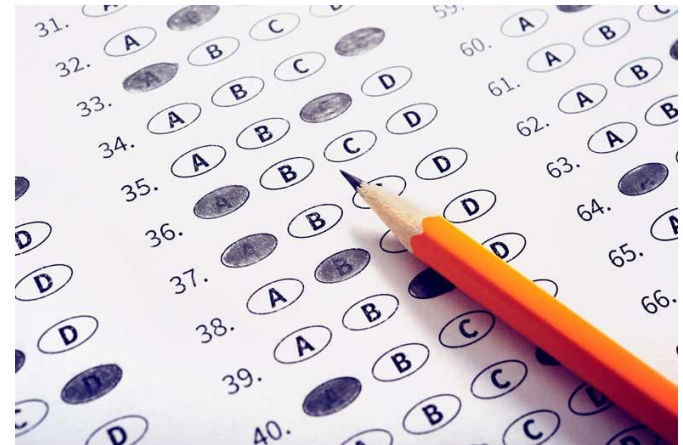
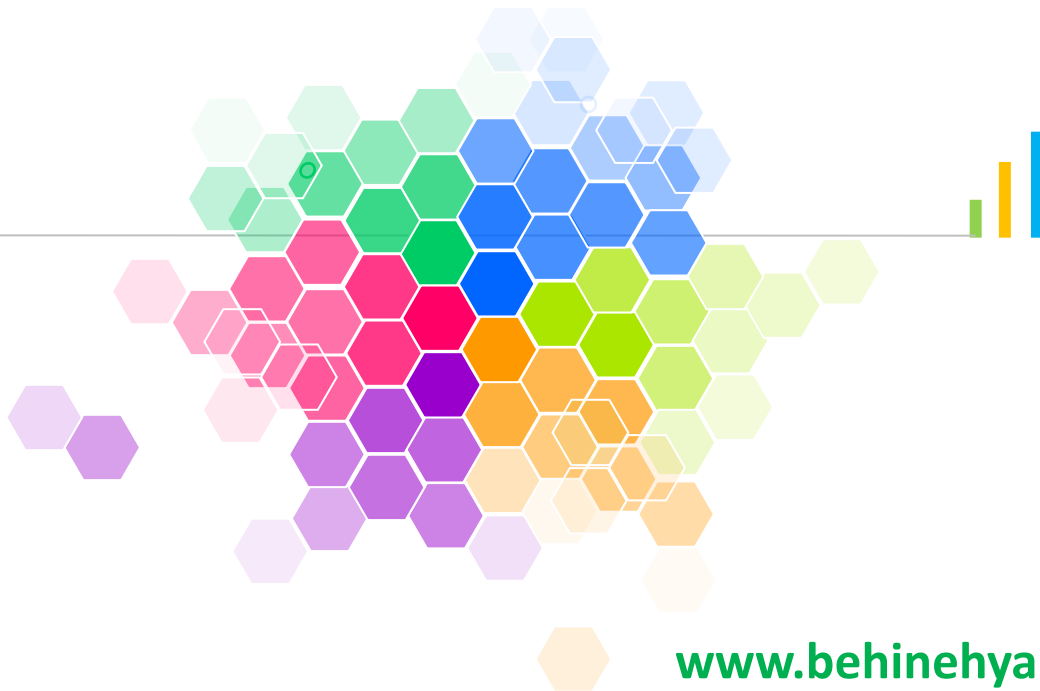


به نام خدا



کنکور کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ۱۳۹۹



حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۱- در یک مسئله امتزاج قرار است از ترکیب با نسبت برابر سه ماده A، B و C یک محصول تولید شود. درصد کربن موجود در هر یک از مواد A، B و C در جدول زیر داده شده است. می‌خواهیم درصد کربن در محصول تولیدی بین حداقل ۲۵ و حداکثر ۳۵ درصد باشد. اگر x_j میزان ماده j در محصول باشد ($j = A, B, C$)، آنگاه کدام محدودیت در مدل ریاضی مسئله وجود دارد؟

ماده	درصد کربن
A	۲۰٪
B	۴۰٪
C	۳۰٪

$$(1) \quad 3x_A + x_C \leq x_B$$

$$(2) \quad 2x_A + 4x_B + 3x_C \leq 2/5$$

$$(3) \quad x_A \leq 3x_B + x_C$$

$$(4) \quad 2x_A + 4x_B + 3x_C \leq 3/5$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

x_j برابر میزان ماده j در محصول است.

$x_A + x_B + x_C$ برابر میزان محصول است.

$0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C$ میزان کربن در محصول است.

$$\frac{25}{100} \leq \frac{0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C}{x_A + x_B + x_C} \leq \frac{35}{100}$$

$$\frac{25}{100} \leq \frac{0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C}{x_A + x_B + x_C} \rightarrow 0.25x_A + 0.25x_B + 0.25x_C \leq 0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C$$

$$0.05x_A \leq 0.15x_B + 0.05x_C \rightarrow \boxed{x_A \leq 3x_B + x_C}$$

$$\frac{0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C}{x_A + x_B + x_C} \leq \frac{35}{100} \rightarrow 0.2x_A + 0.4x_B + 0.3x_C \leq 0.35x_A + 0.35x_B + 0.35x_C$$

$$0.05x_B \leq 0.15x_A + 0.05x_C \rightarrow \boxed{x_B \leq 3x_A + x_C}$$

لذا گزینه ۳ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۲- در یک مرکز خدماتی، ساعات کاری و حداقل کارمندان مورد نیاز برحسب ۴ شیفت کاری در جدول زیر داده شده است. هر کارمندی که دو شیفت متوالی کار کند، ساعتی ۱۲ هزار تومان و هر کارمندی که دو شیفت غیرمتوالی کار کند، ساعتی ۱۸ هزار تومان دریافت می‌کند. در مدل‌سازی مسئله، اگر x_{ij} برابر تعداد کارمندانی باشد که در هر دو شیفت i و j کار می‌کنند و در صورتی که هدف کمینه‌سازی کل هزینه باشد، آنگاه یکی از محدودیت‌های مدل ریاضی مسئله، کدامیک از موارد زیر خواهد بود؟

شماره	شیفت کاری	تعداد کارمند مورد نیاز
۱	۶-۲۴	۱۵
۲	۱۲-۶	۵
۳	۱۲-۱۸	۱۲
۴	۱۸-۲۴	۶

$$x_{12} + x_{23} + x_{24} \geq 12 \quad (1)$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{34} \geq 15 \quad (2)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 6 \quad (3)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{34} \geq 5 \quad (4)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

X_{ij} برابر تعداد کارمندی است که در دو شیفت i و j کار می کنند.
تعداد کارگرانی که در شیفت ۱ کار می کنند.

$$X_{12} + X_{13} + X_{14} \geq 15$$

تعداد کارگرانی که در شیفت ۲ کار می کنند.

$$X_{12} + X_{23} + X_{24} \geq 5$$

تعداد کارگرانی که در شیفت ۳ کار می کنند.

$$X_{13} + X_{23} + X_{34} \geq 12$$

تعداد کارگرانی که در شیفت ۴ کار می کنند.

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 6$$

گزینه ۳ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۳ چه تعداد از مجموعه‌های زیر محدب هستند؟

$$S_1 = \{x, y \in \mathbb{R} : |x| \leq y\}$$

$$S_2 = \{x, y \in \mathbb{R} : x^2 \leq y^2\}$$

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}, y > 0 : x^2 + 1 \leq y^2\}$$

$$S_4 = \{x \in \mathbb{R}, y > 0 : |x| + 1 \leq |y|\}$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

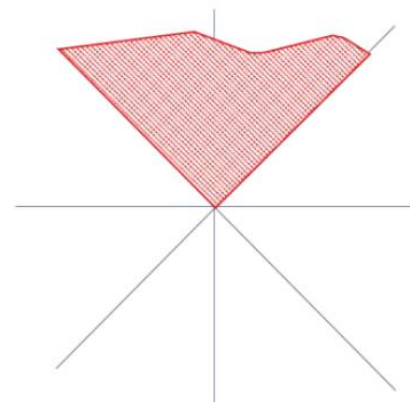
۰ (۱)

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



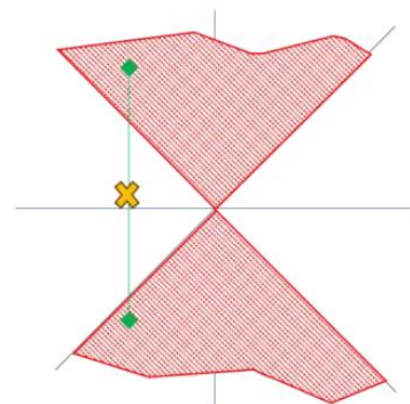
حل:

$$S_1 = |X| \leq y \rightarrow -y \leq X \leq y$$



این مجموعه محدب است.

$$S_2 = \{x, y \in \mathbb{R} : x^2 \leq y^2\}$$

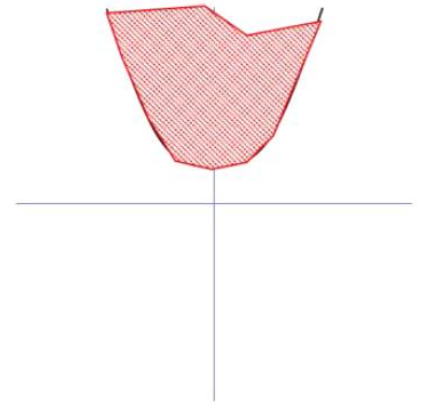


این مجموعه محدب نیست.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

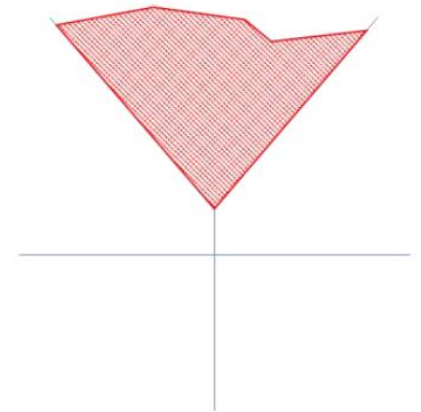


$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}, y > 0, x^2 + 1 \leq y^2\}$$



این مجموعه محدب است.

$$S_4 = \{x \in \mathbb{R}, y > 0 : |x| + 1 \leq |y|\}$$



این مجموعه محدب است.

سه مجموعه محدب است لذا گزینه ۴ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۴- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

اگر متغیرهای x_1 و x_2 پایه‌ای باشند، در صورت ورود متغیر x_3 به پایه، تغییرات در مقادیر متغیرهای x_1 و x_2 به ازای هر واحد تغییر در مقدار x_3 به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (1)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

به ازای هر واحد افزایش x_3 ، ۱.۵ واحد از x_1 کاهش و ۰.۵ واحد به x_2 افزوده می شود. لذا گزینه ۳ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۵- در مدل برنامه‌ریزی خطی سؤال ۳۴، چند جواب پایه‌ای شدنی وجود دارد (A) و از بین آن‌ها چند مورد بهینه هستند (B)؟

$$(۲) \quad B=۱, A=۳$$

$$(۱) \quad B=۱, A=۴$$

$$(۴) \quad B=۲, A=۳$$

$$(۳) \quad B=۲, A=۶$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

تمامی ترکیب های ممکن را به صورت زیر بررسی می شود. ۴ متغیر داریم و $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ حالت پایه ممکن برای این مسئله است.

$$1) x_1, x_2 = \text{basic} \rightarrow x_3 = x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_2 = 1, z = 7$$

$$2) x_2, x_3 = \text{basic} \rightarrow x_1 = x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow x_3 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, z = 6$$

$$3) x_1, x_3 = \text{basic} \rightarrow x_2 = x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow x_3 = -2, x_1 = 4, \text{infeasible}$$

$$4) x_3, x_4 = \text{basic} \rightarrow x_1 = x_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow x_4 = -4, \text{infeasible}$$

$$5) x_2, x_4 = \text{basic} \rightarrow x_1 = x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 2 \\ 4x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow x_4 = 0.5, x_2 = 1.5, z = 6.5$$

$$6) x_1, x_4 = \text{basic} \rightarrow x_2 = x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow x_4 = -1, \text{infeasible}$$

لذا سه جواب پایه شدنی و یک جواب پایه بهینه داریم. لذا گزینه ۲ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۶- جدول سیمپلکس زیر برای یک مدل برنامه‌ریزی خطی داده شده است که در آن پارامترهای $a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2$ مجهول هستند. تابع هدف مدل بیشینه‌سازی است و کلیه متغیرها غیرمنفی هستند. همچنین می‌دانیم $b > 0$ است. در کدام حالت جواب بهینه چندگانه نداریم؟ (با فرض اینکه سایر پارامترهایی که در جواب ذکر نشده‌اند از نظر مقدار دلخواه باشند).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	c_1	c_2	0	0	0	0	10
x_3	4	a_1	1	0	a_2	0	b
x_4	-1	-5	0	1	-1	0	2
x_6	a_3	-3	0	0	-4	1	3

$$c_1 = 0, c_2 > 0 \quad (1)$$

$$c_1 > 0, c_2 > 0, a_2 > 0 \quad (2)$$

$$c_1 > 0, c_2 = 0, a_1 > 0 \quad (3)$$

$$c_1 > 0, c_2 = 0, a_2 < 0, a_1 = 0 \quad (4)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

با توجه به این که $b > 0$ است جواب فعلی امکان پذیر است. لذا برای بهینه بودن باید سطر صفر مثبت باشد. در تمام گزینه ها $c_2 > 0$ or $= 0$ است لذا حتما جواب بهینه چندگانه داریم لذا این سوال جواب ندارد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۷- در مسئله ۳۶، اگر بخواهیم جدول فعلی بیانگر آن باشد که مقدار تابع هدف مدل بی کران است، کدام مورد (با فرض اینکه پارامترهایی که در جواب بیان نشده‌اند از نظر مقدار دلخواه باشند) درست است؟

(۲) $c_1 > 0, c_2 > 0, a_3 > 0$

(۱) $c_1 > 0, c_2 < 0, a_1 < 0$

(۴) $c_1 < 0, c_2 = 0, a_3 > 0$

(۳) $c_1 = 0, c_2 > 0, a_3 < 0$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

برای این منظور باید اعداد یک ستون منفی یا صفر باشند که $a_1 < 0$ و $c_2 < 0$ می شود. اگر $c_1 > 0$ باشد، باعث می شود با افزایش مقدار x_2 به بی نهایت، مسئله بی کران شود. لذا گزینه ۱ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۸- در مورد یک مدل برنامه‌ریزی خطی (اولیه) و مدل دوگان آن، از بین ۹ حالت زیر چند حالت امکان‌پذیر نیست؟

اولیه \ دوگان	جواب بهینه محدود	بی‌کران	غیرموجه
جواب بهینه محدود	i	ii	iii
بی‌کران	iv	v	vi
غیرموجه	vii	viii	ix

۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

همزاد / اولیه	جواب بهینه محدود	بی کران	غیر موجه
جواب بهینه محدود	مقدار جواب بهینه مدل اولیه برابر با جواب بهینه مدل همزاد می شود لذا در این حالت امکان پذیر است.	اگر مدل اولیه، جواب بهینه محدود داشته باشد، مسئله همزاد هم جواب بهینه محدود دارد لذا این حالت امکان ناپذیر است.	اگر مدل اولیه، جواب بهینه محدود داشته باشد، مسئله همزاد هم جواب بهینه محدود دارد لذا این حالت امکان ناپذیر است.
بی کران	اگر مدل همزاد، جواب بهینه محدود داشته باشد، مسئله اولیه جواب بهینه محدود دارد لذا این حالت امکان ناپذیر است.	مسئله همزاد حد بالا برای مسئله اولیه است لذا این که هر دو مسئله بی کران باشند، امکان ناپذیر است.	اگر مسئله همزاد غیر موجه باشد، به این معنا است که مسئله اولیه حد بالا ندارد و لذا بی کران است لذا این حالت امکان پذیر است.
غیر موجه	اگر مدل همزاد، جواب بهینه محدود داشته باشد، مسئله اولیه جواب بهینه محدود دارد لذا این حالت امکان ناپذیر است.	مثال: مسئله اولیه زیر را در نظر بگیرید: $Max \ x$ $x = -1 \rightarrow \text{infeasible}$ $x \geq 0$ مسئله همزاد مدل فوق به صورت زیر است: $Min - y$ $y \leq 1 \rightarrow \text{unbounded}$ $y \text{ urs}$ مسئله همزاد امکان پذیر است.	اگر فضای امکان پذیر تهی باشد، برای مسئله اولیه و همزاد، حالت غیر موجه ایجاد می شود و لذا این حالت امکان پذیر است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۹- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید ($f > 0$):

$$\max \quad z = v$$

$$\text{s.t.} \quad v + \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq f$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} x_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$v \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, n.$$

اگر y^* جواب بهینه دوگان متناظر با محدودیت اول باشد، دقیق‌ترین گزینه در مورد آن کدام است؟

$$0 \leq y^* \leq 1 \quad (۴)$$

$$y^* \leq 1 \quad (۳)$$

$$y^* \geq 1 \quad (۲)$$

$$y^* = 1 \quad (۱)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

y متغیر همزاد محدودیت اول اس. برای متغیر v ، محدودیت همزاد به صورت زیر می شود.

$$1 \times y = 1$$

چون متغیر v آزاد در علامت است، محدودیت همزاد به صورت تساوی می شود لذا گزینه ۱ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۰- تابع هدف زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x, y) = \alpha e^x + x^2 + y^2 + (x + y)^2$$

که در آن $x \in \{0, 1, 2\}$ و $y \in \{0, 1\}$ ، آنگاه این مدل:

- (۲) قابل خطی‌سازی برای همه α هاست.
(۴) قابل خطی‌سازی است تنها اگر $\alpha \leq 0$ باشد.

- (۱) غیرقابل خطی‌سازی برای هر $\alpha \neq 0$ است.
(۳) قابل خطی‌سازی است تنها اگر $\alpha \geq 0$ باشد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

چون متغیرهای X و Y گسسته هستند، تابع $f(X, Y)$ امکان خطی سازی دارد و مستقل از a است. برای این کار باید برای تمامی مقدار ممکن X و Y (در مجموع ۶ حالت)، مقدار تابع هدف را بدست آورد. لذا گزینه ۲ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۱- تابع $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + \frac{1}{2}x^4$ دارای:

- (۱) دو کمینه محلی و یک نقطه زین‌اسبی است.
- (۲) دو نقطه زین‌اسبی و یک کمینه محلی است.
- (۳) یک کمینه عمومی، یک کمینه محلی و یک بیشینه محلی است.
- (۴) یک کمینه عمومی، یک بیشینه عمومی و یک نقطه زین‌اسبی است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + \frac{1}{2}x^4$$

$$\nabla f_x = 3x - 2y + 6x^2 + 2x^3 = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x^2 + x = 0 \rightarrow x(2x^2 + 6x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{-6 + \sqrt{36 - 4 * 2 * 1}}{4} = -0.177, x_3 = \frac{-6 - \sqrt{36 - 4 * 2 * 1}}{4} = -2.8228$$

برای مشخص شدن کمینه یا بیشینه یا زینی بودن نیاز است که ماتریس H تشکیل شود.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \nabla f_{xx} & \nabla f_{xy} \\ \nabla f_{yx} & \nabla f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 12x + 6x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H(x_1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = 2 > 0 \rightarrow x_1 \text{ is min}$$

$$H(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = -2 < 0 \rightarrow x_2 \text{ is saddle}$$

$$H(x_3) = \begin{bmatrix} 16.5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 > 0 \rightarrow x_3 \text{ is min}$$

گزینه ۱ درست است.

Navigation icons: back, forward, search, and other presentation controls.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۲- دو مدل برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$P_1 \quad \max z = x_1$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$P_2 \quad \max z = x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 - x_2 = -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

قیمت سایه‌ای متناظر با محدودیت تساوی در هر مدل را در نظر بگیرید. این قیمت:

- (۱) در هر دو مدل منفی است.
- (۲) در P_1 مثبت و در P_2 منفی است.
- (۳) در هر دو مدل مثبت است.
- (۴) در P_1 منفی و در P_2 مثبت است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$P_1 : \text{Max } Z = x_2$$

$$x_1 + x_2 = 2 \ (y)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

↓

$$\text{Dual } P_1 : \text{Min } 2y$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_1 \geq 1 \\ y_1 \text{ urs} \end{array} \right\} \rightarrow y_1 \geq 1$$

$$P_2 : \text{Max } Z = x_2$$

$$-x_1 - x_2 = -2 \ (y)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

↓

$$\text{Dual } P_2 : \text{Min } -2y$$

$$\left. \begin{array}{l} -y_1 \geq 0 \\ -y_1 \geq 1 \\ y_1 \text{ urs} \end{array} \right\} \rightarrow y_1 \leq -1$$

در مدل P_1 قیمت سایه مثبت و در مدل P_2 قیمت سایه منفی است. گزینه ۲ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۳- مدل برنامه‌ریزی حمل‌ونقل زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } 10 \leq \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq 20 \quad i = 1, \dots, 4$$

$$5 \leq \sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq \alpha \quad j = 1, \dots, 5$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 5$$

به ازای چه مقادیری از α مدل فوق دارای جواب است؟ (α یک مقدار ثابت مثبت است.)

$$\alpha \leq 20 \quad (۴)$$

$$\alpha \geq 5 \quad (۳)$$

$$\alpha \leq 10 \quad (۲)$$

$$\alpha \geq 8 \quad (۱)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$T = \text{sum of production} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \rightarrow 10 \times 4 \leq T \leq 20 \times 4$$

$$D = \text{sum of demand} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 x_{ij} \rightarrow 25 \leq D \leq 5a$$

دو بازه فوق باید با هم همپوشانی داشته باشند. لذا $5a \geq 40$ و انگاه $a \geq 8$. لذا گزینه ۱ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۴- مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید. اگر روابط $0 < a < b < c$ و $b = 2a$ و $c = 4a$ برقرار باشند، در این صورت این مدل دارای چند جواب بهینه است؟

$$\begin{cases} \max & z = x + 2y \\ \text{s.t.} & ax + by \leq c \\ & x, y \geq 0. \end{cases}$$

(۴) بی‌شمار

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

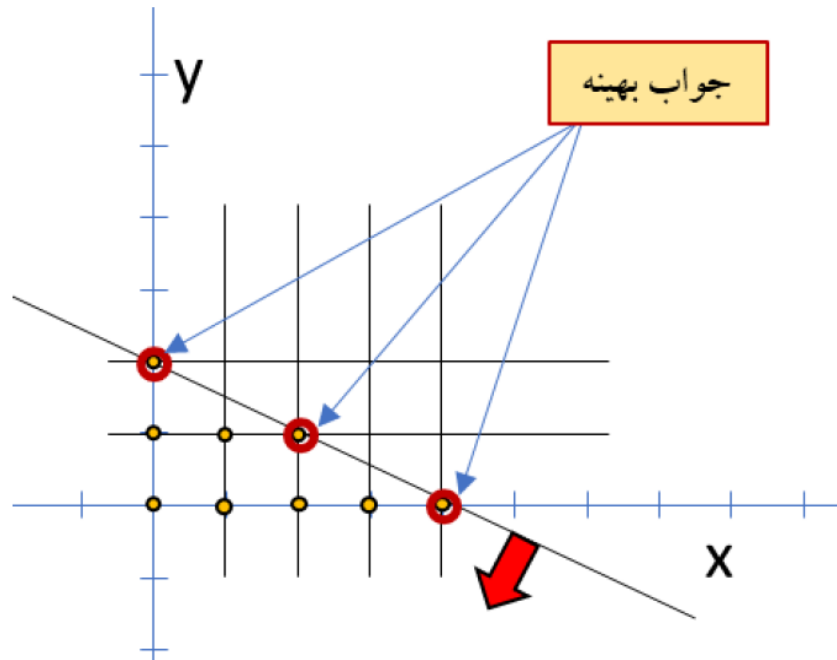
حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x + 2y \\ ax + by &\leq b \\ x, y &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{b=2a, c=4a}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x + 2y \\ ax + 2ay &\leq 4a \\ x, y &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x + 2y \\ x + 2y &\leq 4 \\ x, y &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$



سه جواب بهینه دارد لذا گزینه ۳ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۵- کدام دسته از شروط زیر معادل نیمه‌معین مثبت بودن ماتریس A است؟

$$A = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ab &\geq d^2 \\ c, d &\geq 0 \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} ab &\geq d^2 \\ a, b, c &\geq 0 \end{aligned} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} ab &\geq d^2 \\ a, b, d &\geq 0 \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} ab &\geq d^2 \\ a, c &\geq 0 \end{aligned} \quad (۱)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$A = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\text{positive semidefinite} \rightarrow a \geq 0, \det \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix} \geq 0, \det \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} a \geq 0 & a \geq 0 \\ ab - d^2 \geq 0 & \rightarrow c \geq 0 \\ c(ab - d^2) \geq 0 & ab \geq d^2 \end{array}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۶- یک بیضی با معادله $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. محیط مستطیل داخل این بیضی با بیش‌ترین مساحت چه مقداری است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$\text{Max } (2x)(2y) = 4xy$$

s.t.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - 4y^2}$$

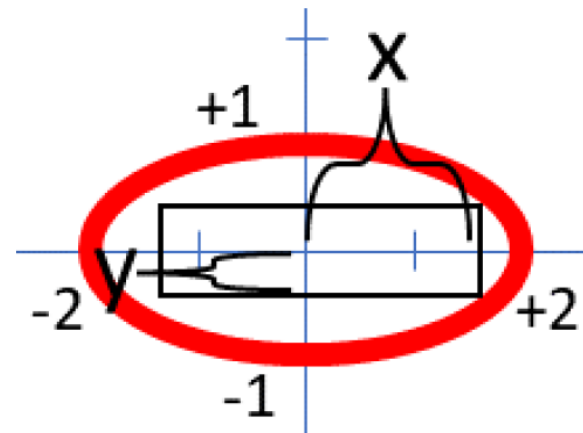
$$\text{Max } 4xy = 4y\sqrt{4 - 4y^2} = \sqrt{4y^2 - 4y^4}$$

$$f(y) = 4y^2 - 4y^4 \rightarrow \frac{df}{dy} = 8y - 16y^3 = 0 \rightarrow 8y(1 - 2y^2) = 0$$

$$y = 0 \quad \times$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \sqrt{4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

$$\text{cir} = 2(2x + 2y) = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$



گزینه ۴ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۷- فرض کنید $v^* \neq 1$ مقدار بهینه مدل زیر باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = |f(x)| \\ \text{s.t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

اگر w^* برابر مقدار بهینه مدل زیر باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \max \quad & w = \frac{1}{|f(x)| - 1} \\ \text{s.t.} \quad & x \in S \end{aligned}$$

$$w^* \geq \frac{1}{v^* - 1} \quad (۲)$$

$$w^* \neq \frac{1}{v^* - 1} \quad (۴)$$

$$w^* \leq \frac{1}{v^* - 1} \quad (۱)$$

$$w^* = \frac{1}{v^* - 1} \quad (۳)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$v^* \leq |f(x)| \rightarrow v^* - 1 \leq |f(x)| - 1 \leq \rightarrow \frac{1}{v^* - 1} \geq \frac{1}{|f(x)| - 1}$$

$$\text{Max } w = \frac{1}{|f(x)| - 1} \leq \frac{1}{v^* - 1} \rightarrow w^* \leq \frac{1}{v^* - 1}$$

گزینه ۱ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۴۸- تعاریف زیر را لحاظ نموده و بیان کنید که کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$V_1 = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y)$$

$$V_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

$$V_3 = \min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

$$V_4 = \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

$$V_2 \leq V_3 \leq V_1 \leq V_4 \quad (۲)$$

$$V_2 \leq V_3 \leq V_4 \leq V_1 \quad (۴)$$

$$V_2 \leq V_1 \leq V_3 \leq V_4 \quad (۱)$$

$$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq V_4 \quad (۳)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

روشن است که v_3 از همه کمتر و v_4 از همه بیشتر است. باید ارتباط بین v_1 و v_2 را بدست آورد.

$$\max_{x \in X} f(x, y) = f(\alpha(y), y) \geq f(x, y)$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, \beta(x)) \leq f(x, y)$$

$$f(\alpha(y), y) \geq f(x, y) \geq f(x, \beta(x)) \rightarrow f(\alpha(y), y) \geq f(x, \beta(x))$$

چون به ازای تمامی مقادیر رابطه فوق برقرار است، لذا رابطه زیر هم برقرار است.

$$\min_{y \in Y} f(\alpha(y), y) \geq \max_{x \in X} f(x, \beta(x))$$

که با جایگزینی خواهیم داشت:

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \geq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \rightarrow v_1 \geq v_2$$

لذا گزینه ۲ درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۹- مدل زیر را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم آن را با روش برنامه‌ریزی پویا حل کنیم، با فرض آن که s_2 میزان باقی‌مانده منبع در مرحله دوم باشد، مقدار بهینه x_3 در آن مرحله چقدر است؟ ($b, c > 0$)

$$\min x_1^2 + bx_2^2 + x_3^2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 = c$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\frac{b}{b+1} s_2 \quad (۴)$$

$$s_2 \quad (۳)$$

$$\frac{s_2}{b+1} \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

n=3		
حالت	x_3	f_3
S_3	S_3	S_3^2

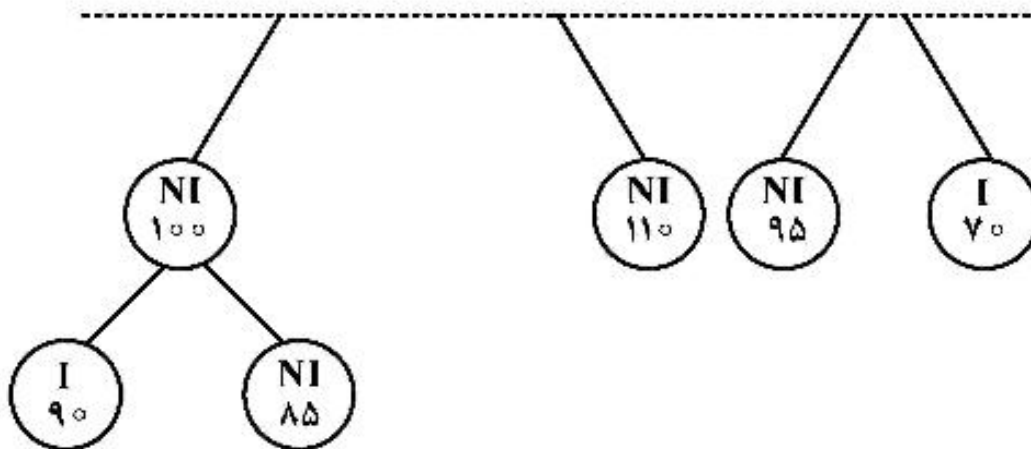
$$\frac{df}{dx_2} = 2bx_2 + 2(x_2 - S_2) = 0 \rightarrow x_2 = \frac{S_2}{b+1}$$

n=2		
حالت	x_2	f_2
S_2	x_2	$bx_2^2 + \underbrace{(S_2 - x_2)^2}_{3rd\ stage} = f(x)$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۵- در تصویر زیر، تمام گره‌های ایجاد شده در حل یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح به‌شینه‌سازی با استفاده از روش شاخه و کران قبل اتمام حل داده شده است. با فرض اینکه ضرایب تابع هدف مدل اعدادی صحیح باشند، در صورت ادامه کار حداکثر چقدر تابع هدف بهبود می‌یابد؟ (داخل هر گره مقدار بهینه مدل متناظر با آن گره لحاظ شده و نماد I و NI به ترتیب بیانگر صحیح بودن و ناصحیح بودن جواب حاصل است و همچنین در هیچ گرهی جواب

چندگانه نداریم.)



۲۰ (۱)

۱۰ (۲)

۹ (۳)

۱۹ (۴)

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

بهترین جواب عدد صحیح برابر ۹۰ است. گره ۱۱۰، دارای جواب بهتری از نظر غیر صحیح است ولی چون صحیح نیست، امکان ۲۰ بهبود در تابع هدف میسر نیست. شاید در گره های ذیل این جواب به جواب صحیح برسیم که با توجه به گزینه ها، بهبود ۱۹ متحمل است و لذا گزینه ۴ درست است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com