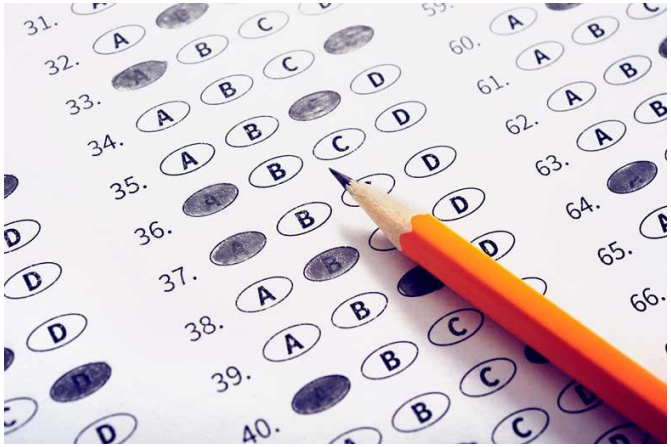
به نام خدا

کنکور کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ۱۳۹۰



حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۱- برای محاسبهٔ هزینهٔ برق مصرفی تا ۴۰ کیلووات هزینهٔ a_1، بین ۴۰ تا ۶۰ کیلووات برای مازاد ۲۰ کیلووات a_2 که $(a_2 > a_1)$ و برای مقادیر بیشتر از ۶۰ کیلووات a_3 که $(a_3 > a_2)$ است در نظر گرفته می‌شود. برای مینیمم‌سازی چنانچه $i = 1,2,3$ و x_i میزان برق مصرفی در هر یک از بازه‌ها باشد و y_i نیز متغیر صفر و یک که مقدار یک را تنها زمانی که x_i به حد بالای خود برسد بگیرد. فرم مناسب مدل‌سازی کدام گزینه زیر است؟ (M عدد بزرگ مثبت است.)

۱)
$$\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 \le 40, \quad x_2 \le 20, \quad x_3 \ge 60$$

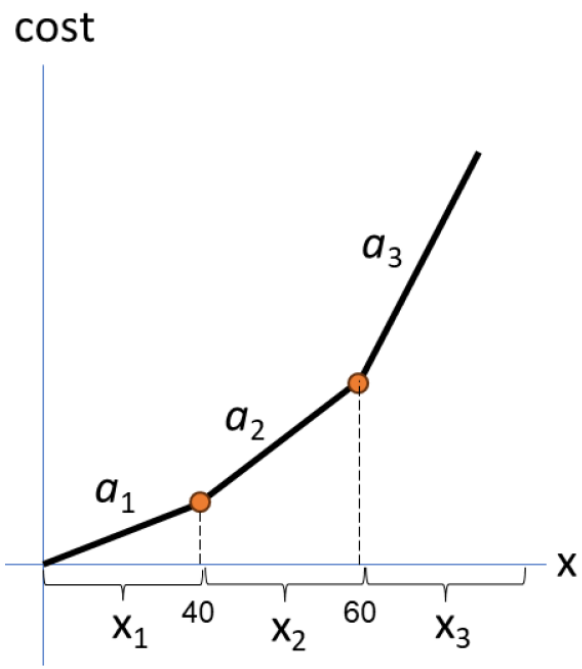
۲)
$$\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$$
$$\text{s.t.} \quad 40 y_1 \le x_1 \le 40, \quad 20 y_1 \le x_2 \le 20 y_2, \quad x_3 \le M y_3$$

۳)
$$\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le x_1 \le 40 y_1, \quad 20 y_2 \le x_2 \le 20 y_1, \quad x_3 \le M y_3$$

۴)
$$\min a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 40 y_1 \le x_1 \le 40, \quad 20 y_2 \le x_2 \le 20 y_1, \quad x_3 \le M y_3$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:



$$0 \le x_1 \le 40 \rightarrow c = a_1 x_1$$

$$0 \le x_2 \le 20 \rightarrow c = 40a_1 + a_2 x_2$$

$$x_3 \ge 0 \rightarrow c = 40a_1 + 20a_2 + a_3 x_3$$

برای مدل سازی سه حالت فوق به صورت زیر عمل می کنیم.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$Min\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$1)40y_1 \le x_1 \le 40$$

$$2)20y_2 \le x_2 \le 20y_1$$

$$3)0 \le x_3 \le My_2$$

$$if \quad y_1 = 0 \xrightarrow{(2)} x_2 = 0, y_2 = 0 \xrightarrow{(3)} x_3 = 0, 0 \le x_1 \le 40 \rightarrow c = a_1x_1$$

$$if \quad y_1 = 1, y_2 = 0 \xrightarrow{(1)(2)} x_1 = 40, 0 \le x_2 \le 20 \xrightarrow{(3)} x_3 = 0 \rightarrow c = 40a_1 + a_2x_2$$

$$if \quad y_1 = 1, y_2 = 1 \xrightarrow{(1)(2)} x_1 = 40, x_2 = 20, 0 \le x_3 \le \infty \rightarrow c = 40a_1 + 20a_2 + a_3x_3$$

لذا گزینه 4 درست است.

۳۲- یک شرکت تولیدی کلاً ۴۰ ساعت وقت جهت تولید محصولات زیر دارد:

تولید هر واحد محصول A نیازمند یک ساعت کار

تولید هر واحد محصول B نیازمند دو ساعت کار و دو واحد محصول A است.

تولید هر واحد محصول C نیازمند سه ساعت کار و یک واحد محصول B است.

محصولاتی که در تولید محصولات دیگر استفاده می‌شوند جزئی از آنها شده و قابل تفکیک نیستند. اگر میزان تولید اولیه محصولات A، B و C را به ترتیب با X_A، X_B و X_C نشان دهیم، کدام گزینه محدودیت ساعت کار به صورت زیر خواهد بود؟

۱) $X_A + ۴X_B + ۷X_C \leq ۴۰$

۲) $X_A + ۷X_B + ۴X_C \leq ۴۰$

۳) $۴X_A + ۷X_B + X_C \leq ۴۰$

۴) $۷X_A + ۴X_B + X_C \leq ۴۰$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

تولید هر محصول A یک ساعت زمان می برد.

تولید هر محصول B 2 ساعت و 2 محصول A (هر محصول A یک ساعت زمان می برد)که برابر با 4 ساعت.

تولید هر محصول C، 3 ساعت و 1 واحد محصول B (هر محصول B 4 ساعت زمان می برد) که برابر با 3+4=7 می شود.

لذا محدودیت زمانی به صورت زیر می شود:

$$x_A + 4x_B + 7x_C \leq 40$$

لذا گزینه 1 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۳- فرض کنید y_A، y_B و y_C متغیرهای صفر و یک نمایندهٔ انجام یا عدم انجام آلترناتیوهای A، B و C باشند ($y_i = ۱$ انجام و $y_i = ۰$ عدم انجام) اگر A یا B انتخاب شود C نباید انتخاب شود با کدام گزینه زیر هم ارز است؟

۱) $y_A + y_B \le ۲y_C$

۲) $y_A + y_B \le ۲(۱ - y_C)$

۳) $y_A - y_B \le ۲(۱ - y_C)$

۴) $y_A + y_B \le ۲(۱ + y_C)$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

بیان ریاضی این شرط به صورت زیر است.

$$y_A = 1 \; or \; y_B = 1 \rightarrow y_C = 0$$

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه 1:

$$CE \Rightarrow y_A = 1, y_B = 0 \rightarrow 1 + 0 \leq 2 * 0$$

گزینه 3:

$$CE \Rightarrow y_A = 0, y_B = 1 \rightarrow 0 - 1 \leq 2 * (1 - y_C)$$

y_C می تواند صفر یا یک باشد که خلاف فرض است.

گزینه 4

$$CE \Rightarrow y_A = 1, y_B = 1 \rightarrow 1 + 1 \leq 2 * (1 + y_C)$$

y_C می تواند صفر یا یک باشد که خلاف فرض است.

لذا فقط گزینه 2 باقی می ماند لذا گزینه 2 درست است. به بررسی این گزینه می پردازیم.

$$y_A = 1, y_B = 0 \Rightarrow y_C = 0 \rightarrow 1 + 0 \leq 2(1 - 0) \quad OK$$

$$y_A = 0, y_B = 1 \Rightarrow y_C = 0 \rightarrow 0 + 1 \leq 2(1 - 0) \quad OK$$

$$y_A = 1, y_B = 1 \Rightarrow y_C = 0 \rightarrow 1 + 1 \leq 2(1 - 0) \quad OK$$

$$y_A = 0, y_B = 0 \Rightarrow y_C = 0 \; or \; 1 \rightarrow 0 + 0 \leq 2(1 - 0) \; or \; 2(1 - 1) \quad OK$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۴- در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$2x_1 + x_2 \le 8$$

$$-x_1 \le -1$$

$$-x_2 \le -1$$

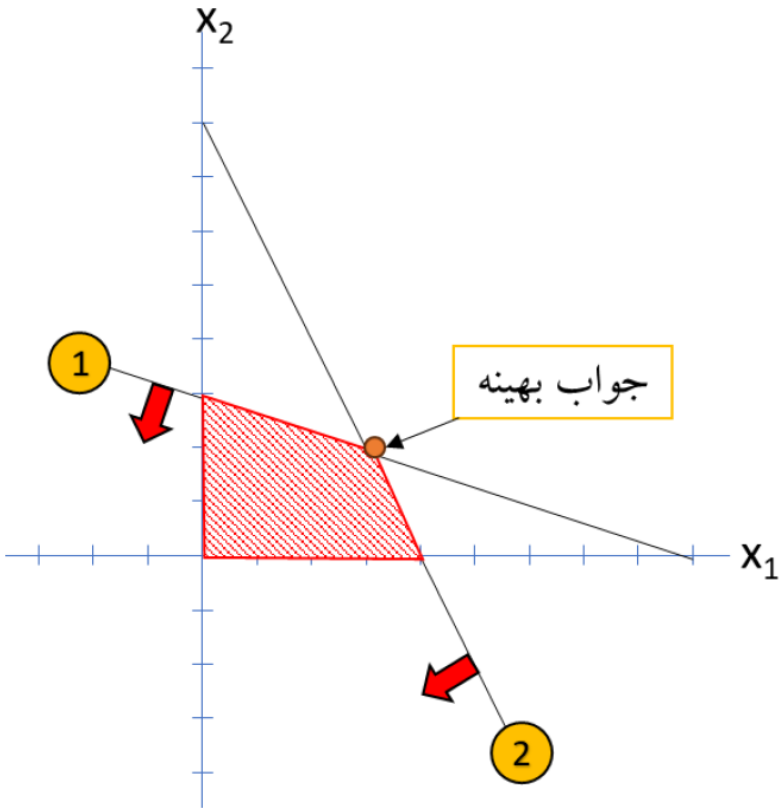
$$x_1, x_2 \ge 0$$

در نقطه بهینه، گرادیان تابع هدف، در مخروط گرادیان حاصل از کدام یک از محدودیت‌های فعال واقع می‌شود؟

۱) محدودیت ۱ و ۲ ۲) محدودیت ۱ و ۳ ۳) محدودیت ۲ و ۴ ۴) محدودیت ۳ و ۴

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:



نقطه بهینه، *(3,2)* است که از برخورد محدودیت 1 و 2 بدست می اید لذا گزینه 1 درست است.

۳۵- دو مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$z_1 = \text{Min } cx \quad \text{s.t. } f(x) = b \quad (1)\ x \geq 0$$

و

$$z_2 = \text{Min } cx \quad \text{s.t. } f(x) = tb \quad (2)\ x \geq 0$$

اگر تابع f خطی باشد آنگاه چه نتیجه‌ای گرفته می‌شود؟

۱) $z_2 \leq tz_1$ ۲) $z_2 = tz_1$ ۳) $z_2 \geq tz_1$ ۴) هیچ کدام

حل:

فرض کنید $f(x)=x$ و x نامنفی است، اگر $t=-1$ و $b=1$ باشد، $Z_1=c$ و Z_2 امکان ناپذیر می شود. لذا گزینه 4 درست است. اگر مقدار بهینه Z_2 را منهای بینهایت در نظر بگیریم (در حالت امکان ناپذیر)، به نحوی گزینه 1 هم درست می شود. برای این گزینه مثال زیر را می زنیم.

$$\begin{array}{ll} Z_1 = \min cx & Z_2 = \min cx \\ x = -1 & x = 1 \\ x \geq 0 & x \geq 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \inf, Z_1 = -\infty & Z_2 = c \end{array}$$

لذا $c \leq t \times (-\infty)$ این گزینه هم نقض می شود و لذا گزینه 4 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

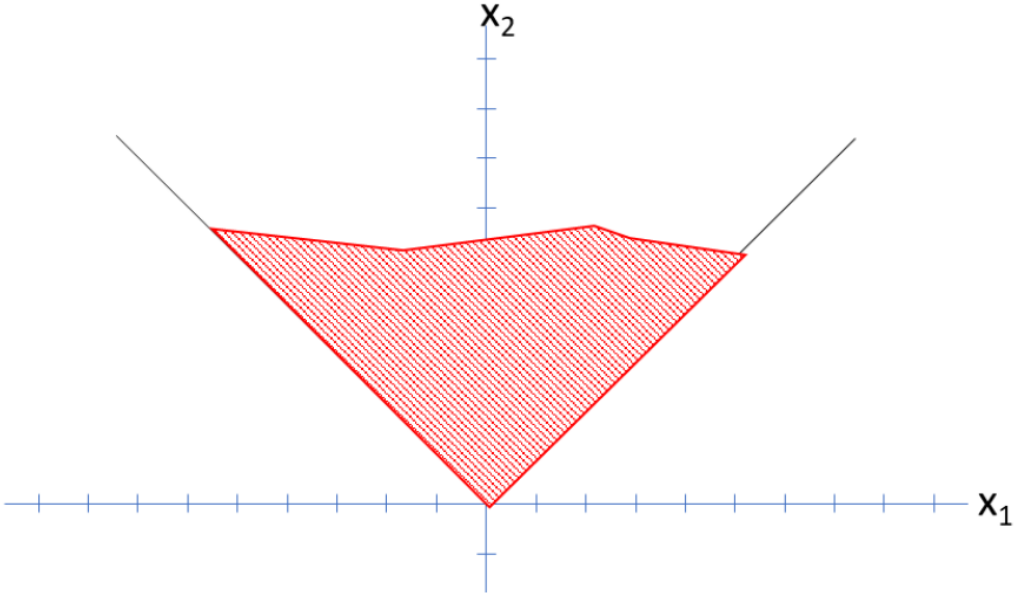
۳۶- مجموعهٔ $S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq |x_1|\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت S یک مجموعه ..... و ..... نقطه گوشه است.

۱) محدب، با یک ۲) محدب، با بینهایت ۳) غیرمحدب، با یک ۴) محدب، بدون

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$|x_1| \le x_2 \rightarrow -x_2 \le x_1 \le x_2$$



یک نقطه گوشه و مجموعه محدب است لذا گزینه 1 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۷- در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با دو متغیر اصلی و با سه محدودیت $\leq$ و تابع هدف ماکزیمم‌سازی x_1+3x_2 جدول بهینه زیر بدست آمده است. اگر مقادیر سمت راست و ضرایب تابع هدف بصورت زیر تغییر کنند:

$$b=\begin{bmatrix}8\\26\\4\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \text{ و } c=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

λ چقدر باشد تا حداکثر مقدار تابع هدف با حفظ جدول بهینه زیر حاصل گردد؟

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
x_1	۱	۰	۰/۵	۰	-۰/۵	۲
s_2	۰	۰	-۲/۵	۱	۱/۵	۱۲
x_2	۰	۱	۰/۵	۰	۰/۵	۶

۱) ۰/۵ ۲) ۰ ۳) -۰/۴ ۴) -۱/۲۵

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

متغیر پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
X_1		1	0	0.5	0	-0.5	1
S_2		0	0	-2.5	1	1.5	12
X_2		0	1	0.5	0	0.5	6
S_1		2	0	1	0	-1	4
S_2		5	0	0	1	-1	22
X_2		-1	1	0	0	1	4
S_1		1	1	1	0	0	8
S_2		4	1	0	1	0	26
S_3		-1	1	0	0	1	4
Z	1	$-1-2\lambda$	$-3+2\lambda$	0	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	0	$8+\lambda$
S_2	0	4	1	0	1	0	$26+\lambda$
S_3	0	-1	1	0	0	1	$4+\lambda$
Z	1	$-1-2\lambda-3+2\lambda$	0	0	0	$-2\lambda+3$	$(4+\lambda)(-2\lambda+3)$
S_1	0	2	0	1	0	-1	4
S_2	0	5	0	0	1	-1	22
X_2	0	-1	1	0	0	1	$4+\lambda$
Z	1	0	0	2	0	$-2\lambda+1$	$(4+\lambda)(-2\lambda+3)+8$
X_1	0	1	0	0.5	0	-0.5	2
S_2	0	0	0	-2.5	1	1.5	12
X_2	0	0	1	0.5	0	0.5	$6+\lambda$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

برای بهینگی جدول فوق و حداکثر مقدار تابع هدف شرایط زیر باید برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l} -2\lambda+1\geq 0\rightarrow \lambda\leq 0.5 \\ 6+\lambda\geq 0\rightarrow \lambda\leq -6 \end{array}\right\}\rightarrow \lambda\in[-6,0.5]$$

$$Max \quad f(\lambda)=(4+\lambda)(-2\lambda+3)+8=-2\lambda^2-5\lambda+20=0$$

$$\frac{df}{d\lambda}=0\Rightarrow=-4\lambda-5=0\rightarrow \lambda=-1.25$$

چون در محدوده است لذا جواب بهینه بیشینه است و گزینه 4 درست است.

۳۸- در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر

$$\max(x_1 + x_2)$$
$$\text{s.t.} \quad kx_1 + x_2 \le p$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

به ازای کدام مقادیر زیر مسأله دارای جواب بیکران است؟

۱) $k = 0, p = -1$ ۲) $k = 1, p = -1$ ۳) $k = -1, p = 0$ ۴) $k = 1, p = 1$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

شرط بیکرانی منفی بودن تمامی ضرایب در محدودیت ها برای یک متغیر است لذا گزینه 3 درست است.

۳۹- دو مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$P_1 \quad \text{Min}\{c'x \mid Ax \geq b\ ,\ x \geq 0\}$$

$$P_2 \quad \text{Max}\{b'u \mid A'u \leq c\ ,\ u \geq 0\}$$

و فرض کنید $b \leq 0$, $c \geq 0$ بوده و علامت i' به معنی ترانهاده بردار یا ماتریس مربوطه است. در این صورت:

۱) P_1 بیکران و P_2 غیرموجه است.

۲) P_1 غیرموجه و P_2 بیکران است.

۳) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب بهینهٔ محدود هستند.

۴) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب موجه نیستند.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$P_1: Min\ c'x \qquad Max\ wb \qquad Max\ b'w' \qquad Max\ b'u$$

$$Ax \geq b\ (w) \quad \rightarrow \quad wA \leq c' \quad \xrightarrow{Transp} \quad A'w' \leq c \quad \xrightarrow{w'=u} \quad Au \leq c \qquad = P_2$$

$$x \geq 0 \qquad w \geq 0 \qquad w' \geq 0 \qquad u \geq 0$$

با توجه به این که $b \leq 0$ لذا P_1 موجه اســـت(مبدا) و همین طور وزن $c \geq 0$ لذا P_2 در مبدا موجه لذا هر دو مســـئله جواب متناهی بهینه دارند لذا گزینه 3 درست است.

۴۰- در مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله حمل و نقل، محدودیت‌های اصلی مسأله به صورت زیر است:

$$\sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad i=۱,۲,...,m$$

$$\sum_{i} x_{ij} = b_j \qquad j=۱,۲,...,n$$

در این صورت چگالی ماتریس ضرائب (نسبت اعداد غیر صفر به اعداد صفر) آن چند درصد است؟

۱) $\frac{۲۰۰}{m+n}$

۲) $\left(\frac{m+n}{mn}\right)*۱۰۰$

۳) $\left(\frac{mn-(m+n)}{mn}\right)*۱۰۰$

۴) $\left(\frac{mn-(m+n)}{۲mn}\right)*۱۰۰$

حل:

تعداد گره های مبدا برابر m و تعداد گره های مقصد برابر n در نظر گرفته می شود. تعداد عناصر غیرصفر (که برابر یک و منهای یک است) برابر با $2mn$ است که دوبرابر تعداد کمان ها است. یک بار مربوط به گره مبدا و یک بار مربوط به گره مقصد است. برای بدست اوردن عناصر صفر، می توان تعداد کل عناصر را از تعداد عناصر غیرصفر کم کرد. تعداد کل عناصر برابر ماتریس ضرایب محدودیت ها است که برابر با ضرب تعداد محدودیت ها در تعداد متغیرها است که برابر با $mn(m+n)$ است. لذا تعداد عناصر صفر برابر با $mn(m+n)-2mn$ است. بنابراین چگالی از رابطه زیر بدست می اید.

$$\frac{2mn}{mn(m+n-2)}$$

لذا هیچ گزینه ای درست نیست.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۱- **جواب اوّلیه شدنی گوشه در مدل حمل و نقل در شبکه حمل و نقل معادل آن/دارای چه خاصیتی است؟**

۱) مابین گره‌های عرضه یال دارد.

۲) مابین گره‌ها چندین دور دارد.

۳) درخت گسترش است.

۴) به تعداد کل گره‌های عرضه و تقاضا کمان دارد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

جواب اولیه مسئله حمل و نقل، یک درخت گسترش است. لذا گزینه 3 درست است.

۴۲- مسأله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\min\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 5 \\ -\frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{3}{4}x_4 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0\ ,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

با به کارگیری روش سیمپلکس اصلاح شده در یکی از تکرارها به جدول زیر رسیده‌ایم که در آن x_6 و x_7 متغیرهای مصنوعی هستند و با فرض اینکه $X_B = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_3 \end{pmatrix}$ باشد آنگاه:

x_6	x_7	RHS
0	$-\frac{5}{3}M - \frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}M - \frac{25}{3}$
1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

۱) x_4 وارد شونده و x_3 خارج شونده است.

۲) x_1 وارد شونده و x_3 خارج شونده است.

۳) x_1 وارد شونده و x_7 خارج شونده است.

۴) x_4 وارد شونده و x_6 خارج شونده است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

متغیر پایه	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	RHS
Z	1	6	-7	1	-5	M	M	0
X_6	1	-3/4	2	-1/4	0	1	0	5
X_7	0	-1/4	3	-3/4	1	0	1	5
Z	1-M	6+M	-7-5M	1+M	-5-M	0	0	-1-M
X_6	1	-3/4	2	-1/4	0	1	0	5
X_7	0	-1/4	3	-3/4	1	0	1	5
Z	1-M	7/12M+65/12	0	-1/4M-3/4	(2M-8)/3	0	(5M+7)/3	
X_6	1	-7/12	0	¼	-2/3	1	-2/3	5/3
X_3	0	-1/12	1	-1/4	1/3	0	1/3	5/3

در جدول نهایی می توان فهمید که متغیرهای *x1* و *x4* امکان ورود به پایه را دارند. اگر *x1* وارد پایه شود، *x6* از پایه خارج می شود و اگر *x4* وارد پایه شود، *x6* از پایه خارج می شود. لذا گزینه 4 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۳- جواب بهینه مسئله صفر و یک زیر چقدر است؟

$$\min\ ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ + ۷x_۴$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ + x_۴ \geq ۶ \\ x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ \geq ۶ \\ ۳x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ \geq ۶ \end{cases}$$

$$x_j = (۰,۱)$$

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

با کنترل گزینه ها، جواب بدست می آید.

$$Z_1 = 7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} 2+3 \not\geq 6 \\ 1+4 \not\geq 6 \\ 3+1 \not\geq 6 \end{cases} \rightarrow \inf \\ x_4 = 1 \rightarrow \begin{cases} 1 \not\geq 6 \\ 1 \not\geq 6 \\ 4 \not\geq 6 \end{cases} \rightarrow \inf \end{cases}$$

$$Z_1 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_4 = 1 \rightarrow \begin{cases} 4+1 \not\geq 6 \\ 2+1 \not\geq 6 \\ 1+4 \not\geq 6 \end{cases} \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \rightarrow \begin{cases} 9 \geq 6 \\ 7 \geq 6 \\ 5 \not\geq 6 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \inf$$

$$Z_1 = 14 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2+3+1 \geq 6 \\ 1+4+1 \geq 6 \\ 3+1+4 \geq 6 \end{cases} \rightarrow feas \rightarrow OK$$

لذا گزینه 3 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۴- **کدام یک از گزینه‌های زیر، در خصوص شرایط KKT در یک مسأله حداقل‌سازی غیرخطی نادرست است؟**

۱) شرط کافی KKT آن است که مجموعهٔ محدودیت‌های مسئله باید مجموعه‌ای محدب باشد.

۲) شرط کافی KKT آن است که تابع هدف مسئله، باید مجموعه‌ای مقعر باشد.

۳) شرط لازم KKT آن است که شرایط دوگانگی (Complementary Slackness) در آن برقرار باشد.

۴) شرط لازم KKT آن است که بتوان گرادیان تابع هدف را بر اساس ترکیب خطی مثبت گرادیان محدودیت‌های عمل کننده نوشت.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

به بررسی گزینه ها می پردازیم.

گزینه 1: شرط کافی *KKT* برای رسیدن به جواب بهینه جهانی آن است که مسئله یک برنامه ریزی محدب باشد و این به معنای این است که مجموعه محدودیت ها مسئله محدب باشد لذا درست است.

گزینه 2: شرط کافی برای *KKT*، این است که مسئله یک برنامه ریزی محدب باشد. اگر محدودیت ها خطی یا مجموعه محدب باشد، با مقعر بودن تابع هدف، مسئله محدب است و شرط کافی برقرار است. لذا درست است.

گزینه 3: علاوه بر شرایط کمبود تکمیلی، باید محدودیت ها هم برقرار باشد. لذا غلط است.

گزینه 4: به شرطی که تابع هدف مقعر باشد، اگر بتوان تابع هدف را به صورت ترکیبی خطی گرادیان محدودیت ها موثر نوشت، شرط کافی برقرار است. این معنای دیگر محدب بودن مجموعه محدودیت ها است. لذا درست است.

لذا گزینه 3 پاسخ است.

۴۵- اگر (x_1^*, y_1^*) جواب مسئله $\begin{cases} \max: f_1(x,y) = \ln x + \ln y \\ s.t: \quad px + qy \le r \end{cases}$ باشد و (x_2^*, y_2^*) جواب مسئلهٔ $\begin{cases} \max: f_2(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ s.t: \quad px + qy \le r \end{cases}$ باشد، آنگاه $\dfrac{x_1^* + y_1^*}{x_2^* + y_2^*}$ برابر است با:

۱) $\dfrac{(p+q)^2}{p^2+q^2}$

۲) $\dfrac{(p^2+q^2)}{(p+q)^2}$

۳) $\dfrac{2(p^2+q^2)}{(p+q)^2}$

۴) $\dfrac{(p+q)^2}{2(p^2+q^2)}$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$Max \quad \ln x + \ln y$$

$$s.t.$$

$$px + qy \le r \quad (\lambda)$$

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y + \lambda\left(r - px - qy\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - p\lambda = 0 \rightarrow x = \frac{1}{p\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - q\lambda = 0 \rightarrow y = \frac{1}{q\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = r - px - qy = 0 \rightarrow r = \frac{p}{p\lambda} + \frac{q}{q\lambda} \rightarrow r = \frac{2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2}{r} \Rightarrow x_1^* = \frac{r}{2p}, y_1^* = \frac{r}{2q}$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$Max \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}$$
$$s.t.$$
$$px+qy\le r \quad (\lambda)$$

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\lambda\left(r-px-qy\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-p\lambda=0\rightarrow x=\frac{1}{4p^2\lambda^2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}-q\lambda=0\rightarrow y=\frac{1}{4q^2\lambda^2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=r-px-qy=0\rightarrow r=\frac{p}{4p^2\lambda^2}+\frac{q}{4q^2\lambda^2}\rightarrow r=\frac{1}{4p\lambda^2}+\frac{1}{4q\lambda^2}\rightarrow \lambda^2=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{4p}+\frac{1}{4q}\right)=\frac{1}{r}\frac{p+q}{4pq}$$
$$\Rightarrow x_2^*=\frac{1}{4p^2}\frac{4pqr}{p+q}=\frac{qr}{p(p+q)},\ y_2^*=\frac{pr}{q(p+q)}$$
$$\frac{x_1^*+y_1^*}{x_2^*+y_2^*}=\frac{\frac{r}{2p}+\frac{r}{2q}}{\frac{qr}{p(p+q)}+\frac{pr}{q(p+q)}}=\frac{\frac{q+p}{2pq}r}{\frac{q^2r+p^2r}{pq(p+q)}}=\frac{(p+q)^2}{2(p^2+q^2)}$$

گزینه 4 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۶- یک تابع درجهٔ دوم کامل با n متغیر را در نظر بگیرید. اگر x نقطهٔ بهینهٔ مینیمم‌سازی این تابع باشد. در این صورت چنانچه تابع ..... باشد نقطه x منحصر به فرد است.

۱) محدب ۲) مقعر ۳) اکیداً محدب ۴) اکیداً مقعر

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

با توجه به این که در توابع درجه دوم، متغیر درجه سوم نداریم و لذا امکان برابر صفر شدن مشتق دوم نیست و لذا تابع اکیدا محدب/مقعر است. در این مثال چون کمینه سازی است و لذا اکیدا محدب است. لذا گزینه 3 درست است.

۴۷- تابع $f(x) = xe^{-x^{۳}}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد تابع $f(x)$ صحیح است؟

۱) نقطهٔ $+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است.

۲) نقطهٔ $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است.

۳) نقاط $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ جزء نقاط اکسترمم تابع هستند.

۴) نقاط $+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ جزء نقاط اکسترمم تابع هستند.

حل:

$$f(x)=xe^{-x^3}$$

$$f'(x)=e^{-x^3}-\left(3x^2e^{-x^3}\right)x=e^{-x^3}\left(1-3x^3\right)=0\rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(e^{-x^3}\neq 0\right)$$

مشتق دوم می گیریم تا بررسی شود که این نقطه بیشنه است یا کمینه:

$$f''(x)=e^{-x^3}(-9x^2)+(-3x^2e^{-x^3})(1-3x^3)=3x^2e^{-x^3}(3x^3-4)$$

اگر در تابع مشتق دوم نقطه $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ را قرار دهیم داریم:

$$f(x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}})=(+)\underbrace{(3\frac{1}{3}-4)}_{<0}<0$$

پس نقطه $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ بیشینه است و لذا هیچ گزینه ای درست نیست.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۸- دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\, z_1 = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Max}\, z_2 = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \text{ و } x_2 \text{ اعداد صحیح غیر منفی هستند.} \end{cases}$$

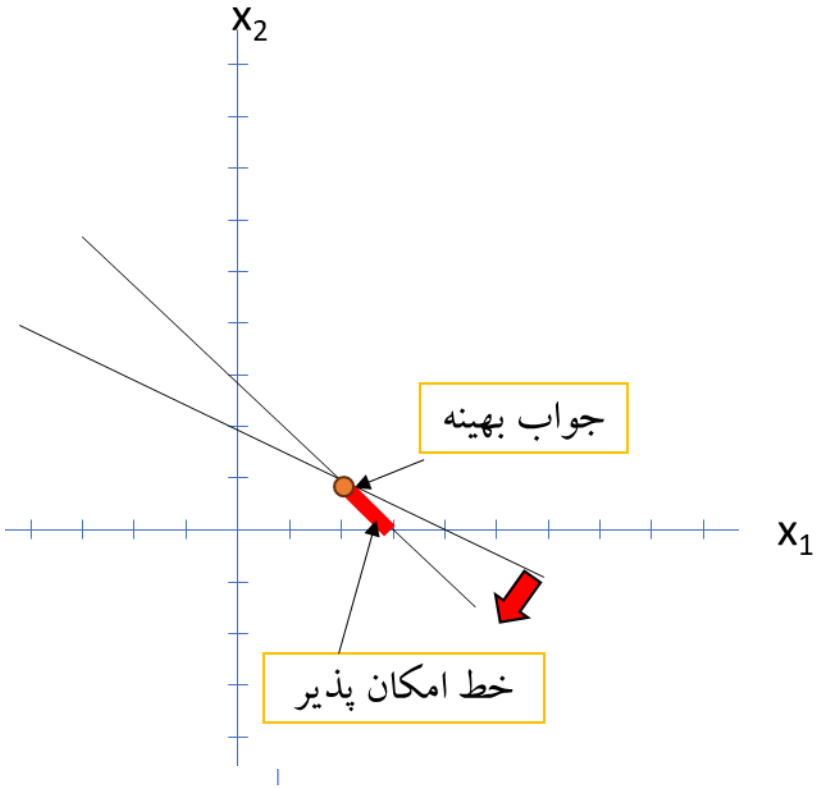
بین مقادیر بهینه z_1 و z_2 چه رابطه‌ای برقرار است؟

۱) $\text{Max}\, z_1 < \text{Max}\, z_2$ ۲) $\text{Max}\, z_1 = \text{Max}\, z_2$ ۳) $\text{Max}\, z_1 > \text{Max}\, z_2$ ۴) هیچ رابطه‌ای برقرار نیست.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

مدل (1) را به صورت زیر ترسیمی حل می کنیم.



جواب مدل فوق نقطه *(2,1)* است که اعداد صحیح هستند پس $Max\ Z_2 = Max\ Z_1$ و لذا گزینه 2 درست است.

۴۹- مسئله می‌نیمم کردن تابع هزینهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } U = \text{Max.}\{x^{۲}(۰)+u^{۲}(۰);\frac{۱}{۱+|x(۱)+u(۱)|}+x^{۲}(۲)u^{۲}(۲)\,|\sqrt{x^{۲}(۳)+u^{۲}(۳)+x^{۴}(۴)u^{۲}(۴)}\,|\}$$

فرض کنید معادله پویای سیستم عبارت است از:

$$x(k+۱)=f_k[x(k),u(k)]\ ،\ k=۰,۱,۲,۳$$

اگر این مسئله را از برنامه‌ریزی پویا و با حرکت به عقب حل کنیم و از شرط کمکی زیر شروع کنیم:

$$I(x,۴)=\min_u\{x^{۴}u^{۲}\}$$

معادله تکراری مسأله برای مرحلهٔ $k=۲$ عبارت خواهد بود از:

۱) $I(x,۲)=\min_u\{x^{۲}u^{۲}\,|\sqrt{I(f_{۲}(x,u),۳)}\,|\}$

۲) $I(x,۲)=\min_u\{x^{۲}u^{۲}\,|I(f_{۱}(x,u),۲)|\}$

۳) $I(x,۲)=\min_u\{x^{۲}+u^{۲}+I(f_{۲}(x,u),۳)\}$

۴) $I(x,۲)=\min_u\{x^{۲}+u^{۲}+I(f_{۳}(x,u),۴)\}$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

تعداد متغیرهای مسئله 4 است. با توجه به رویکرد عقب به جلو، پس $1 \to 2 \to 3 \to 4$ تنها گزینه ای است که در شرایط مدل سازی پویا صدق می کند و لذا گزینه 1 درست است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۵۰- مدل برنامه‌ریزی با متغیرهای صحیح زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} \max \quad & ۶۰x_۱ + ۴۰x_۲ + ۲۰x_۳ \\ \text{s.t.} \quad & ۸x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ \le ۴۸ \\ & ۸x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ \le ۴۰ \\ & ۴x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ \le ۱۶ \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \text{ , integer} \end{aligned}$$

با اضافه کردن متغیرهای کمبود $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ به محدودیت‌ها و حل مدل خطی مربوطه، جدول نهائی آن عبارتست از:

$$\begin{aligned} z + ۴x_۱ \qquad\qquad + ۸s_۲ + ۱۶s_۳ &= ۲۸۸ \\ ۱/۶x_۱ \qquad + s_۱ + ۱/۲s_۲ - ۵/۶s_۳ &= ۲۷/۲ \\ ۱/۶x_۱ + x_۳ \qquad + ۱/۲s_۲ - ۱/۶s_۳ &= ۱۱/۲ \\ ۰/۸x_۱ + x_۲ \qquad - ۰/۴s_۲ + ۱/۲s_۳ &= ۱/۶ \end{aligned}$$

برای اولین محدودیتی که متغیر پایه آن مقدار اعشاری دارد، برش کسری گموری آن کدام محدودیت است؟

۱) $\frac{۳}{۵}x_۱ + \frac{۱}{۵}s_۲ - \frac{۳}{۵}s_۳ \ge \frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۵}x_۱ + \frac{۱}{۵}s_۲ + \frac{۲}{۵}s_۳ \ge \frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}x_۱ + \frac{۲}{۵}s_۲ + \frac{۳}{۵}s_۳ \ge \frac{۱}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}x_۱ + s_۱ + \frac{۱}{۵}s_۲ + \frac{۲}{۵}s_۳ \ge ۲۷$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

از محدودیت 1، برش ایجاد می شود.

$$\left(1.6-[1.6]\right)x_1+\left(1.2-[1.2]\right)s_2+\left(-5.6-[-5.6]\right)s_3 \geq 27.2-[27.2]$$

$$0.6x_1+0.2s_2+0.4s_3 \geq 0.2 \rightarrow \frac{3}{5}x_1+\frac{1}{5}s_2+\frac{2}{5}s_3 \geq \frac{1}{5}$$

گزینه 2 درست است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com