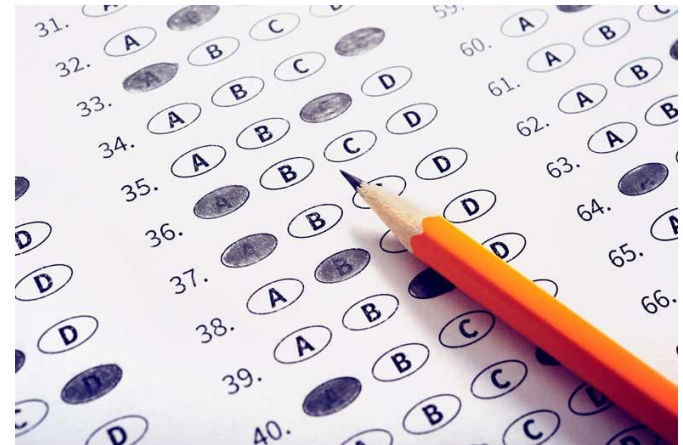
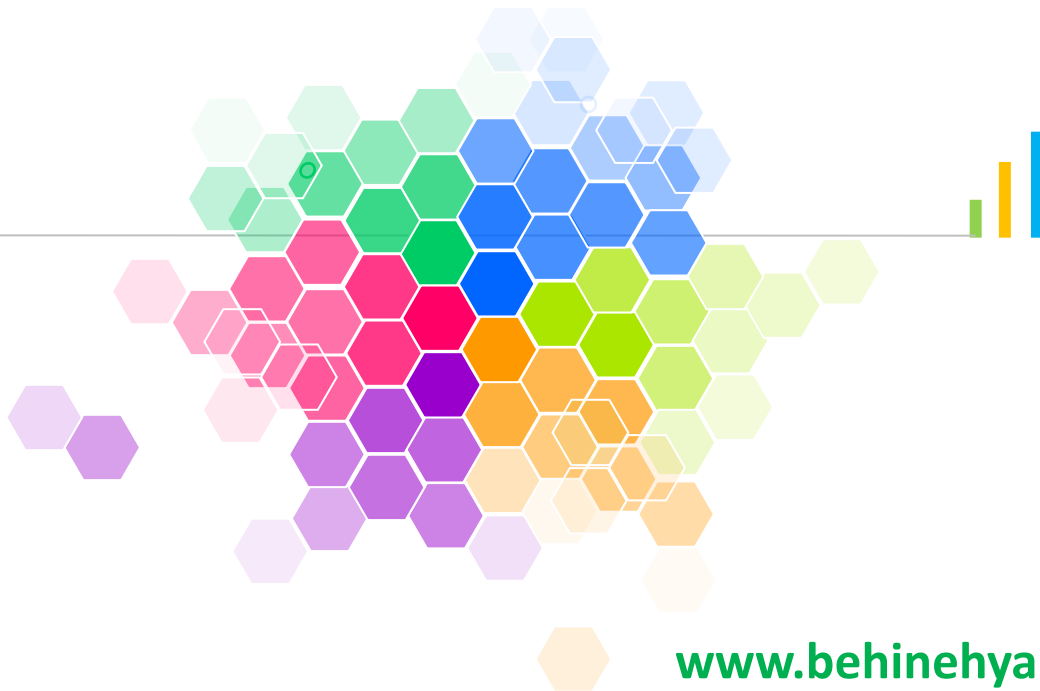


به نام خدا



# کنکور کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ۱۴۰۳



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

- ۲۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد ماتریس  $AA^T$ ، درست است؟
- همهٔ مقادیر ویژهٔ این ماتریس حقیقی هستند.
  - همهٔ مقادیر ویژهٔ حقیقی این ماتریس نامنفی هستند.
  - ماتریس معکوس پذیر است.

۱ (۲)

۱) صفر

۳ (۴)

۲ (۳)

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$(1) Ax = \lambda x, (2) A^T x = \lambda x$$

$$A^T x = \lambda x \xrightarrow{A \times} AA^T x = A\lambda x \rightarrow A(A^T x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) \stackrel{(1)}{=} \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

$\lambda^2$  یک عدد نامنفی و حقیقی است لذا گزینه ۳ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۲۷- فرض کنید  $A$  مربعی و معکوس پذیر است و  $B = A^T A$ ، آنگاه کدام رابطه درست است؟

$$B^{-1} A^T = A \quad (۲)$$

$$A^T B^{-1} = A^{-1} \quad (۱)$$

$$B^{-1} A^T = A^{-1} \quad (۴)$$

$$A^T B^{-1} = A \quad (۳)$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$B = A^T A \xrightarrow{B^{-1} \times} I = B^{-1} A^T A \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1} = B^{-1} A^T$$

لذا گزینه ۴ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۲۸- جدول سیمپلکس بهینه زیر را در نظر بگیرید. در صورت تغییر  $C_1$  (ضریب  $X_1$  در تابع هدف) تا حدی که منتج به تغییر پایه فعلی شود، کدام مورد درست است؟

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
$X_2$	۰	۱	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{35}$	۰	$\frac{2}{47}$
$X_6$	۰	۰	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	۱	$\frac{4}{17}$
$X_1$	۱	۰	$\frac{11}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{14}$	۰	$\frac{3}{67}$
	۰	۰	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{1}{35}$	۰	$-\frac{3}{517}$

(۱)  $X_2$  جای خود را با  $X_5$  عوض می‌کند.

(۲)  $X_1$  جای خود را با  $X_4$  عوض می‌کند.

(۳)  $X_6$  جای خود را با  $X_4$  عوض می‌کند.

(۴)  $X_6$  جای خود را با  $X_5$  عوض می‌کند.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

متغیر پایه	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	RHS
Z	1	0	0	$-4/7 - 11/7C$	$-11/14 - 2/7C$	$-1/35 + 1/14C$	0	$-51 \frac{3}{7}$
$X_2$	0	0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$4 \frac{3}{7}$
$X_6$	0	0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	0	$1 \frac{4}{7}$
$X_1$	0	1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	1	$6 \frac{3}{7}$

با افزایش C، اولین متغیری که از شرط بهینگی خارج می شود،  $X_5$  است لذا متغیر ورودی  $X_5$  است. متغیر خروجی از پایه از تست نسبت به دست می آید.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$\text{Min} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{30}{7} & \frac{11}{7} \\ \frac{35}{3} & \frac{14}{1} \end{array} \right\} = \text{Min} \{50, 22\} = 22$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $x_2$                        $x_6$

لذا  $x_6$  از پایه خارج می شود و لذا گزینه ۴ درست است.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۲۹- مقدار بهینه مدل برنامه ریزی خطی زیر چه مقدار است؟

$$\max Z = 8x_1 + 17x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2000$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3600$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2400$$

$$x_1 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$(1) \quad 11,650$$

$$(2) \quad 17,000$$

$$(3) \quad 24,000$$

$$(4) \quad 32,500$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

متغیر پایه	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_6$	RHS
Z	1	-8	-17	-10	0	0	0	0	0
$X_4$	0	1	2	4	1	0	0	0	2000
$X_5$	0	2	1	1	0	1	0	0	3600
$X_6$	0	1	2	2	0	0	1	0	2400
$X_7$	0	1	0	0	0	0	0	1	30
Z	1	0.5	0	24	8.5	0	0	0	17000
$X_2$	0	0.5	1	2	0.5	0	0	0	1000
$X_5$	0	1.5	0	-1	-0.5	1	0	0	2600
$X_6$	0	0	0	2	-1	0	1	0	400
$X_7$	0	1	0	0	0	0	0	1	30

شرط بهینگی برقرار است و مقدار بهینه تابع هدف برابر ۱۷۰۰۰ است و لذا گزینه ۲ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۰- برای یک مسئله کمینه‌سازی جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید که در آن  $s_1$ ،  $s_2$  و  $s_3$  متغیرهای کمکی برای خطی‌سازی هستند. مقدار مجموع ضرایب تابع هدف  $(c_1 + c_2 + c_3)$  کدام است؟

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
							(۱) -۵
$s_1$	$\frac{1}{2}$	۰	۱	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۶۵۰
							(۲) -۱۰
$s_2$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۱۵۰
							(۳) -۱۵
$x_2$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۳۵۰
							(۴) -۲۰
$z$	۱	۰	۴	۰	۰	-۵	

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

متغیر پایه	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	RHS
Z	1	1	0	4	0	0	-5	0
$S_1$	0	0.5	0	1	1	0	-0.5	650
$S_2$	0	0.5	0	0	0	1	-0.5	150
$X_2$	0	0.5	1	0	0	0	0.5	350
Z	1	6	10	4	0	0	0	3500
$S_1$	0	1	1	0	1	0	0	1000
$S_2$	0	1	1	0	0	1	0	500
$S_3$	0	1	2	4	0	0	1	700

مجموع  $c_1 + c_2 + c_3 = -6 - 10 - 4 = -20$  لذا گزینه ۴ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۳۱- جدول مندرج در سؤال ۳۰ را در نظر بگیرید. مجموع ضرایب متغیر  $X_7$  در سه محدودیت مدل چه مقداری است؟

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

با توجه به جدول فوق،  $4 = 2 + 1 + 1$  است لذا گزینه ۳ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۲- توابع  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  محدب هستند و می دانیم  $f$  غیر نزولی است. چه تعداد از توابع مرکب زیر همواره محدب هستند؟

$f(f(x))$  ,  $f(g(x))$  ,  $g(f(x))$  ,  $g(g(x))$

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$f \text{ is convex} \rightarrow f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

$$g \text{ is convex} \rightarrow g(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} f \text{ is non-decreasing} \\ \downarrow \\ x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{array} \\ & f(f(x)) \xrightarrow{x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)} f(f(\theta x + (1-\theta)y)) \leq f(\theta f(x) + (1-\theta)f(y)) \\ & \xrightarrow{x'=f(x), y'=f(y)} f(\theta x' + (1-\theta)y') \leq \theta f(x') + (1-\theta)f(y') = \theta f(f(x)) + (1-\theta)f(f(y)) \end{aligned}$$

$\rightarrow f \circ f$  is convex

به طریق مشابه می توان نشان داده که  $f \circ g$  هم محدب است. نکته اصلی در این اثبات، غیرنزولی بودن  $f$  است. که برای  $g \circ f$  و  $g \circ g$  صدق نمی کند و لذا گزینه ۳ درست است.



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۳- می‌دانیم  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  محدب است و تابع  $g$  و مجموعه  $S$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم. کدام گزینه همواره

درست است؟ ( $\alpha$  یک عدد مشخص است)  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \alpha, a^T x + b > 0\}$  ,  $g(x) = \frac{f(x)}{a^T x + b}$

(۱) هر یک از  $S$  و  $g$  می‌توانند محدب نباشند.

(۲)  $S$  و  $g$  هر دو محدب هستند.

(۳)  $S$  محدب است.

(۴)  $g$  محدب است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

برای محدب بودن  $fg$  (یعنی  $(fg)'' > 0$ )، باید تک تک عبارت های فوق نامنفی باشد. چون  $f$  محدب است و لذا  $f''$  نامنفی است. از طرفی  $g$  باید نامنفی باشد.  $f$  و  $g$  هم باید هر دو صعودی یا نزولی باشد. و در نهایت،  $f$  نامنفی و  $g$  محدب باشد. به صورت کلی  $f$  و  $g$  هم باید هر دو نامنفی و هر دو صعودی (یا نزولی) باشند. در این سوال اگر  $f$  را همان  $f$  و  $g$  را همان  $\frac{1}{ax+b}$  در نظر بگیریم، چون در خصوص علامت  $f$  صحبتی نشده است، در خصوص تابع  $\frac{f(x)}{ax+b}$  نمی توان در مورد محدب بودن نظری داد.

برای محدب بودن  $g$ ، بایستی  $g$  یک تابع محدب باشد. با توجه به این که  $ax+b$ ، شرط مثبت بودن  $\frac{1}{ax+b}$  برقرار است. ولی در خصوص  $f$  نمی توان نظری داد و لذا گزینه ۱ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۴- برای خطی‌سازی تابع هدف زیر به حداقل چه تعداد محدودیت و متغیر جدید نیاز است، که در آنها  $x_1, \dots, x_v$  متغیرهای نامنفی و کوچک‌تر یا مساوی ۵ هستند؟

$$\max z = \min\{x_1, x_2, x_3\} - \min\{x_4, x_5\} + x_6 + x_v$$

۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$Max Z = \underbrace{Min(x_1, x_2, x_3)}_{y_1} - \underbrace{Min(x_4, x_5)}_{y_2} + x_6 + x_7$$

$$Max Z = y_1 - y_2 + x_6 + x_7$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_1 \leq x_2$$

$$y_1 \leq x_3$$

$$y_2 \leq x_4$$

$$y_2 \leq x_5$$

این مدل دارای ۵ محدودیت و ۲ متغیر است لذا گزینه ۱ درست است. (سنگش گزینه ۲ را اعلام کرده است.)

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۵- تابع دومتغیره  $f(x,y)$  را در نظر بگیرید و توابع  $g$  و  $h$  را به شکل زیر تعریف کنید. کدام رابطه برای مقادیر

بهینه  $h^* = \min_{y \in Y} h(y)$  و  $g^* = \max_{x \in X} g(x)$  برقرار است؟

$$g(x) = \min_{y \in Y} f(x,y)$$

$$h(y) = \max_{x \in X} f(x,y)$$

$$(1) \quad h^* \geq g^*$$

$$(2) \quad h^* = g^*$$

$$(3) \quad h^* \leq g^*$$

(4) مقادیر  $h^*$  و  $g^*$  در حالت کلی قابل مقایسه نیستند.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$h^* = \min_{y \in Y} h(y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \geq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} g(x) = g^*$$

لذا گزینه ۱ درست است:

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۶- مقدار بهینه مدل زیر کدام است؟ (  $a, b, c > 0$  اعداد مشخص هستند.)

$$\max \quad xyz$$

$$\text{s.t.} \quad ax + by + cz = 1$$

$$x, y, z \geq 0$$

(۱)  $27abc$

(۲)  $27$

(۳)  $\frac{1}{27}$

(۴)  $\frac{1}{27abc}$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$\text{Max } f(x, y, z) = xyz$$

$$ax + by + cz = 1$$

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \geq 0, \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \times 0 - z^2 \leq 0, \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det H = 2xyz$$

با توجه به این که  $x, y, z$  نامنفی است لذا مقدار دترمینان نامنفی است و تابع مقعر است و دارای نقطه بیشینه است.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$f(x, y, z, u) = xyz - u(ax + by + cz - 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz - au = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz - bu = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} yz - au &= 0 \\ xz - bu &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\div} \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow y = \frac{a}{b}x$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz - au = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy - cu = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} yz - au &= 0 \\ xy - cu &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\div} \frac{z}{x} = \frac{a}{c} \rightarrow z = \frac{a}{c}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = ax + by + cz = 1 \xrightarrow{up} ax + ax + ax = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3a}, y = \frac{1}{3b}, z = \frac{1}{3c}$$

$$\rightarrow obj = \left( \frac{1}{3a} \times \frac{1}{3b} \times \frac{1}{3c} \right) = \frac{1}{27abc}$$

لذا گزینه ۴ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۷- در حل مسئله حمل و نقل زیر با نقطه شروع حاصل از روش گوشه شمال غربی، در تکرار اول به روش سیمپلکس

حمل و نقل به چه میزان بهبود حاصل می شود؟

				۲۵۰
	۳	۱	۷	۴
	۲	۶	۵	۹
	۸	۳	۳	۲
۲۰۰	۳۰۰	۳۵۰	۱۵۰	۴۰۰

(۱) ۱۰۰۰

(۲) ۱۱۰۰

(۳) ۱۲۰۰

(۴) ۱۳۰۰

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

جواب اولیه به روش گوشه شمال غربی به صورت زیر بدست می آید.

عرضه	۱	۲	۳	۴	مقصد مبدأ
۱	۲۰۰	۵۰			<del>۲۵۰</del>
۲		۲۵۰	۱۰۰		<del>۳۵۰</del>
۳			۲۵۰	۱۵۰	<del>۴۰۰</del>
تقاضا	<del>۲۰۰</del>	<del>۳۰۰</del>	<del>۳۵۰</del>	<del>۱۵۰</del>	

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

nonbasic arc

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$\bar{c}_{13} = 7 - 0 - 0 = 7 \geq 0$$

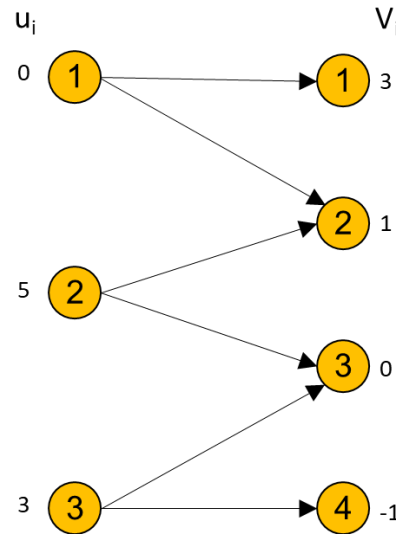
$$\bar{c}_{14} = 4 - 0 + 1 = 5 \geq 0$$

$$\bar{c}_{21} = 2 - 5 - 3 = -6 \leq 0 \leftarrow$$

$$\bar{c}_{24} = 9 - 5 + 1 = 5 \geq 0$$

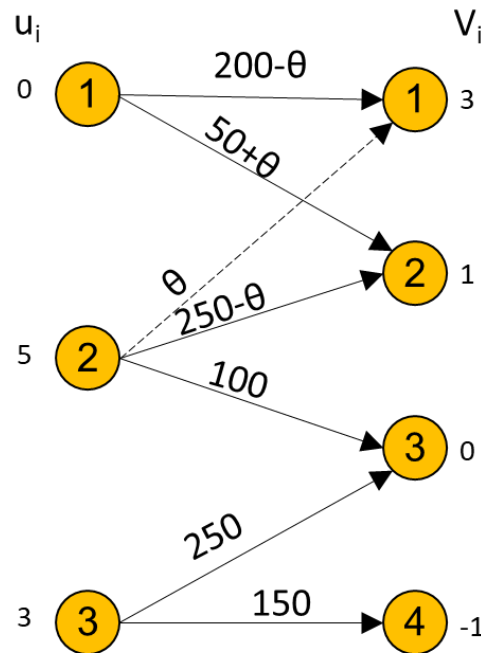
$$\bar{c}_{31} = 8 - 3 - 1 = 2 \geq 0$$

$$\bar{c}_{32} = 3 - 3 - 1 = -1 \leq 0$$



کمان ۱-۲ وارد پایه می شود و جواب پایه به صورت زیر تغییر می کند.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



کمان ۱-۱ از پایه خارج می شود و  $\theta_{\max} = \min\{200, 250\} = 200$  است. مقدار تغییر در تابع هدف به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\Delta = -200 \times 3 + 200 \times 1 + 200 \times 2 - 200 \times 6 = -600 + 600 - 1200 = -1200$$

مقدار تابع هدف ۱۲۰۰ کاهش می یابد و لذا گزینه ۳ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۸- تابع زیر را در نظر بگیرید که در آن  $p \geq 0$  و  $c < a$  پارامترهای مشخص هستند.  $X^*$  نشان دهنده مجموعه جواب‌هایی است که تابع  $f$  را بیشینه می‌کنند. کدام مورد نادرست است؟ ( $\bar{x}$  نقطه‌ای است که تابع درجه دوم

$$f(x) = \begin{cases} (x-c)(a-x) & 0 \leq x < p \\ \frac{1}{2} (x-c)(a-x) & x = p \\ 0 & x > p \end{cases}$$

( $x-c)(a-x)$  در آن بیشینه می‌شود.)

(۱) اگر  $p = c$ ، آنگاه  $X^* = \{x \geq p\}$ .

(۲) اگر  $p < c$ ، آنگاه  $X^* = \{x \geq p\}$ .

(۳) اگر  $c < p \leq \bar{x}$ ، آنگاه  $X^* = \emptyset$ .

(۴) اگر  $\bar{x} < p$ ، آنگاه  $X^* = \{\bar{x}\}$ .

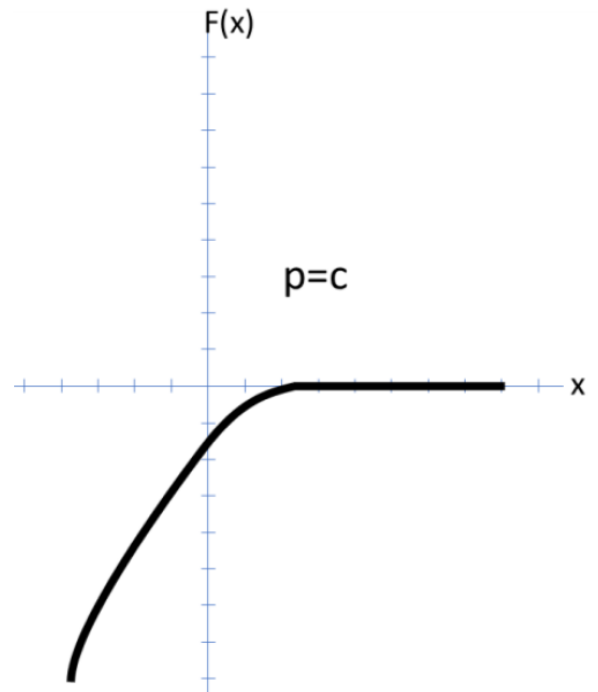
# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

با بررسی گزینه ها به جواب نادرست می رسیم.

گزینه ۱:

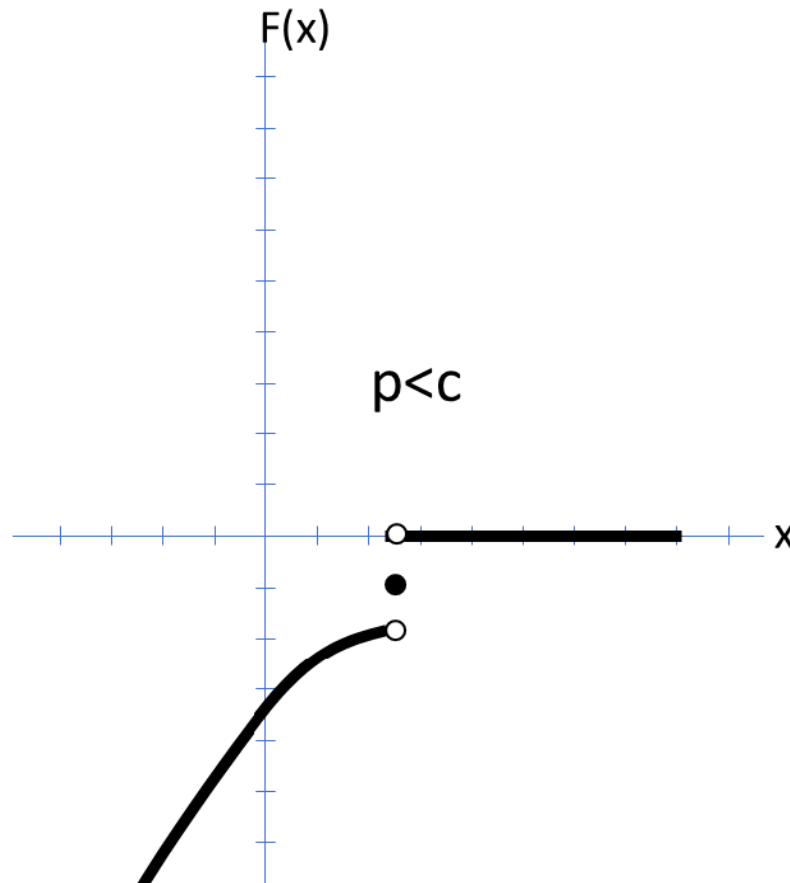


بیشینه تابع  $f$ ، همان نقاط بیشتر از  $p$  است لذا داریم:  $x^* = \{x \geq p\}$  و این گزینه درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



گزینه ۲:



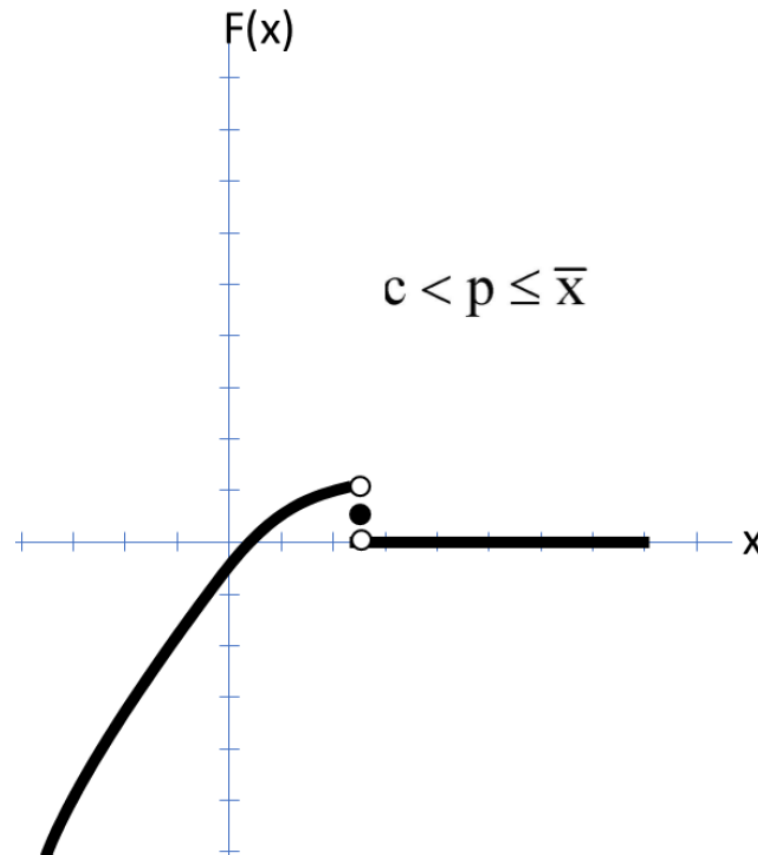
جواب بیشینه تابع هدف، همان نقاط بزرگتر اکید از  $p$  است یا  $x^* = \{x > p\}$  لذا این گزینه درست نیست.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



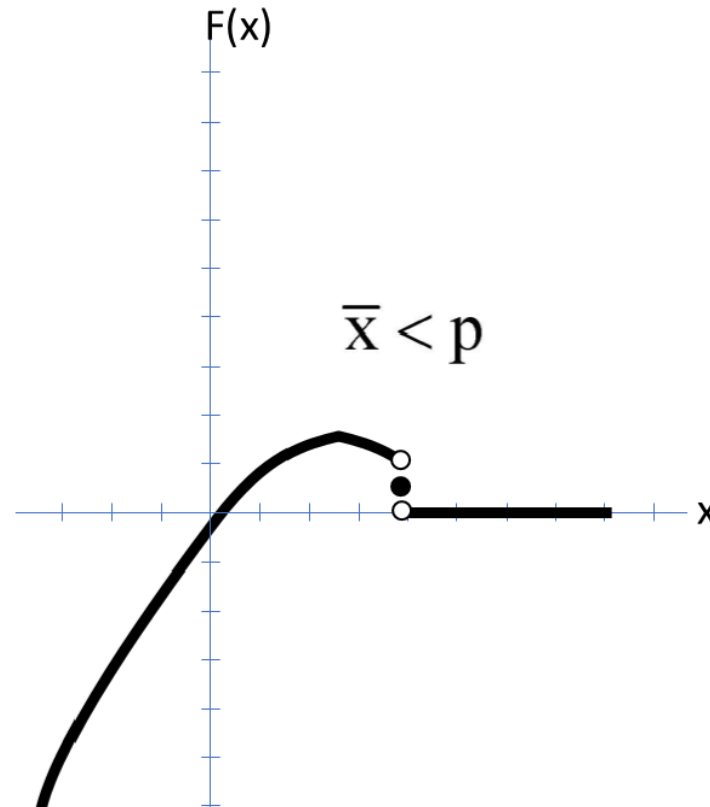
گزینه ۳:



این حالت جواب مشخصی ندارد لذا این گزینه نادرست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۴"



جواب بیشینه برابر جواب بیشینه تابع درجه دوم است و لذا این گزینه هم درست است.  
لذا گزینه ۲ پاسخ سوال است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۳۹- برای خطی سازی تابع هدف زیر حداقل به چه تعداد متغیر و محدودیت جدید نیاز است؟ (  $x_i$  ها متغیرهای

$$\min (b - \sum_{i=1}^n a_i x_i)^2$$

صفرویک هستند.)

$$\frac{3}{2} (n^2 - n) \quad (1)$$

$$3(n^2 - n) \quad (2)$$

$$3n^2 \quad (3)$$

$$n^2 - n \quad (4)$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل: ۱

تابع هدف دارای جمله های غیرخطی از توان دوم است. جملاتی که به صورت  $x_i^2$  است نیازی به معرفی متغیر جدید نیست و کافی است که  $x_i^2$  را با  $x_i$  جایگزین کرد. ولی برای جملات  $x_i x_j$  نیاز به تعریف متغیر دودویی  $u_{ij}$  است که تعداد آن برابر جملات  $x_i x_j$  در تابع هدف است که برابر با  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  است. برای نمایش ضربی به صورت زیر عمل می کنیم.

$$2u_{ij} \leq x_i + x_j$$

$$u_{ij} \geq x_i + x_j - 1$$

که تعداد محدودیت های فوق برابر با  $2 \times \binom{n}{2} = n(n-1)$  است. برای تشریح محدودیت فوق به تحلیل زیر توجه شود.

$$\left. \begin{array}{l} 2u_{ij} \leq x_i + x_j \\ u_{ij} \geq x_i + x_j - 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x_i = 0, x_j = 0 \rightarrow u_{ij} = 0 = x_i x_j \\ x_i = 0, x_j = 1 \rightarrow u_{ij} = 0 = x_i x_j \\ x_i = 1, x_j = 0 \rightarrow u_{ij} = 0 = x_i x_j \\ x_i = 1, x_j = 1 \rightarrow u_{ij} = 1 = x_i x_j \end{cases}$$

لذا در مجموع تعداد محدودیت ها و متغیرهای جدید برابر با  $2 \binom{n}{2} + \binom{n}{2} = 3 \frac{n(n-1)}{2}$  می شود. و گزینه ۱ درست

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۴۰- دوگان مدل برنامه ریزی خطی روبه‌رو کدام است؟

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{z} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} - \mathbf{d} \leq \mathbf{Cz} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{a}, \mathbf{C}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{a}, \mathbf{C}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{a}, \mathbf{C}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{b}, \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{a}, \mathbf{C}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \quad (4) \end{aligned}$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$\begin{array}{lll}
 \text{Min } a^T x + b^T z & \text{Max } -a^T x - b^T z & \text{Max } -a^T x + b^T z \\
 Ax - d \leq cz & \rightarrow Ax - cz \leq d & \xrightarrow{z \rightarrow -z} Ax + cz \leq d \\
 x \geq 0, z \leq 0 & x \geq 0, z \leq 0 & x \geq 0, z \geq 0 \\
 \\ 
 & \text{Min } d^T y & \text{Min } -d^T y \quad \text{Max } d^T y \\
 \xrightarrow{\text{dual}} & A^T y \geq -a & \xrightarrow{y \rightarrow -y} -A^T y \geq -a \rightarrow A^T y \leq a \\
 & c^T y \geq b & -c^T y \geq b \rightarrow c^T y \leq -b \\
 & y \geq 0 & -y \geq 0 \quad y \leq 0
 \end{array}$$

لذا گزینه ۴ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۱- مسئله حمل و نقل را در نظر بگیرید با این فرض که دو روش حمل و نقل برای انتقال مواد از عرضه‌کنندگان به متقاضیان وجود دارد: از طریق لوله ( $k=1$ ) و از طریق کشتی ( $k=2$ ). متغیر  $x_{ijk}$  مقدار انتقال از مبدأ  $i$  به مقصد  $j$  از طریق روش  $k$  ام را نشان می‌دهد. انتقال از طریق کشتی باعث اتلاف ۱۵ درصد از مواد مورد حمل است.  $s_i$  حداکثر میزان عرضه مبدأ  $i$  ام و  $d_j$  حداقل تقاضای مقصد  $j$  ام است. کدام محدودیت برای مدل‌سازی نادرست است؟

$$\forall i \quad \sum_k \sum_j x_{ijk} \leq s_i \quad (1)$$

$$\forall i \quad \sum_k \sum_j x_{ijk} \leq s_i \quad (2)$$

$$\forall j \quad \sum_i x_{ij1} + 0.15 \sum_i x_{ij2} \geq d_j \quad (3)$$

$$\forall j \quad \sum_k \sum_i x_{ijk} \geq d_j + 0.15 \sum_i x_{ij2} \quad (4)$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

محدودیت ۱: خروجی از مبادی است. اتلاف پس از خروج از مبدا اتفاق می افتد و لذا محدودیت مبدا به صورت زیر است.

$$\sum_k \sum_j x_{ijk} \leq s_i \quad \forall i$$

محدودیت ۳: از طریق لوله اتلاف وجود ندارد ولی از طریق کشتی اتلاف است. لذا محدودیت جذب یا همان تقاضا به صورت زیر است:

$$\sum_i x_{ij1} + \underbrace{0.85 \sum_i x_{ij2}}_{ship} \geq d_j \quad \forall j$$

*tube* *ship*

محدودیت ۴:

$$\sum_i x_{ij1} + \underbrace{0.85 \sum_i x_{ij2}}_{ship} \geq d_j \quad \forall j \xrightarrow{+0.15 \sum_i x_{ij2}} \sum_i x_{ij1} + \sum_i x_{ij2} \geq d_j + 0.15 \sum_i x_{ij2} \quad \forall j$$

*tube* *tube* *ship*

$$\sum_i \sum_k x_{ijk} \geq d_j + 0.15 \sum_i x_{ij2} \quad \forall j$$

لذا این گزینه هم درست است. با این اوصاف گزینه ۲ درست است.



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۲- مسئله کوله پشتی که به صورت زیر مدل شده است را در نظر بگیرید. در حل مدل زیر به روش برنامه ریزی پویای پَسرو، در مرحله دوم ( $n=2$ ) به جدول زیر رسیده ایم، که در آن  $s_r$  متغیر حالت مرحله دوم است. چنانچه مقدار  $w$  یک واحد کاهش پیدا کند، مقدار بهینه تابع هدف چند درصد کاهش می یابد؟

$$\max \quad z = 3 \cdot x_1 + \sum_{j=2}^n r_j x_j \quad (1) \quad 20$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + \sum_{j=2}^n d_j x_j \leq w \quad (2) \quad 25$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad \text{عدد صحیح} \quad (3) \quad 30$$

$$(4) \quad 50$$

$s_r$	$f_r^*(s_r)$
0	20
$w-3$	30
$w-2$	40
$w-1$	50
$w$	60

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

X1 \	0	1	2	3	4
W	60	30+40	-	-	-
W-1	50	30+30	-	-	-

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



مقدار تابع هدف در حالت  $w$  برابر 70 و در حالت  $w-1$  برابر 60 است. و لذا تغییر در تابع هدف برابر

$$70 \rightarrow 60 \Rightarrow \frac{10}{70} \approx 14\%$$

هیچ گزینه ای درست نیست.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۳- دو نفر در یک بازی هر کدام دارای یک سکه ۵۰ تومانی و ۲۵۰ تومانی هستند. آنها به‌طور همزمان بازی می‌کنند و یک سکه را ارائه می‌دهند. اگر هر دو سکه یکسان باشد، بازیکن ۲ به بازیکن ۱ برابر میانگین اعداد سکه‌ها می‌پردازد و در غیراین صورت بازیکن ۱ به بازیکن ۲ برابر میانگین سکه‌ها خواهد پرداخت. عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ چه میزان است؟

$$(۱) \quad -\frac{۵۰}{۳}$$

$$(۲) \quad \frac{۲۵۰}{۳}$$

$$(۳) \quad -۱۵۰$$

$$(۴) \quad ۵۰$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$(player1, player2)$

$$\left. \begin{aligned} (50, 50) &\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow +\frac{50+50}{2} = +50 \\ (250, 250) &\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow +\frac{250+250}{2} = +250 \\ (250, 50) &\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{50+250}{2} = -150 \\ (50, 250) &\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{250+50}{2} = -150 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{4}(50) + \frac{1}{4}(250) - \frac{1}{4}(150) - \frac{1}{4}(150) = 0$$

هیچ گزینه ای درست نیست.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۴- بعد از انجام تغییرات لازم برای حل مدل زیر با روش جمعی (بالاس) مجموع متغیرها و محدودیت‌های مدل

نهایی حداقل چه تعداد است؟

$$\max z = -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 - \sum_{j=6}^n c_j x_j \quad (1) \quad 4n - 12$$

$$(2) \quad 4n - 13$$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + \sum_{j=6}^n a_{1j} x_j \leq -6 \quad (3) \quad 5n - 17$$

$$(4) \quad 5n - 18$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 6x_5 + \sum_{j=6}^n a_{2j} x_j \leq 5$$

$$x_j \leq 10 \quad j = 6, \dots, n$$

$$x_1, \dots, x_5 \in \{0, 1\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 6, \dots, n, \quad \text{عدد صحیح}$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$x_j = 2^3 y_{j3} + 2^2 y_{j2} + 2^1 y_{j1} + 2^0 y_{j0}$$

تعداد متغیرهای بین صفر تا ۱۰ برابر با

$$n - 6 + 1 = n - 5$$

تعداد متغیرهای صفرو یک برابر با

$$4(n - 5)$$

و بنابراین ، مجموع متغیرها و محدودیت ها به صورت زیر است.

$$4(n - 5) + 5 + 1 + 1 + n - 5 = 5n - 18$$

<hr style="border: none; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/>				
تعداد متغیرهای $y_j$	تعداد متغیرهای 0-1	محدودیت های قبلی	محدودیت های کمتر از ۱۰	

لذا گزینه ۴ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۵- مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مخلوط زیر را در نظر بگیرید. حل بهینه آزادسازی این مدل به صورت

$s_3 = \frac{23}{7}$ ،  $y = 3$  و  $x = \frac{20}{7}$  است (سایر متغیرها صفر هستند). اگر اولین برش گوُمری به صورت

$a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 \geq b$  باشد، چه مقدار است؟ ( $s_1$ ،  $s_2$  و  $s_3$  متغیرهای لقی هستند).

$$\max z = 4x - y$$

$$\text{s.t.} \quad 7x - 2y \leq 14$$

$$y \leq 3$$

$$2x - 2y \leq 3$$

$$x, y \geq 0, x \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

$$\frac{1}{7} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{7} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{7} \quad (4)$$



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

متغیر پایه	Z	X	Y	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	RHS
Z	1	-4	1	0	0	0	0
S <sub>1</sub>	0	7	-2	1	0	0	14
S <sub>2</sub>	0	0	1	0	1	0	3
S <sub>3</sub>	0	2	-1	0	0	1	3
Z	1	0	-3	0	0	2	6
S <sub>1</sub>	0	0	5	1	0	-3.5	3.5
S <sub>2</sub>	0	0	1	0	1	0	3
X	0	1	-1	0	0	½	1.5
Z	1	0	0	0.6	0	-0.1	8.1
Y	0	0	1	1/5	0	-0.7	0.7
S <sub>2</sub>	0	0	0	-1/5	1	0.7	2.3
X	0	1	0	1/5	0	-0.2	2.2
Z	1	0	0	0.571	1/7	0	8.428
Y	0	0	1	0	1	0	3
S <sub>3</sub>	0	0	0	-2/7	10/7	1	23/7
X	0	1	0	1/7	2/7	0	20/7

$x \in \text{int}$

$$\left(\frac{1}{7} - \left\lceil \frac{1}{7} \right\rceil\right)s_1 + \left(\frac{2}{7} - \left\lceil \frac{2}{7} \right\rceil\right)s_2 \geq \frac{20}{7} - \left\lceil \frac{20}{7} \right\rceil \rightarrow \frac{1}{7}s_1 + \frac{2}{7}s_2 \geq \frac{6}{7} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

گزینه ۱ صحیح است.

# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com)

[behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com)