می کنیم.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz = \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \phi(z) dz = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

متغیر تصادفی Z دارای تابع توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ یا $Z \approx N(0, 1)$ است و Z را

تابع توزیع نرمال استاندارد می نامند. نمایش این توزیع نرمال به صورت زیر است.

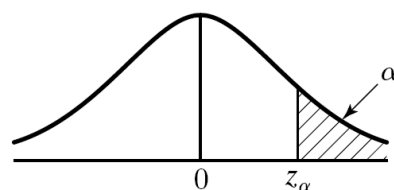


تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

برای محاسبه مقدار انتگرال فوق از **جداول** تابع توزیع نرمال استفاده می شود.

$$\phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1 - \alpha$$



z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z_α
0.0	0.500 00	0.503 99	0.507 98	0.511 97	0.515 95	0.0
0.1	0.539 83	0.543 79	0.547 76	0.551 72	0.555 67	0.1
0.2	0.579 26	0.583 17	0.587 06	0.590 95	0.594 83	0.2
0.3	0.617 91	0.621 72	0.625 51	0.629 30	0.633 07	0.3
0.4	0.655 42	0.659 10	0.662 76	0.666 40	0.670 03	0.4
0.5	0.691 46	0.694 97	0.698 47	0.701 94	0.705 40	0.5
0.6	0.725 75	0.729 07	0.732 37	0.735 65	0.738 91	0.6
0.7	0.758 03	0.761 15	0.764 24	0.767 30	0.770 35	0.7
0.8	0.788 14	0.791 03	0.793 89	0.796 73	0.799 54	0.8
0.9	0.815 94	0.818 59	0.821 21	0.823 81	0.826 39	0.9
1.0	0.841 34	0.843 75	0.846 13	0.848 49	0.850 83	1.0
1.1	0.864 33	0.866 50	0.868 64	0.870 76	0.872 85	1.1
1.2	0.884 93	0.886 86	0.888 77	0.890 65	0.892 51	1.2
1.3	0.903 20	0.904 90	0.906 58	0.908 24	0.909 88	1.3
1.4	0.919 24	0.920 73	0.922 19	0.923 64	0.925 06	1.4
1.5	0.933 19	0.934 48	0.935 74	0.936 99	0.938 22	1.5
1.6	0.945 20	0.946 30	0.947 38	0.948 45	0.949 50	1.6
1.7	0.955 43	0.956 37	0.957 28	0.958 18	0.959 07	1.7
1.8	0.964 07	0.964 85	0.965 62	0.966 37	0.967 11	1.8
1.9	0.971 28	0.971 93	0.972 57	0.973 20	0.973 81	1.9
2.0	0.977 25	0.977 78	0.978 31	0.978 82	0.979 32	2.0
2.1	0.982 14	0.982 57	0.983 00	0.983 41	0.983 82	2.1
2.2	0.986 10	0.986 45	0.986 79	0.987 13	0.987 45	2.2
2.3	0.989 28	0.989 56	0.989 83	0.990 10	0.990 36	2.3
2.4	0.991 80	0.992 02	0.992 24	0.992 45	0.992 66	2.4
2.5	0.993 79	0.993 96	0.994 13	0.994 30	0.994 46	2.5
2.6	0.995 34	0.995 47	0.995 60	0.995 73	0.995 85	2.6
2.7	0.996 53	0.996 64	0.996 74	0.996 83	0.996 93	2.7
2.8	0.997 44	0.997 52	0.997 60	0.997 67	0.997 74	2.8
2.9	0.998 13	0.998 19	0.998 25	0.998 31	0.998 36	2.9
3.0	0.998 65	0.998 69	0.998 74	0.998 78	0.998 82	3.0
3.1	0.999 03	0.999 06	0.999 10	0.999 13	0.999 16	3.1
3.2	0.999 31	0.999 34	0.999 36	0.999 38	0.999 40	3.2
3.3	0.999 52	0.999 53	0.999 55	0.999 57	0.999 58	3.3
3.4	0.999 66	0.999 68	0.999 69	0.999 70	0.999 71	3.4
3.5	0.999 77	0.999 78	0.999 78	0.999 79	0.999 80	3.5
3.6	0.999 84	0.999 85	0.999 85	0.999 86	0.999 86	3.6
3.7	0.999 89	0.999 90	0.999 90	0.999 90	0.999 91	3.7
3.8	0.999 93	0.999 93	0.999 93	0.999 94	0.999 94	3.8
3.9	0.999 95	0.999 95	0.999 96	0.999 96	0.999 96	3.9

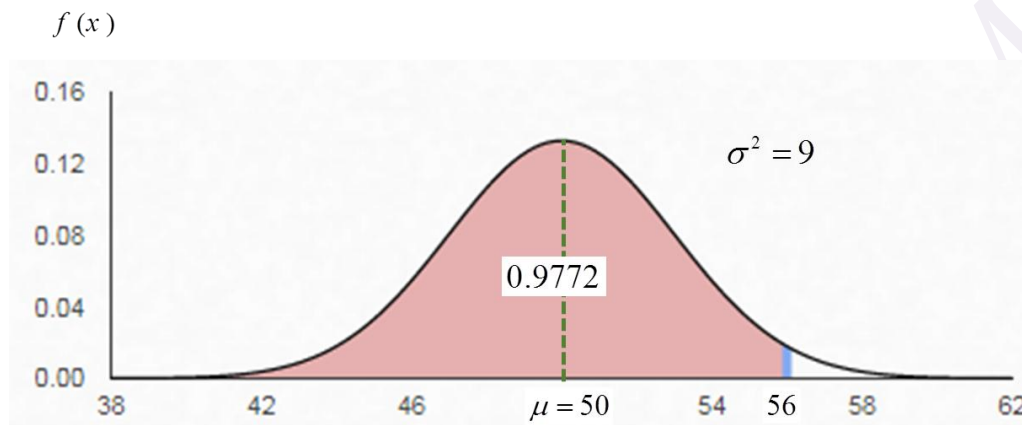
z_{α}	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z_{α}
0.0	0.519 94	0.523 92	0.527 90	0.531 88	0.535 86	0.0
0.1	0.559 62	0.563 56	0.567 49	0.571 42	0.575 34	0.1
0.2	0.598 71	0.602 57	0.606 42	0.610 26	0.614 09	0.2
0.3	0.636 83	0.640 58	0.644 31	0.648 03	0.651 73	0.3
0.4	0.673 64	0.677 24	0.680 82	0.684 38	0.687 93	0.4
0.5	0.708 84	0.712 26	0.715 66	0.719 04	0.722 40	0.5
0.6	0.742 15	0.745 37	0.748 57	0.751 75	0.754 90	0.6
0.7	0.773 37	0.776 37	0.779 35	0.782 30	0.785 23	0.7
0.8	0.802 34	0.805 10	0.807 85	0.810 57	0.813 27	0.8
0.9	0.824 94	0.831 47	0.833 97	0.836 46	0.838 91	0.9
1.0	0.853 14	0.855 43	0.857 69	0.859 93	0.862 14	1.0
1.1	0.874 93	0.876 97	0.879 00	0.881 00	0.882 97	1.1
1.2	0.894 35	0.896 16	0.897 96	0.899 73	0.901 47	1.2
1.3	0.911 49	0.913 08	0.914 65	0.916 21	0.917 73	1.3
1.4	0.926 47	0.927 85	0.929 22	0.930 56	0.931 89	1.4
1.5	0.939 43	0.940 62	0.941 79	0.942 95	0.944 08	1.5
1.6	0.950 53	0.951 54	0.952 54	0.953 52	0.954 48	1.6
1.7	0.959 94	0.960 80	0.961 64	0.962 46	0.963 27	1.7
1.8	0.967 84	0.968 56	0.969 26	0.969 95	0.970 62	1.8
1.9	0.974 41	0.975 00	0.975 58	0.976 15	0.976 70	1.9
2.0	0.979 82	0.980 30	0.980 77	0.981 24	0.981 69	2.0
2.1	0.984 22	0.984 61	0.985 00	0.985 37	0.985 74	2.1
2.2	0.987 78	0.988 09	0.988 40	0.988 70	0.988 99	2.2
2.3	0.990 61	0.990 86	0.991 11	0.991 34	0.991 58	2.3
2.4	0.992 86	0.993 05	0.993 24	0.993 43	0.993 61	2.4
2.5	0.994 61	0.994 77	0.994 92	0.995 06	0.995 20	2.5
2.6	0.995 98	0.996 09	0.996 21	0.996 32	0.996 43	2.6
2.7	0.997 02	0.997 11	0.997 20	0.997 28	0.997 36	2.7
2.8	0.997 81	0.997 88	0.997 95	0.998 01	0.998 07	2.8
2.9	0.998 41	0.998 46	0.998 51	0.998 56	0.998 61	2.9
3.0	0.998 86	0.998 89	0.998 93	0.998 97	0.999 00	3.0
3.1	0.999 18	0.999 21	0.999 24	0.999 26	0.999 29	3.1
3.2	0.999 42	0.999 44	0.999 46	0.999 48	0.999 50	3.2
3.3	0.999 60	0.999 61	0.999 62	0.999 64	0.999 65	3.3
3.4	0.999 72	0.999 73	0.999 74	0.999 75	0.999 76	3.4
3.5	0.999 81	0.999 81	0.999 82	0.999 83	0.999 83	3.5
3.6	0.999 87	0.999 87	0.999 88	0.999 88	0.999 89	3.6
3.7	0.999 91	0.999 92	0.999 92	0.999 92	0.999 92	3.7
3.8	0.999 94	0.999 94	0.999 95	0.999 95	0.999 95	3.8
3.9	0.999 96	0.999 96	0.999 96	0.999 97	0.999 97	3.9

مثال: می دانیم که $X \approx N(50, 9)$ مطلوب است تعیین $F(56) = P(X \leq 56)$ با استفاده از جدول

تابع توزیع نرمال استاندارد مقدار را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

نمایش یک تابع توزیع نرمال با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۳ (واریانس ۹) در شکل زیر نمایش داده

می شود.



ولی در عمل به طور مستقیم مقدار احتمال محاسبه نمی شود و از تابع توزیع احتمال استاندارد استفاده

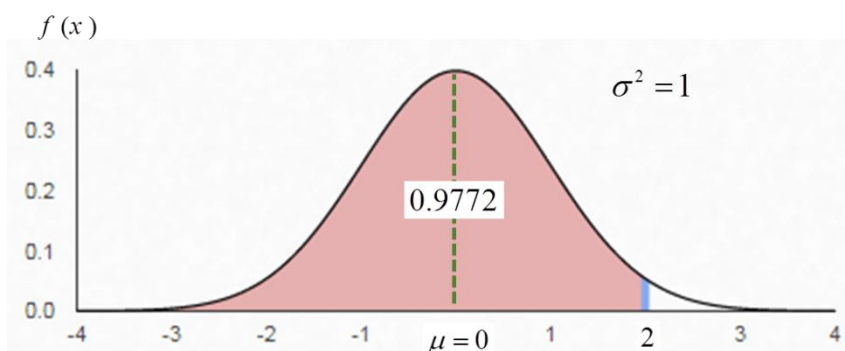
می شود. برای یافتن مقدار سطح زیر منحنی که حاصل عبارت $F(56) = P(X \leq 56)$ است از توزیع نرمال

استاندارد یا $Z \approx N(0, 1)$ استفاده می کنیم که به صورت زیر مقدار Z_α برای این توزیع به صورت زیر

محاسبه می شود.

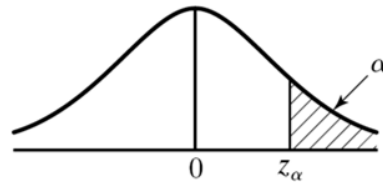
$$F(56) = \Phi\left(\frac{56-50}{3}\right) = \Phi(2)$$

مقدار $\Phi(2)$ برای تابع توزیع نرمال استاندارد در شکل زیر نشان داده می شود.



که براساس شکل بالا، $\Phi(2)$ برابر با 0.9772 می‌شود. برای محاسبه راحت تر بدون محاسبه انتگرال معرفی شده می‌توان مقدار فوق از روی جدول به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1 - \alpha$$



z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z_α
0.0	0.500 00	0.503 99	0.507 98	0.511 97	0.515 95	0.0
0.1	0.539 83	0.543 79	0.547 76	0.551 72	0.555 67	0.1
0.2	0.570 26	0.582 17	0.592 06	0.599 05	0.604 82	0.2

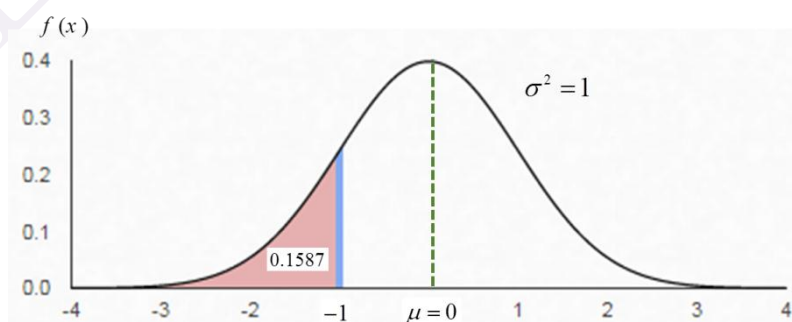
2.0	0.977 25	0.977 78	0.978 31	0.978 82	0.979 32	2.0
2.1	0.982 14	0.982 57	0.983 00	0.983 41	0.983 82	2.1

مثال: مدت لازم برای بارگیری یک کشتی اقیانوس پیمای، X ، توزیع نرمال $N(12, 4)$ دارد. احتمال این که کشتی در کمتر از ۱۰ ساعت بارگیری کند را محاسبه کنید.

برای محاسبه احتمال فوق باید را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$F(10) = \Phi\left(\frac{10-12}{2}\right) = \Phi(-1) = 0.1587$$

که نمایش مقدار $\Phi(-1)$ بر روی تابع توزیع نرمال استاندارد به صورت زیر می‌شود.



نکته: برای تابع توزیع نرمال استاندارد عبارت زیر برقرار است:

$$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

برای نمونه، در مثال بالا مقدار $\Phi(1) = 0.8413$ است که با توجه به رابطه بالا مقدار

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$
 محاسبه می شود.

مثال: در مثال بالا، احتمال این که برای بارگیری بین ۱۰ الی ۱۲ ساعت لازم باشد را محاسبه کنید.

برای محاسبه این احتمال به صورت زیر عمل می کنیم.

$$P(10 \leq X \leq 12) = F(12) - F(10) = 0.5 - 0.1687 = 0.3413$$

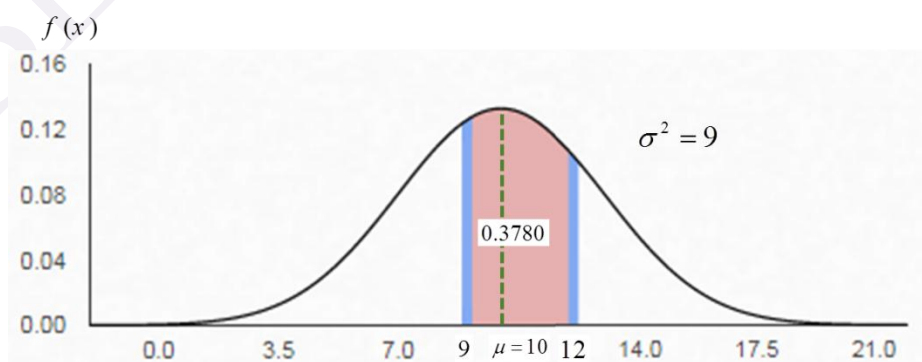
مثال: مدت عبور از یک صف به منظور شروع خدمتگیری در یک کافه تریا به صورت تابع توزیع نرمال

با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۳ است. احتمال این که یک مشتری بین ۹ الی ۱۲ دقیقه انتظار خدمتگیری را تجربه کند را محاسبه کنید.

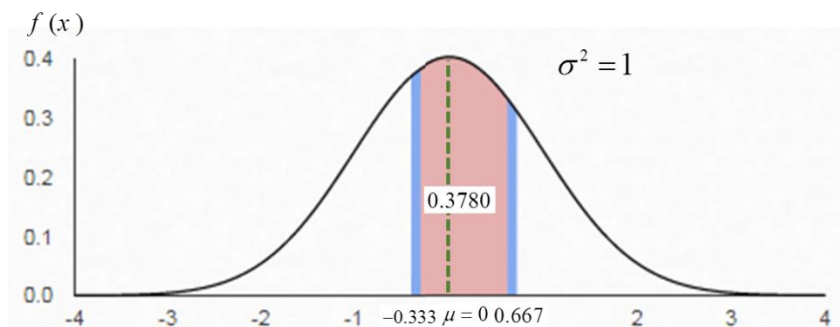
احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P(9 \leq X \leq 12) = F(12) - F(9) = \Phi\left(\frac{12-10}{3}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{3}\right) = \Phi(0.667) - \Phi(-0.333)$$

ناحیه سایه خورده، معرف احتمال $F(12) - F(9)$ است.



شکل زیر، ناحیه هاشور خورده احتمال $F(12) - F(9)$ در تابع توزیع نرمال استاندارد است.



مقدار $\Phi(0.667)$ برابر 0.7476 است. همچون گفته شد که $\Phi(-0.333) = 1 - \Phi(0.333)$ و چون $\Phi(0.333) = 0.6304$ است لذا $\Phi(-0.333) = 0.3696$ است و در این صورت مقدار احتمال مورد نظر $\Phi(0.667) - \Phi(-0.333) = 0.7476 - 0.3696 = 0.3780$ همان طور در قبلا بیان شد برای محاسبه مقادیر احتمال تابع توزیع نرمال استاندارد می توان از جدول آرایه شده بهره برد.

توزیع ویبال

متغیر تصادفی X توزیع ویبال دارد اگر تابع توزیع احتمال آن به شکل زیر باشد.

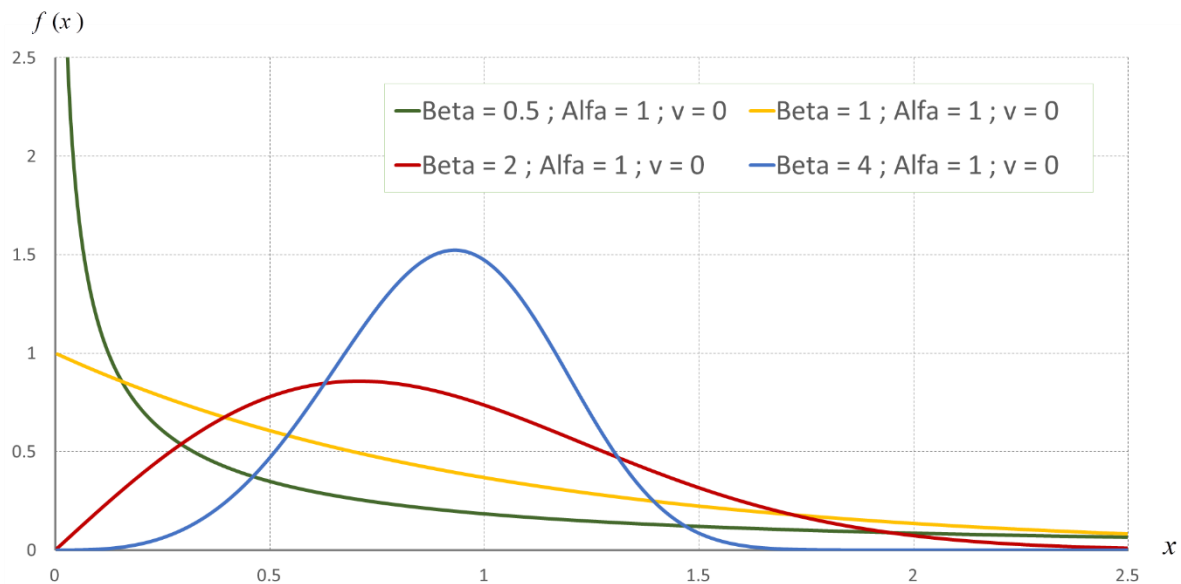
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha} \right)^{\beta}} & \nu \leq x \\ 0 & O/W \end{cases}$$

سه پارامتر توزیع ویبال عبارت است از: ν **پارامتر موقعیت** است و در بازه $-\infty < \nu < +\infty$ قرار می گیرد؛ ν **پارامتر مقیاس** است و در محدوده $\nu > 0$ ؛ و β **پارامتر شکل** است که در محدوده $\beta > 0$ است. هر گاه $\nu = 0$ باشد، تابع توزیع احتمال ویبال به صورت زیر می شود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}} & 0 \leq x \\ 0 & O/W \end{cases}$$

شکل زیر تعدادی تابع توزیع احتمال ویبال وقتی $\nu = 0, \alpha = 1$ و $\beta = 0.5, 1, 2, 4$ است را نشان

می دهد.



با فرض $\nu = 0, \beta = 1$ توزیع ویبال به صورت زیر در می آید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{O/W} \end{cases}$$

که توزیع فوق همان توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ است.

نکته: میانگین و واریانس تابع توزیع ویبال به صورت زیر می شود.

$$E(X) = \nu + \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$$Var(X) = \alpha^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right]$$

طبقه روابط بالا، پارامتر موقعیت، ν ، تاثیر بر مقدار واریانس **ندارد**. اما میانگین با افزایش یا کاهش

پارامتر موقعیت، افزایش یا کاهش می یابد.

رابطه تابع احتمال تجمعی برای توزیع ویبال به صورت زیر می شود.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \nu \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} & O/W \end{cases}$$

مثال: مدتی که طول می کشد تا هواپیمایی در یک فرودگاه بزرگ بین المللی بر زمین بنشیند و از باند بیرون برود، توزیع ویبال با $\nu = 1.34$ دقیقه، $\beta = 0.5$ و $\alpha = 0.04$ دقیقه دارد. این احتمال را پیدا کنید که فرود آمدن و بیرون رفتن از باند برای یک هواپیما ورودی بیش از ۱.۵ دقیقه طول بکشد. در این مورد هدف محاسبه $P(X > 1.5)$ است که به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P(X \leq 1.5) = F(1.5) = 1 - e^{-\left(\frac{1.5-1.34}{0.04}\right)^{0.5}} = 1 - e^{-2} = 1 - 0.135 = 0.865$$

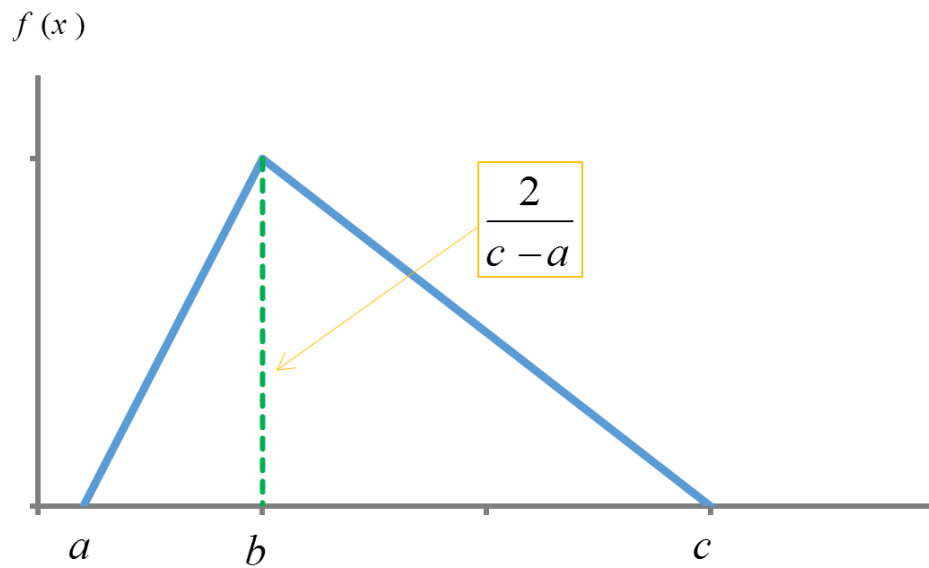
بنابراین، احتمال این که هواپیما به بیش از ۱.۵ دقیقه وقت برای نشستن و بیرون رفتن از باند نیاز داشته باشد، برابر ۰.۱۳۵ است.

توزیع مثلثی

متغیر تصادفی X توزیع مثلثی دارد اگر تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b < x \leq c \\ 0 & O/W \end{cases}$$

باشد، که در آن $a \leq b \leq c$ و $x = b$ در مد رخ می دهد. در شکل زیر تابع احتمال توزیع مثلثی نشان داده شده است.



معیارهای توزیع مانند میانگین و مد را می‌توان به پارامترهای (a, b, c) ارتباط داد.

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3}$$

$$Mode = b = 3E(X) - (a+c)$$

از آنجایی که $a \leq b \leq c$ لذا می‌توان رابطه بین میانگین و پارامترهای توزیع مثلثی را به صورت زیر بیان کرد.

$$\frac{2a+c}{3} \leq E(X) \leq \frac{a+2c}{3}$$

تابع توزیع تجمعی مثلثی به صورت زیر است.

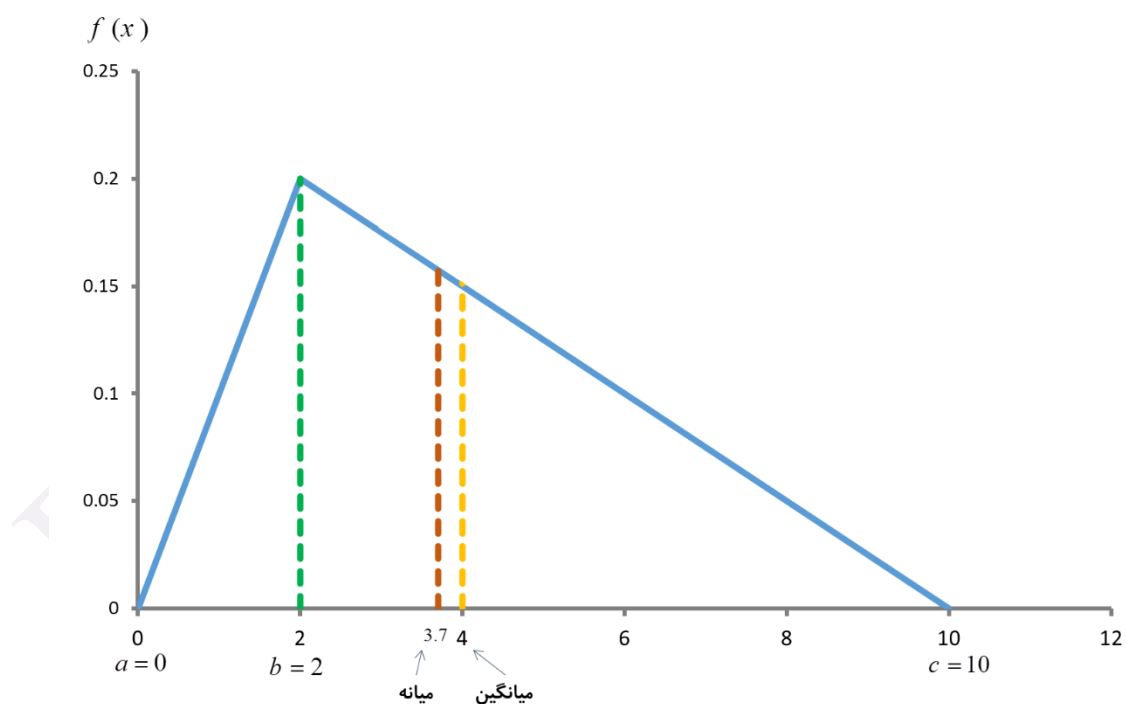
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a < x \leq b \\ 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-b)(c-a)} & b < x \leq c \\ 1 & x > c \end{cases}$$

مثال: کیفیت چیپ‌های نیمه رسانا را یک حسگر الکترونیک تعیین و آن‌هایی را که پذیرفته نشود رد می‌کند. در صورت تقاضا، حسگر تعداد کمترین و بیشترین موردهای ردی را در هر ساعت تولید از ۲۴ ساعت گذشته ارایه خواهد کرد. میانگین نیز داده می‌شود. بدون هیچ اطلاعات بیشتر، بخش کنترل کیفیت فرض کرده است که تعداد چیپ‌های رد شده را می‌توان طبق توزیع مثلثی تقریب زد. داده‌های جاری بر آن دلالت دارد که کمترین چیپ‌های رد شده در هر ساعت مساوی با صفر، بیشترین آن مساوی با ۱۰، و میانگین آن مساوی با ۴ بوده است. با دانستن این که $a=0$ ، $c=10$ ، و $E(X)=4$ ، می‌توان مقدار b را از معادله زیر بدست آورد.

$$b = 3(4) - (0 + 10) = 2$$

ارتفاع مد برابر با $0.2 = \frac{2}{10-0}$ است. **میان** نقطه ای است که ۵۰ درصد مساحت در سمت چپ و ۵۰

درصد در سمت راست آن است. در این مثال، میان ۳.۷ است که در شکل زیر نشان داده شده است.



برای تعیین میانگین، کافی است که مقدار تابع توزیع تجمعی را برابر ۰.۵ یا $F(x) = 0.5$ قرار

می‌دهیم:

$$0.5 = 1 - \frac{(10-x)^2}{(10)(8)} \rightarrow x = 3.7$$

این مثال نشان می‌دهد که لزوماً میانگین، مد و میانه با هم برابر نیستند.

فرایند پواسون

پیشامدهای تصادفی از قبیل ورود سفارش‌ها به یک کارگاه، ورود هواپیماها به یک باند فرودگاه، ورود کشتی‌ها به یک بندرگاه، ورود مکالمات تلفنی به یک اپراتور، خرابی ماشین‌ها در یک کارخانه بزرگ و ... را در نظر بگیرید. این پیشامدها را می‌توان طبق یک تابع شمارشی، $N(t)$ ، شرح داد که به ازای همه مقادیر $t \geq 0$ تعریف می‌شود. این تابع شمارشی معرف تعداد پیشامدهایی است که در بازه بین صفر و t رخ می‌دهد. زمان صفر نقطه‌ای است که آزمایش شروع شده باشد خواه اولین ورود مشاهده شده باشد یا خیر. تنها مقادیر ممکن قابل پذیرش توسط $N(t)$ اعداد صحیح، $0, 1, 2, 3, \dots$ ، هستند.

گفته می‌شود فرایند **شمارشی** $\{N(t), t \geq 0\}$ فرایندی از نوع **پواسون** با آهنگ میانگین λ است، اگر فرض‌های زیر صادق باشد:

(الف) ورودها به صورت یک ورود **در هر لحظه** رخ می‌دهند (یعنی در یک زمان، دو ورودی نداریم).

(ب) ورودهای **پایدار** باشند یعنی توزیع تعداد ورود بین t و $t+s$ تنها به طول s و نه به نقطه شروع t بستگی دارد.

(ج) ورودها **مستقل** باشند یعنی تعداد زیاد یا کم موارد ورود در یک فاصله زمانی، هیچ تأثیر بر تعداد موارد ورود در فواصل زمانی بعدی ندارد. به عبارت دیگر، ورودهای آتی کاملاً به طور تصادفی و مستقل از تعداد موارد ورود در فواصل زمانی قبل رخ می‌دهد.

اگر ورودها مطابق فرایند پواسون و با رعایت **سه فرض** بالا رخ دهد، می‌توان نشان داد که احتمال

$$N(t) = n \text{ طبق رابطه زیر بدست می‌آید.}$$

$$P[N(t) = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

در رابطه بالا، $N(t)$ توزیع پواسون با پارامتر $\alpha = \lambda t$ دارد. بنابراین، میانگین و واریانس آن عبارت است از:

$$E[N(t)] = \alpha = \lambda t = V[N(t)]$$

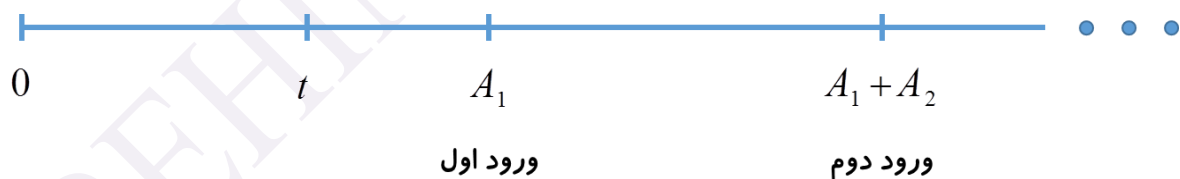
به ازای زمان‌های اختیاری s و t ، به طوری که $s < t$ باشد، فرض دوم (فرض پایداری) به این معنا است که متغیر تصادفی $N(t) - N(s)$ (که معرف ورود در فاصله s تا t است)، دارای توزیع پواسون با میانگین $\lambda(t-s)$ دارد. بنابراین، داریم:

$$P[N(t) - N(s) = n] = \frac{e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

و

$$E[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s) = Var[N(t) - N(s)]$$

فرآیند ورود پواسون زیر را در نظر بگیرید.



در شکل فوق، ورود اول در زمان A_1 و ورود دوم در $A_1 + A_2$ و ... اتفاق می‌افتد و به ترتیب مدت A_1 و A_2 زمان‌های بین ورودها هستند. اولین ورود وقتی اتفاق می‌افتد که در بازه $[0, t]$ هیچ ورودی رخ نداده باشد. به معنای ریاضی داریم:

$$\{A_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$$

و بنابراین:

$$P(A_1 > t) = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}$$

لذا احتمال این که ورود در بازه $[0, t]$ رخ دهد عبارت است از:

$$P(A_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

که تابع توزیع فوق، همان توزیع نمایی با پارامتر λ است و زمان A_1 توزیع نمایی با میانگین $E(A_1) = \frac{1}{\lambda}$ همچنین می توان نشان داد که تمام مدت های بین ورود، A_1 ، A_2 و مستقل و توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ دارد.

نکته: برای تعریف فرایند پواسون، می توان نشان داد که اگر مدت های بین دو ورود متوالی مستقل و دارای توزیع نمایی باشد، تعداد ورود تا زمان t ، **سه شرط** مربوط به فرایند پواسون برآورده است و در نتیجه ورود از **فرایند پواسون** پیروی می کند.

نکته (انشعاب تصادفی): تصور کنید سفارش ها طبق فرایند پواسون با آهنگ λ به کارگاهی وارد می شود. علاوه بر این، تصور کنید که هر ورود با احتمال $\frac{1}{3}$ برچسب اولویت بالا و با احتمال $\frac{2}{3}$ برچسب اولویت پایین می خورد. پس هر پیشامد نوع ۱ نظیر یک ورود با اولویت بالا و هر پیشامد نوع ۲ نظیر یک ورود با اولویت پایین است. اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ به شرح بالا تعریف شود، هر دو متغیر از فرایند پواسون با آهنگ های به ترتیب $\frac{\lambda}{3}$ و $\frac{2\lambda}{3}$ پیروی می کند.

نکته (فرایند ادغامی): یک جریان ورود پواسون با $\lambda_1 = 10$ ورود در ساعت با جریان ورود پواسون دیگری با $\lambda_2 = 17$ ورود در ساعت ترکیب یا ادغام می شود. فرایند ترکیب شده، فرایند پواسون با $\lambda = 27$ است.

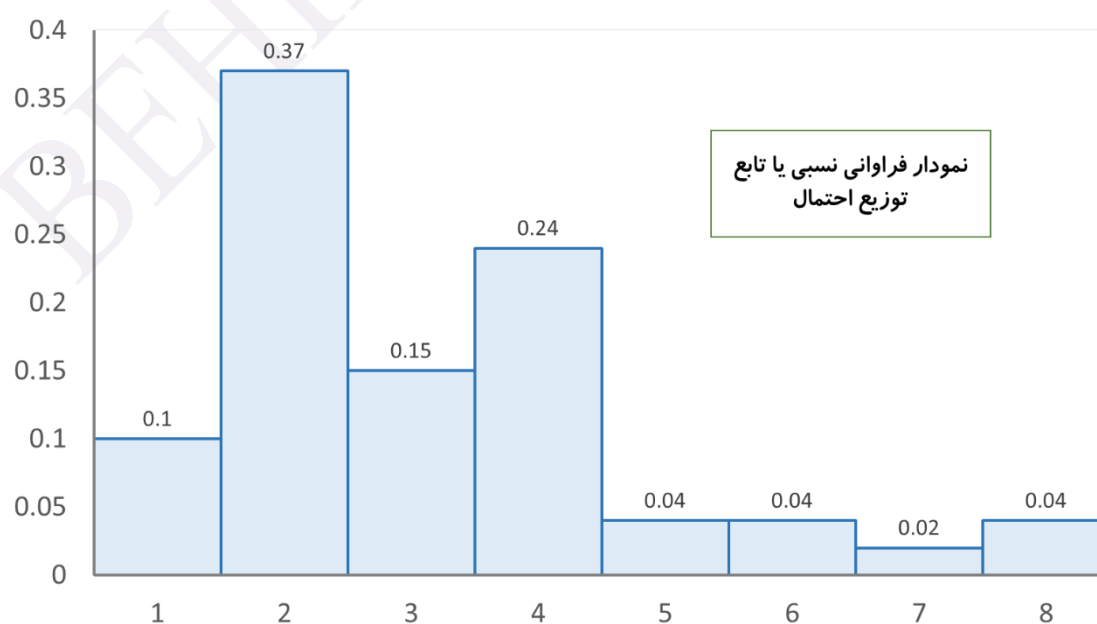
توزیع‌های تجربی

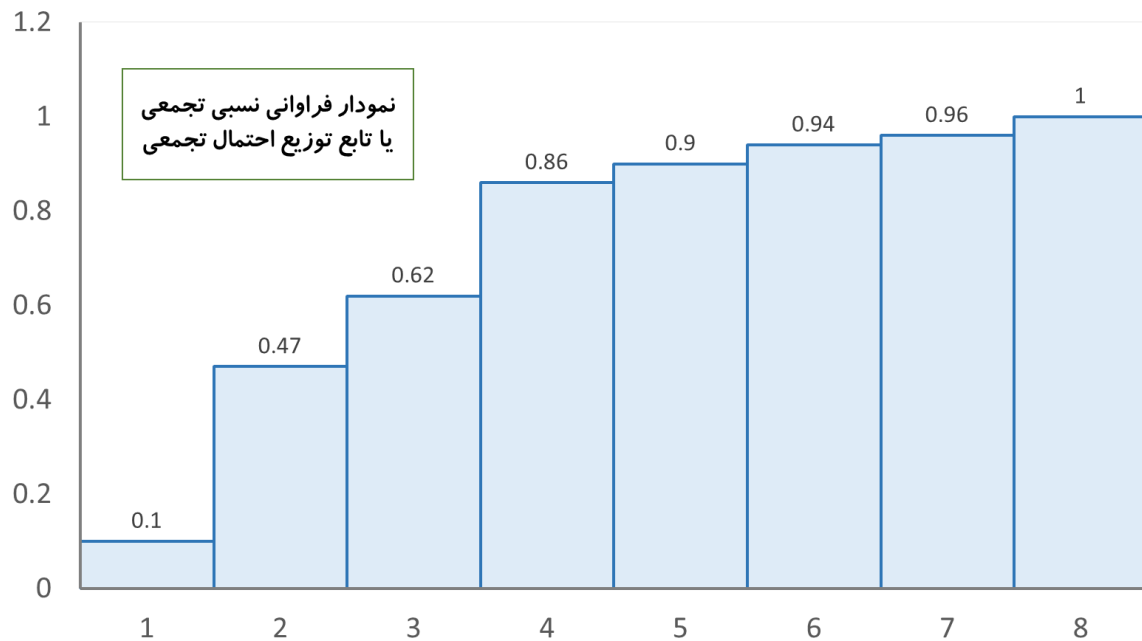
توزیع تجربی ممکن است به صورت پیوسته یا گسسته باشد. هر گاه تعیین این که یک متغیر تصادفی دارای توزیع معلوم خاصی است یا نه ممکن باشد، از توزیع تجربی استفاده می‌کنیم.

مثال (توزیع تجربی گسسته)

در یک رستوران محلی به هنگام مشتریان در گروه‌ها از یک تا ۸ نفر وارد می‌شوند. تعداد افراد هر گروه در ۳۰۰ گروه آخر مورد مشاهده قرار گرفته و نتایج در جدول زیر خلاصه شده است. نمودار فراوانی نسبی (تابع توزیع احتمال) و نمودار فراوانی تجمعی نسبی (تابع توزیع احتمال تجمعی) در ادامه رسم شده است.

تعداد ورود در گروه	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی نسبی تجمعی
۱	۳۰	۰.۱	۰.۱
۲	۱۱۰	۰.۳۷	۰.۴۷
۳	۴۵	۰.۱۵	۰.۶۲
۴	۷۱	۰.۲۴	۰.۸۶
۵	۱۲	۰.۰۴	۰.۹۰
۶	۱۳	۰.۰۴	۰.۹۴
۷	۷	۰.۰۲	۰.۹۶
۸	۱۲	۰.۰۴	۱.۰۰

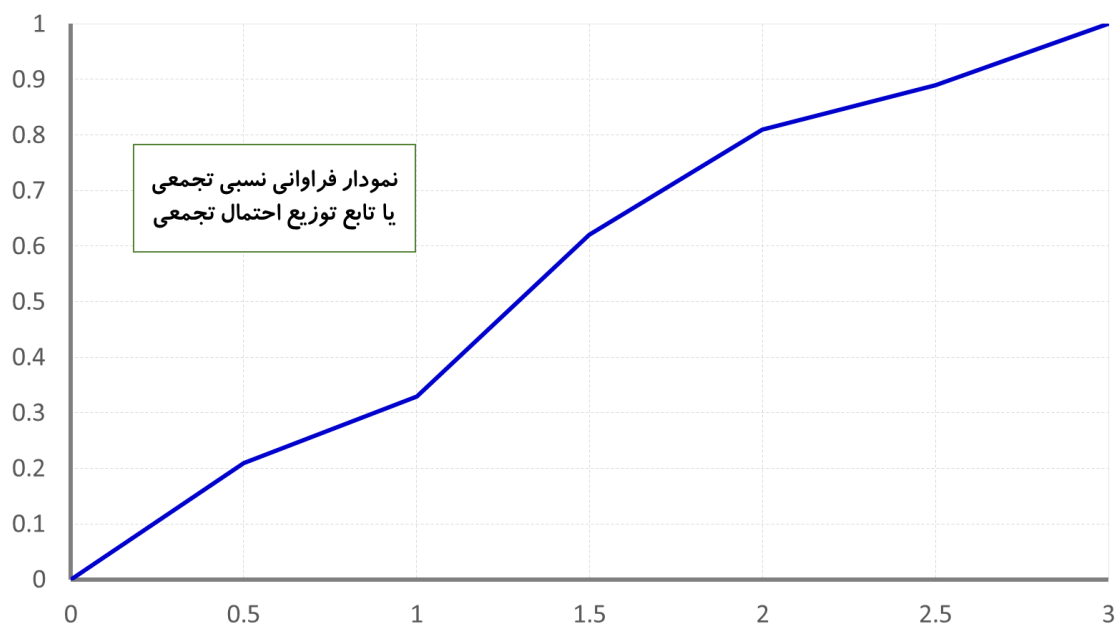




مثال (توزیع تجربی پیوسته)

مدت لازم برای تعمیر یک سیستم نقاله که دچار خراب شدگی دارد، در آخرین ۱۰۰ مورد گردآوری شده و نتایج در جدول زیر آمده است. تعداد مواردی که تعمیر بین صفر و ۰.۵ ساعت وقت گرفته بوده است ۲۱ مورد بوده است و برای سایر بازه ها به طریق مشابه است. تابع توزیع احتمال تجمعی در شکل زیر نشان داده است.

فاصله (ساعت)	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
$0 < x \leq 0.5$	۲۱	۰.۲۱	۰.۲۱
$0.5 < x \leq 1.0$	۱۲	۰.۱۲	۰.۳۳
$1.0 < x \leq 1.5$	۲۹	۰.۲۹	۰.۶۲
$1.5 < x \leq 2.0$	۱۹	۰.۱۹	۰.۸۱
$2.0 < x \leq 2.5$	۸	۰.۰۸	۰.۸۹
$2.5 < x \leq 3.0$	۱۱	۰.۱۱	۱.۰۰



برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**